

Об особенностях оценок показателя Херста классического броуновского движения, вычисляемых с помощью метода R/S-анализа

С.В. Поршневу, Э.В. Соломаха, О.А. Пономарева

Аннотация— Изучены особенности оценок показателя Херста H траекторий классического броуновского движения, вычисляемых с помощью метода R/S-анализа, где R – размах накопленного отклонения выбранной фрагмента траектории, попадающего во временной интервал $[L_{\min}, L_{\max}]$ (с математической точки зрения – временного ряда (ВР)), S – математическое ожидание фрагмента анализируемого ВР. В связи с тем, что при использовании метода R/S-анализа для вычисления оценок показателя Херста H анализируемого ВР необходимо задать значения параметров L_{\min}, L_{\max} , было высказано предположение о возможном влиянии данных параметров на значение оценки показателя Херста H . В ходе проверки высказанной гипотезы обнаружено, что оценка показателя Херста H совпадает с точностью до погрешности вычислений с истинным значением показателя Херста классического броуновского движения, равного 0.5, только для конкретных пар значений $L_{\min}^*, L_{\max}^*, k = 1, 2, \dots$.

Продемонстрировано, что на плоскости (L_{\min}, L_{\max}) пары значений L_{\min}^*, L_{\max}^* располагаются вдоль прямой $L_{\max} = 7.202L_{\min} + 1.560$. При произвольном выборе параметров метода R/S-анализа таким, что $L_{\min} \neq L_{\min}^*, L_{\max} \neq L_{\max}^*$ значение показателя Херста варьируется в диапазоне $[0.25; 1.12]$.

Обнаруженная особенность оценок показателя Херста H методом R/S-анализа траекторий классического броуновского движения позволяет предположить наличие аналогичных особенностей оценок показателей Херста H траекторий фрактального броуновского движения, и, при ее подтверждении, критического анализа многочисленных публикаций, авторы которых применяли метод R/S-анализа.

Статья получена 15 августа 2020.

С.В. Поршневу, Уральский Федеральный Университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация (e-mail: s.v.porshnev@urfu.ru).

Э.В. Соломаха, Уральский Федеральный Университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация (e-mail: eduard.solomakha@urfu.ru).

О.А. Пономарева, Уральский Федеральный Университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация (e-mail o.a.ponomareva@urfu.ru).

Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006

Ключевые слова—Показатель Херста, R/S-анализ, броуновское движение, фрактальное броуновское движение.

I. ВВЕДЕНИЕ

Начало систематических исследований самоподобных случайных процессов, названных фрактальным броуновским движением (ФБД), было положено Б. Мандельбротом [1], где отмечено, что, по-видимому, впервые в неявном виде ФБД рассматривалось А.Н. Колмогоровым в 1940 г. [2]. Напомним, следуя [3], определения гауссовского случайного процесса, одномерного броуновского движения и ФБД.

1) Случайная величина X называется гауссовой или нормальной с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , если она распределена по закону:

$$F_X(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)^2\right) d\xi.$$

2) Случайный процесс $X(t)$ называется гауссовским, если для каждого конечного набора моментов времени $\{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ вектор $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_K)\}$ имеет гауссово распределение.

3) Одномерным броуновским движением называется гауссовский процесс $X(t)$ (или винеровским процессом) на интервале $[a, b]$, обладающий следующими свойствами:

- $X(0) = 0$ и функция $X(t)$, почти всегда непрерывна.
- Свойство гауссовости приращений: случайная величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$ имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)$, где $t_2 > t_1$, то есть

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma(t_2 - t_1)}\right)^2\right) d\xi. \quad (1)$$

4) ФБД с параметром H называется процесс $X(t)$, обладающий следующими свойствами.

- $X(0) = 0$ и функция $X(t)$, почти всегда непрерывна.
- Свойство гауссовости приращений: случайная величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$ имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}$, где $t_2 > t_1$, то есть

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2-t_1)^H} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma(t_2-t_1)^H}\right)^2\right) d\xi. \quad (2)$$

Отметим, что:

при $H=1/2$ ФБД совпадает с одномерным броуновским движением;

из (1) следует, что дисперсия приращений броуновского движения подчиняется закону

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = E[(X(t_2) - X(t_1))^2] = \sigma^2 |t_2 - t_1|;$$

из (2) следует, что дисперсия приращений ФБД подчиняется закону

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = E[(X(t_2) - X(t_1))^2] = \sigma^2 |t_2 - t_1|^{2H}.$$

Описанные выше понятия одномерного броуновского движения и фрактального броуновского движения применяют в качестве математических моделей ВР, составленных из значений выбранных количественных показателей, значения которых определены (измерены) в известные дискретные моменты $\{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ времени, в большинстве случаев

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_K - t_{K-1} = const.$$

При этом, априори, полагается, что значение показателя H определяется состоянием системы, породившей изучаемый ВР.

На практике приходится решать задачу вычисления оценки значения параметра H математической модели (2), называемого показателем Херста, по известному ВР x_i , $i = \overline{1, K}$. Для этого традиционно используются методы накопленной дисперсии [3]; метод R/S -анализа [4]; метод основанный на использовании второй производной ВР; метод, основанный на использовании нерекурсивного фильтра, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами выбранного вейвлет-разложения (например, вейвлета «Symlets» 5-порядка); метод, основанный на анализе распределения энергии вейвлет-коэффициентов по уровням пакетной вейвлет-декомпозиции ВР (три последних метода, реализованы в пакете MATLAB в функции fbmes1.m, описание которой представлено в соответствующем разделе справки пакета MATLAB).

Отметим, что сегодня, большинство исследователей применяют математические модели (1), (2) к ВР различной природы, следуя традиции, заложенной в монографии Э. Петерса [5], формально, не проводя проверку свойства гауссовости их приращений. Данное обстоятельство, вообще говоря, позволяет поставить полученные при этом оценки параметра H и их дальнейшие интерпретации под сомнение. Отмеченный недостаток можно обнаружить, как в многочисленных эконометрических исследованиях (см., например, [6]), так и в многочисленных работах, посвященных анализу Интернет-трафика (см., например, [7] и др.).

Еще одна проблема интерпретации оценок показателя H , связана с отсутствием исследований их точности, которая, как, априори, можно ожидать зависит от внутренних параметров метода, использованного для оценки показателя Херста H . В этой связи исследование

данного вопроса является актуальным.

В статье изложены результаты исследования зависимости точности оценок показателей Херста H классического броуновского движения методом R/S -анализа, наиболее часто используемого в эконометрике, от использованных значений параметров данного метода. Выбор в качестве тестовой выборки данного типа броуновского движения обусловлен тем, что для него известно точное значения показателя Херста H , равное 0.5. В то время как для случая ФБД ($H \in [0, 1], H \neq 0.5$) может быть найдена только интегральная оценка точности показателя Херста, определяемая как качеством используемого алгоритма генерации реализаций ФБД, так и точностью выбранного метода оценки показателя Херста H . Получена оценка точности.

II. АЛГОРИТМ R/S-АНАЛИЗА

Метод R/S -анализа, используемый для оценки показателя самоподобия временного ряда (ВР), получившего название показатель Херста (традиционно обозначаемый буквой H) был предложен в 1951 г. гидрогеологом Г. Херстом [2], более 40 лет занимавшимся анализом статистических данных годовых стоков реки Нил. Данный метод реализуется выполнением следующей последовательности действий.

Анализируемый ВР x_k , $k = \overline{1, K}$, разделяют на N смежных интервалов длиной L : $N = \text{fix}(K/L)$, где $\text{fix}(\cdot)$ – функция, отсекающая дробную часть числа.

На каждом из выбранных в п. 1 временных интервалов вычисляют средние значения ВР, совокупность которых далее будем называть ансамблем средних значений $\{\bar{x}_n\}$, $n = \overline{1, N}$:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{L} \sum_{i=1+(n-1)L}^{nL} x_i.$$

На каждом из выбранных в п. 1 временных интервалов вычисляют математическое ожидание фрагмента анализируемого ВР, попадающего в данный временной интервал:

$$\sigma_n = \left[\sum_{i=1+(n-1)L}^{nL} (x_i - \bar{x}_n)^2 \right]^{0.5}.$$

На каждом из выбранных в п. 1 временных интервалов вычисляют накопленные отклонения соответствующих фрагментов ВР:

$$X_n = \sum_{i=1+(n-1)L}^{nL} (x_i - \bar{x}_n).$$

На каждом из выбранных в п. 1 временных интервалов вычисляют значение размаха накопленного отклонения:

$$[R_{\max}]_n = \max(X_n) - \min(X_n).$$

На каждом из выбранных в п. 1 временных интервалов вычисляют отношения накопленных отклонений к математическому ожиданию данного фрагмента ВР:

$$[R/S]_n = [R_{\max}]_n / \sigma_n.$$

Вычисляют по ансамблю значений $\{[R/S]_n\}$ среднее значение отношения накопленных отклонений к математическому ожиданию соответствующего фрагмента ВР:

$$\overline{[R/S]}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [R/S]_n$$

Увеличивают длину интервала L пока $L \leq L_{\max}$ ($L_{\max} \leq K/2$) и повторяют пп. 1–8 алгоритма R/S -анализа.

Вычисляют с помощью метода наименьших квадратов (МНК) угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей зависимость $\overline{[R/S]}_N = f(\log_2(N))$.

Программная реализация данного алгоритма на языке пакета MATLAB (функция RSA.m) приведена в Приложении 1.

III. АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ХЕРСТА ОТ ПАРАМЕТРОВ АЛГОРИТМА R/S-АНАЛИЗА

Рассмотрим результаты вычисления показателя Херста типичной траектории классического броуновского движения длиной, состоящей из значений 2^{20} координат броуновской частицы, сгенерированного в соответствие с алгоритмом срединного смещения [3], представленной на рис. 1.

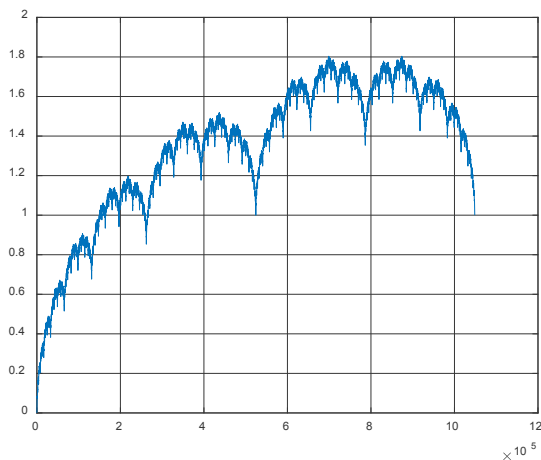


Рис. 1. Типичная траектория классического броуновского движения

Соответствующий график зависимости

Таблица 1 – Оценки значений показателей Херста H классического броуновского движения, вычисленные методом R/S-анализа

L_{\min}	L_{\max}	H	L_{\min}	L_{\max}	H	L_{\min}	$5L_{\max}$	H
3	10	0.61317	5	10	0.72267	7	30	0.58261
3	20	0.51566	5	20	0.59180	7	40	0.53756
3	30	0.46779	5	30	0.53065	7	50	0.50560
3	40	0.43713	5	40	0.49246	7	60	0.48208
4	10	0.66953	6	20	0.62528	8	40	0.55766
4	20	0.55553	6	30	0.55771	8	50	0.52402
4	30	0.50092	6	40	0.51601	8	60	0.49862
4	40	0.46641	6	50	0.48660	8	70	0.47861

Из таблицы 1 видно, что, действительно, оценки показателей Херста H классического броуновского

$\overline{[R/S]}_N = f(\log_2(N))$, а также интервалы $[-\text{std}([R/S]_n), \text{std}([R/S]_n)]$ и границы 95% доверительного интервала линейной регрессии представлены на рис. 2.

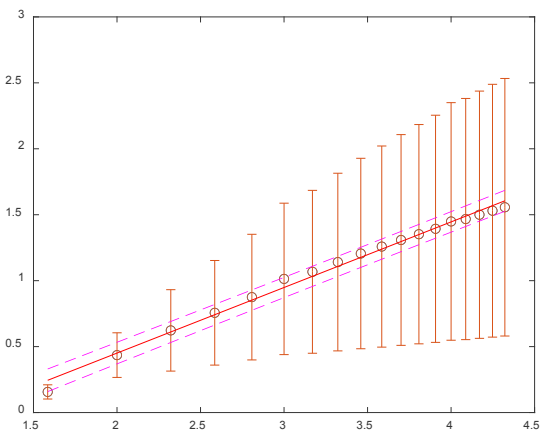


Рис. 2. Классическое броуновское движение: типичный график зависимости $\overline{[R/S]}_N = f(\log_2(N))$

Из рис. 2 видно, что интервал $[-\text{std}([R/S]_n), \text{std}([R/S]_n)]$ при увеличении длительности интервалов разбиения исходного ВР L (соответственно, уменьшении числа интервалом $N = \text{fix}(K/L)$), также увеличивается.

Данный результат, позволил, в свою очередь, выдвинуть гипотезу о том, что точность оценки показателя Херста классического броуновского движения, вообще говоря, будет зависеть от диапазона изменения параметра алгоритма R/S -анализа L – длины отрезка $[L_{\min}, L_{\max}]$, где L_{\min} – минимальное и L_{\max} – максимальное значения показателя L .

Для проверки данной гипотезы были вычислены оценки показателя Херста обсуждаемой траектории классического броуновского движения при различных значениях L_{\min}, L_{\max} , представленные в таблице 1.

движения, вычисленные методом R/S -анализа оказываются зависящими от длины отрезка $[L_{\min}, L_{\max}]$.

Для удобства дальнейшего анализа данные табл. 1 были представлены в виде графиков зависимостей $H = H(L_{\max})$ фиксированных значениях L_{\min} (рис. 3). Из рис. 3 видно, что для каждой из представленных на данном рисунке зависимостей существует единственное сочетание L_{\min}, L_{\max} , при которых график зависимости $H = H(L_{\max})$ пересекает прямую $H = 0.5$.

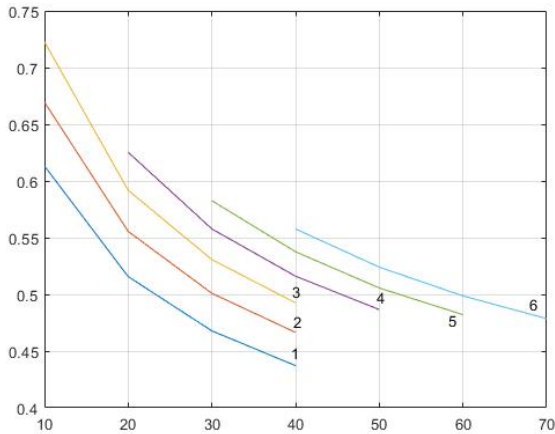


Рис. 3. Графики зависимостей $H = H(L_{\max})$: 1 – $L_{\min} = 3$; 2 – $L_{\min} = 4$; 3 – $L_{\min} = 5$; 4 – $L_{\min} = 6$

В связи с обнаруженной особенностью зависимости оценки показателя Херста H классического броуновского движения, полученной с помощью метода R/S -анализа, были вычислены пары значений L_{\min}, L_{\max} , при которых погрешность обсуждаемой оценки оказывается наименьшей. Рассмотрим расположение точек с координатами (L_{\min_k}, L_{\max_k}) , $k = \overline{1, 8}$, $L_{\min_1} < L_{\min_2} < \dots < L_{\min_8}$, на плоскости (L_{\min}, L_{\max}) (рис. 4).

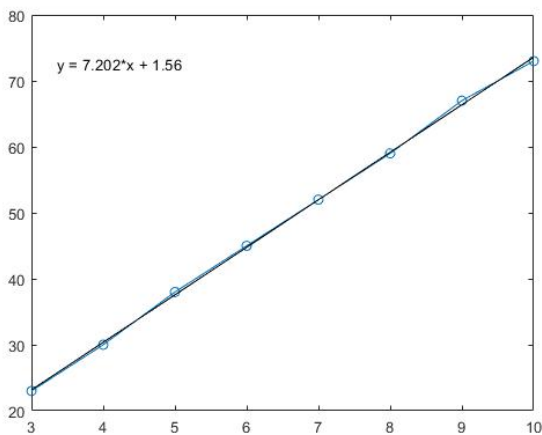


Рис. 4. Визуализация пар значений (L_{\min_k}, L_{\max_k}) , при которых погрешность оценки показателей Херста H классического броуновского движения оказывается наименьшей.

Из рис. 4 видно, что обсуждаемые пары значений расположены на прямой

$$L_{\max} = 7.202L_{\min} + 1.560.$$

Для нахождения возможного диапазона оценок показателей Херста классического броуновского движения при произвольном выборе пар значений (L_{\min}, L_{\max}) были вычислены зависимости $H = H(L_{\max})$ для $L_{\min} \in [3, 24]$, $L_{\max} \in [3; 510]$, представленные на рис. 5.

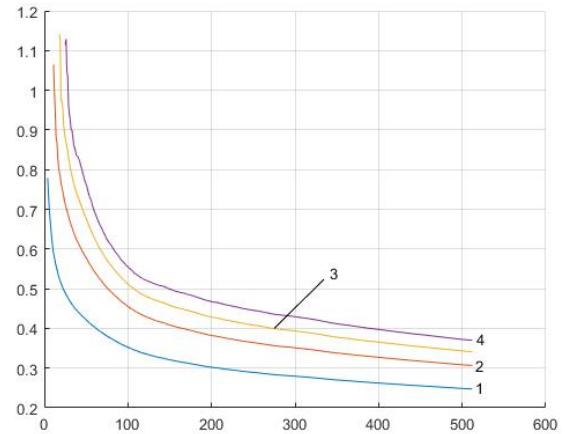


Рис. 5. Графики зависимостей $H = H(L_{\max})$ классического броуновского движения, $N = 2^{12}$: 1 – $L_{\min} = 3$, 2 – $L_{\min} = 10$; 3 – $L_{\min} = 17$; 4 – $L_{\min} = 24$

Из рис. 5 видно, что в зависимости от соотношения между значениями L_{\min}, L_{\max} оценки значения показателя Херста классического броуновского движения H варьируются в диапазоне $[0.25; 1.12]$.

Таким образом, точность оценки показателя Херста классического броуновского движения методом R/S -анализа оказывается критически зависимой от соотношения параметров данного метода L_{\min}, L_{\max}

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенного исследования подтверждают, априори, высказанную гипотезу о зависимости значений оценок показателя Херста классического броуновского движения H , вычисляемых с помощью R/S -анализа, от параметров данного метода L_{\min}, L_{\max} . При этом оказывается, что в зависимости от соотношения между параметрами данного метода оценки значения показателя Херста классического броуновского движения H варьируются в диапазоне $[0.25; 1.12]$.

Описанная особенность оценок показателя Херста классического броуновского движения H , вычисляемых с помощью R/S -анализа, позволяет выдвинуть гипотезу о том, что подобные свойства будут присущи аналогичным оценкам ФБД. В случае подтверждения высказанной гипотезы потребуются проведение критического анализа результатов работ, в которых авторы использовали оценки показателей Херста тех или иных временных рядов для описания состояния

систем, породивших соответствующих изучаемые ВР.

V. ПРИЛОЖЕНИЕ 1

листинг файла RSA_new.m

```
function [dTau, RS, Ni, h] =
RSA_new(x,Lmin,Lmax,dL,Flag)
```

функция, возвращающая значения логарифма длительностей временных интервалов, по которым были получены оценки R/S , оценки среднего значения R/S , полученные по временным интервалам длительностью $\text{Tau}(i)$, число интервалов, использованных для вычисления среднего значения нормированного размаха R/S при данном $\text{Tau}(i)$, значение показателя Херста, полученное по всем векторам dTau , RS

Входные переменные

Flag - переменная, принимающая значения: 0 - включение режима визуализации исходных данных ($\log_2(\text{mean}(\text{RS}))$), используемых для построения регрессии, диапазона равного $2 \cdot \text{std}(\log_2(\text{mean}(\text{RS})))$, результатов их линейной аппроксимации и доверительных 95% интервалов линейной регрессии. 1 - отключение режима визуализации

x - вектор, содержащий значения временного ряда

Lmin - минимальная длина временного окна, используемого для вычисления оценки показателя Херста

Lmax - максимальная длина временного окна, используемого для вычисления оценки показателя Херста

Выходные переменные

dTau - вектор, содержащий значения логарифма длительностей временных интервалов, по которым были получены оценки R/S

RS - вектор, содержащий оценки среднего значения R/S , полученные по временным интервалам длительностью $\text{Tau}(i)$,

$i = \text{Lmin} : \text{dL} : \text{Lmax}$ - номер временного интервала

Ni - вектор, содержащий число интервалов, использованных для вычисления среднего значения нормированного размаха R/S при данном $\text{Tau}(i)$

h - значение показателя Херста, полученное по всем векторам dTau , RS

$m = 1$; инициализация счетчика номера текущего окна

for $i = \text{Lmin} : \text{dL} : \text{Lmax}$

$k = 1$; инициализация счетчик членов временного ряд в

текущем временном окне

while $(k+1) * i \leq \text{length}(x)$

$\text{Tmp} = x((k-1) * i + 1 : k * i)$;

$\text{stdTmp} = \text{std}(\text{Tmp})$; вычисление в текущем временном окне математического ожидания анализируемого временного ряда

$\text{meanTmp} = \text{mean}(\text{Tmp})$;

$\text{cumsumTmp} = \text{cumsum}(\text{Tmp} - \text{meanTmp})$; вычисление в текущем временном окне накопленной суммы анализируемого временного ряда

$R = \max(\text{cumsumTmp}) - \min(\text{cumsumTmp})$; вычисление в текущем временном окне размаха анализируемого временного ряда

$\text{Rs}(k) = \text{R/S} / \text{dTmp}$; вычисление в текущем временном окне нормированного размаха R/S

$k = k + 1$;

end

$\text{dTau}(m) = \log_2(i)$; вычисление логарифма размера текущего окна

$\text{RS}(m) = \log_2(\text{mean}(\text{RS}))$; вычисление логарифма среднего значения

нормированного размаха R/S , вычисляемого по ансамблю средних значений на временных интервалах, длительностью i

$\text{StdLog}(m) = \text{std}(\log_2(\text{RS}))$;

$\text{Ni}(m) = k - 1$; фиксация числа интервалов, использованных для вычисления среднего значения нормированного размаха R/S

при данном $\text{Tau}(i)$

$m = m + 1$;

end

вычисление углового коэффициента прямой методом наименьших квадратов

$[p \ S] = \text{polyfit}(\text{dTau}, \text{RS}, 1)$;

$h = p(1)$;

if $\text{Flag} == 1$ визуализация исходных данных ($\log_2(\text{mean}(\text{RS}))$), используемых для построения регрессии, диапазона равного $2 \cdot \text{std}(\log_2(\text{mean}(\text{RS})))$, результатов их линейной аппроксимации и доверительные 95% интервалы линейной регрессии

$[\text{fit} \ \text{delta}] = \text{polyval}(p, \text{dTau}, S)$; визуализация зависимости $\log_2(\text{R/S}) = f(\log_2(\text{dTau}))$

$\text{plot}(\text{dTau}, \text{RS}, 'o')$;

hold on

$\text{errorbar}(\text{dTau}, \text{RS}, \text{StdLog}, 'o')$

$\text{plot}(\text{dTau}, \text{fit}, 'r')$

$\text{plot}(\text{dTau}, \text{fit} - 2 * \text{delta}, 'm--', \text{dTau}, \text{fit} + 2 * \text{delta}, 'm--')$

end

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] B.B. Mandelbront & J.W. Van Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noise and Applications // SIAM Review, Vol. 10, № 4, 1968. P. 422–437.
- [2] Колмогоров А.Н. Спираль Венера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук СССР, 1940. Т. 26, № 1, с. 115–118.
- [3] R. Crownover, Introduction to Fractals and Chaos, Jones & Barlett Publishers, 1995. 306 с.
- [4] H. E. Hurst, Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, Vol. 116, Issue 1, p. 770-799
- [5] E. Peters, Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility John Wiley & Sons, 1996. 288 с.
- [6] Зиненко А.В. R/S-анализ на фондовом рынке // Бизнес-информатика. 2012. № 3(21). С. 24–30.
- [7] Шелухин О.И. Самоподобие и фракталы: телекоммуникационные приложения, О.И. Шелухин, А.В. Осин, С.М. Смольский, М: Физматлит, 2008. 368 с.

Peculiarities of estimating the Hurst exponent of classical Brownian motion, using the R/S Analysis

S. Porshnev, E. Solomaha, O. Ponomareva

Abstract— The features of Hurst exponent H of the classical Brownian motion trajectory calculated by the R/S-analysis has been studied, where R is a range of a cumulative deviations of the chosen fragment of the trajectory within the time interval $[L_{\min}, L_{\max}]$ (from the mathematical aspect – time series (TS)), S is a mathematical expectation of the fragment of the analyzed TS. Due to the fact that while calculating the estimates of Hurst Exponent H of the analyzed TS using the R/S analysis, it is required to set up parameters values L_{\min}, L_{\max} , the assumption was made on the effect of these parameters on the estimate of Hurst Exponent H . During the confirmation of the suggested hypothesis it was found that the estimates of the Hurst exponent H coincided with the accuracy up to the calculations error with the original Hurst Exponent of the classical Brownian motion equal to 0.5, only for the particular pairs of values $L_{\min k}^*, L_{\max k}^*, k = 1, 2, \dots$. It is shown that on the plane (L_{\min}, L_{\max}) pairs of the values $L_{\min k}^*, L_{\max k}^*$ are located along the line $L_{\max} = 7.202L_{\min} + 1.560$. When the arbitrary choice of the R/S method parameters ensures $L_{\min} \neq L_{\min k}^*, L_{\max} \neq L_{\max k}^*$, Hurst exponent varies in the span [0.25; 1.12].

The observed characteristic feature of the estimates of Hurst Exponent H by the R/S analysis of the classical Brownian motion makes it possible to suggest similar features of the estimates of Hurst Exponent H by the R/S analysis of the Fractional Brownian motion, if the suggestion proves to be true, it will be necessary to conduct a critical analysis of the results of a great number of publications where the authors used an R/S method.

Key words— Hurst exponent, R/S Analysis, Brownian motion, fractal Brownian motion.

REFERENCES

[1]B.B. Mandelbront & J.W. Van Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noise and Applications // SIAM Review, Vol. 10, № 4, 1968. P. 422-437.

[2]Kolmogorov A.N. Spiral' Vinera i nekotorye drugie interesnye krivye v gil'bertovom prostranstve Doklady Akademii nauk SSSR, 1940. T. 26, № 1, c. 115-118. (in Russian)

[3]R. Crownover, Introduction to Fractals and Chaos, Jones & Barlett Publishers, 1995. 306 c.

[4]H. E. Hurst, Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, Vol. 116, Issue 1, p. 770-799

[5]E. Peters, Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility John Wiley & Sons, 1996. 288 c.

[6]Zinenko A.V. R/S-analiz na fondovom rynke / /Biznes-informatika, Zinenko A.V. R/S-analiz na fondovom rynke / /Biznes-informatika, 2012. № 3(21). C. 24 -30. (in Russian)

[7]SHeluhin O.I. Samopodobie i fraktaly: telekommunikacionnye prilozheniya, O.I. SHeluhin, A.V. Osin, S.M. Smol'skij, M: Fizmatlit, 2008. 368 c. (in Russian)