Вычислительный эксперимент по построению отказоустойчивых реализаций графов с числом вершин до 9

И.А.К. Камил

Аннотация – **Отказ критически важного элемента любого технического устройства или системы может привести к различным последствиям, таким как деградация характеристик системы либо выход её из строя. Для жизненно важных устройств необходимо предусмотреть возможность сохранить работоспособность после отказа одного или нескольких элементов системы, то есть такая система должна быть отказоустойчивой. Для анализа задачи полной отказоустойчивости в 1976 году J.P. Hayes предложил модель, основанную на графах. Позднее в 1993 и 1996 году J.P. Hayes совместно с F. Harary предложили две модели: для отказа элементов (node fault tolerance, NFT) и для отказа связей между элементами (edge fault tolerance, EFT). В данной работе будет рассматриваться только модель для исследования отказов элементов. С точки зрения теории графов построение системы, устойчивой к отказу k элементов, означает построение вершинного k-расширения для графа, соответствующего системе. Оптимальность требует, чтобы количество дополнительных элементов (вершин) и связей между ними (рёбер) было минимально возможным. Задача построения минимальных вершинных k-расширений является вычислительно сложной. В работе будут представлены результаты построения минимальных вершинных 1-расширений для 8- и 9-вершинных графов и минимальных вершинных 2-расширений для 7- и 8-вершинных графов. Также будут представлены результаты по расширениям для некоторых решёток и торов с числом вершин до 12.**

Ключевые слова – **отказоустойчивость, расширение графа, решётка, тор.**

I. Введение

Для создания устойчивых к отказам систем, способных сохранять свою работоспособность при единичном или множественных отказах, John P. Hayes в работе [1] предложил модель, основанную на графах (**F**ault **T**olerance). В данной модели отказ мог происходить у элемента системы, что в связанном с ней графе трактовалось как удаление вершины и инцидентных ей рёбер. Позднее вышла совместная работа John P. Hayes и Frank Harary [2], в которой эта модель получила новое название: **N**ode **F**ault **T**olerance – NFT. Переименование связано с введением в [3] новой модели отказоустойчивости, направленной на устранение отказа связей между элементами: **E**dge **F**ault **T**olerance – EFT. В работе [4] модели отказоустойчивости NFT и EFT были введены как вершинное и рёберное расширения графа. Данное название отражает процесс построения. Суть модели сводится к введению в граф избыточных элементов. Если из графа G^* можно удалить любые k вершин, и после этого в него будет вкладываться граф G, то G^* называется вершинным k-расширением (В-k-Р) графа G.

При построении отказоустойчивой системы важна задача минимизации её стоимости. Для этого вводится понятие минимальности. В-k-Р n-вершинного графа G называется минимальным (МВ-k-Р) если выполняются следующие условия:

1. количество вершин в В-k-Р равно $n + k$;
2. количество рёбер в В-k-Р минимально среди всех В-k-Р графа G с числом вершин $n + k$.

В 2000 году был проведён вычислительный эксперимент по построению всех МВ-1-Р для графов с числом вершин до 7 [5]. В данной работе результаты удалось улучшить: были получены и проанализированы минимальные вершинные расширения 8- и 9-вершиных неориентированных графов (далее для краткости будет использоваться термин «граф»). Для построения расширений графов были использованы алгоритмы, описанные в [6, 7]. Задача построения минимальных вершинных расширений является вычислительно сложной [8], поэтому необходимо использовать параллельные вычисления. Для обработки графов использовались вычислительные мощности кластера ПРЦ НИТ Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского [9].

II. Распределение количества дополнительных рёбер

В таблицах 1 и 2 представлены данные о количестве дополнительных рёбер в МВ-1-Р 8- и 9-вершинных графов. В столбце $ec(G)$ (edge cost) указано количество дополнительных рёбер в расширении. Видно, что количество дополнительных рёбер в МВ-1-Р не превосходит количества вершин в исходном графе.

Статья получена 15 июля 2020.

Камил Ихаб Абдулджаббар Камил, Саратовский Национальный Исследовательский Государственный Университета, Саратов, Россия; Министерство науки и технологий Ирака, Багдад, Ирак (e-mail: kamil.iehab@mail.ru).

Таблица 1 – Распределение количества дополнительных рёбер в МВ-1-Р 8-вершинных графов в зависимости от максимальной степени

$ec(G)$	Максимальная степень, Δ					
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	12					
3	12	14				
4	5	70	21			
5	6	117	220	9		
6	4	131	752	395	5	
7	2	42	957	2082	603	
8		4	216	2383	3235	1044

Причиной этого является существование тривиального вершинного k-расширения для произвольного графа G. Данное расширение можно построить путём выполнения операции соединения исходного графа с полным -вершинным графом ($G + K_k$). Количество рёбер в тривиальном расширении на $kn + \frac{k(k-1)}{2}$ больше, чем в исходном, что является верхней границей количества дополнительных рёбер в МВ-k-Р (n – количество вершин в исходном графе).

Таблица 2 – Распределение количества дополнительных рёбер в МВ-1-Р 9-вершинных графов в зависимости от максимальной степени

$ec(G)$	Максимальная степень, Δ						
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
2	16						
3	17	25					
4	9	139	46				
5	13	331	511	49			
6	4	354	2309	1082	35		
7	4	209	5522	8164	2106	5	
8	1	35	5205	29642	21353	3486	1
9	1	2	713	29837	90128	60964	12345

В таблицах 3 и 4 приведено распределение количества дополнительных рёбер в МВ-2-Р 7-вершинных и 8-вершинных графах.

Таблица 3 – Распределение количества дополнительных рёбер в МВ-2-Р 7-вершинных графов в зависимости от максимальной степени

$ec(G)$	Максимальная степень, Δ				
	2	**3**	**4**	**5**	**6**
2					
3					
4	1				
5	4				
6	1				
7	3	3			
8	2	11			
9	7	28	1		
10	4	31	17		
11	1	25	69		
12		14	101	1	
13	2	8	123	92	
14		1	41	191	1
15			8	94	155

Из таблиц видно, что для МВ-2-Р есть нижний предел количества дополнительных рёбер в расширении. В обоих случаях происходит увеличение нижней границы на 3 или на 2 с ростом максимальной степени вершины в графе. Для МВ-1-Р такой перепад равен 1, но для графов с чётным количеством вершин данное правило нарушается при максимальной степени Δ, равной уменьшенному на 1 количеству вершин: $\Delta = n - 1$.

Такие графы называются предполными. Количество дополнительных рёбер в предполных графах равно количеству вершин, за некоторым исключением [10]. В работе [11] были описаны графы, МВ-1-Р которых отличается на 1, 2 или 3 дополнительных ребра, то есть графы с $ec(G) \leq 3$.

Графы, у которых максимальная степень равна 0 и 1 в таблицах не представлены, так как их немного, и они не представляют большого интереса. Графы с Δ = 0 – это вполне несвязные графы O_n. Минимальным вершинным k-расширением такого графа очевидно будет граф O_{n+k}. Графы с Δ = 0 – это графы, которые могут быть построены объединением некоторого количества графов K_2 и K_1 (то есть изолированные вершины и пары вершин, соединённые ребром).

Таблица 4 – Распределение количества дополнительных рёбер в МВ-2-Р 8-вершинных графов в зависимости от максимальной степени

$ec(G)$	Максимальная степень, Δ					
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
4	1					
5	6					
6	2					
7	4	7				
8	5	23				
9	8	42	1			
10	5	61	24			
11	4	84	121			
12	4	69	295	1		
13	1	65	564	159		
14	1	19	625	715	2	
15		5	421	1686	277	
16		2	97	1752	1115	
17		1	18	556	2449	1044

III. Распределение количества расширений

У графа может быть несколько неизоморфных минимальных вершинных расширений. В таблице 5 указано, сколько графов имеет от 1 до 20 расширений.

Для каждого случая существуют графы и с большим количество минимальных вершинных расширений. Видно, что существует стремление к уменьшению количества графов при увеличении количества расширений. В таблице 6 указано максимальное количество расширений и среднее количество расширений для посчитанных графов в зависимости от МВ-1-Р и МВ-2-Р.

Таблица 5 – Количество расширений у графов

	МВ-1Р		МВ-2Р	
Кол-во расширений	8	9	7	8
1	4669	96270	457	3780
2	1903	44884	144	1405
3	1245	28465	83	917
4	931	19761	60	646
5	672	13987	45	548
6	490	10800	34	400
7	382	8454	35	366
8	310	6727	18	323
9	232	5256	15	268
10	187	4402	13	265
11	150	3530	12	232
12	133	3211	12	197
13	118	2730	13	159
14	97	2323	8	138
15	83	2068	15	145
16	58	1707	5	119
17	66	1466	6	118
18	66	1395	2	108
19	50	1210	8	102
20	40	1172	5	90

Таблица 6 – Статистика по расширениям

Тип расширения	Кол-во вершин в графе	Максимальное количество расширений	Среднее количество расширений
МВ-1-Р	8	177	4.86
	9	465	5.85
МВ-2-Р	7	114	5.42
	8	1460	13.77

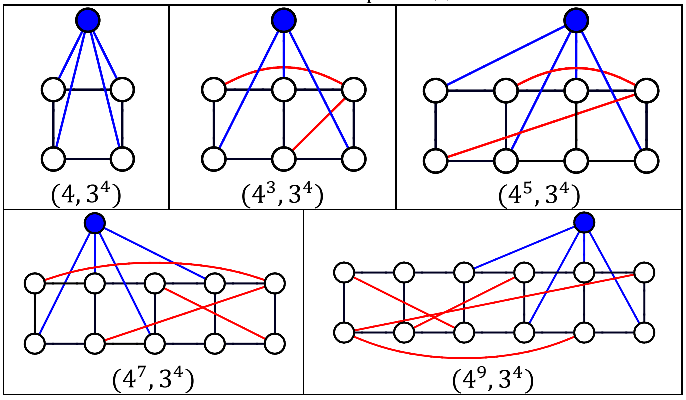
IV. Расширения распространённых видов графов

Напомним, что декартовым или прямым произведением двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется граф $G_1 \times G_2$ с множеством вершин $V_1 \times V_2$, в котором вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $u_1 = v_1$, а u_2 смежна с v_2, либо $u_2 = v_2$, а u_1 смежна с v_1.

n-мерной решёткой (mesh, lattice graph или grid graph) называется граф, являющийся декартовым произведением n цепей $Pm_1 \times \ldots Pm_n$. n-мерным тором называется граф, являющийся декартовым произведением n циклов $Cm_1 \times \ldots Cm_n$. Решётки и торы представляют большой интерес с точки зрения архитектуры компьютера [12]. В таблице 7 приведены минимальные вершинные 1-расширения двухмерных решёток размерности $2 \times N$ с количеством вершин до 12. На рисунках синим обозначены дополнительные вершины и рёбра, инцидентные ей, красным – дополнительные рёбра соединяющие исходные вершины графа. Чёрные рёбра и чёрно-белые вершины принадлежат исходному графу. Под рисунками написаны вектора степеней расширения. Например, $(4, 3^4)$ означает, что в графе 1 вершина степени 4 и 4 вершины степени 3.

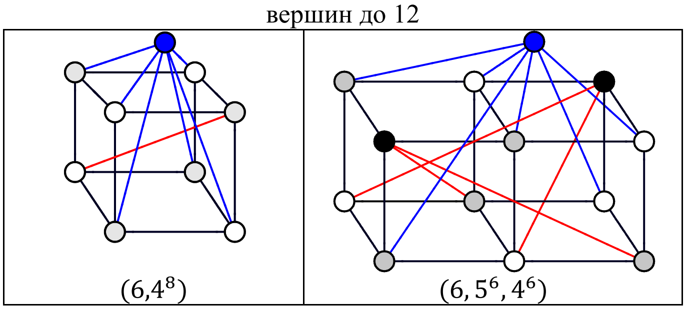
У обработанных решёток вида $2 \times N$ было найдено по одному МВ-1-Р, а вектор степеней $(4^{2N-3}, 3^4)$.

Таблица 7 – МВ-1-Р решёток размерности $2 \times N$ с количеством вершин до 12



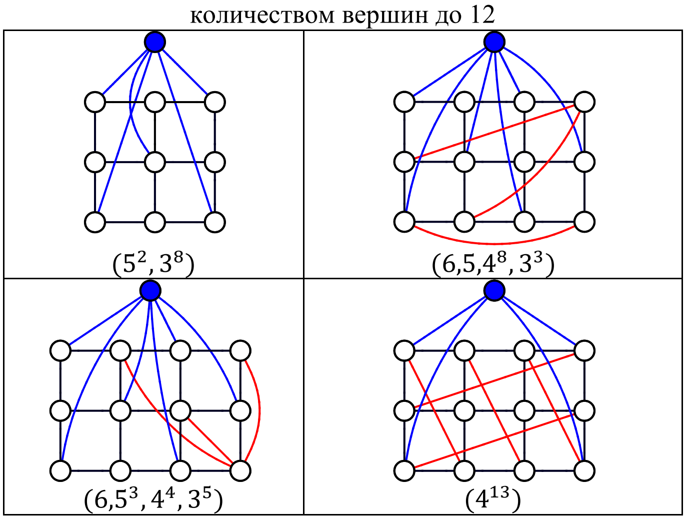
В таблице 8 показаны МВ-1-Р трёхмерных решёток с числом вершин, не превосходящим 12. Таких графов существует только два. У 8-вершинного графа МВ-1-Р может быть построена по схеме, представленной в [13]. У 12-вершинного МВ-1-Р отличается от В-1-Р, построенного по схеме из [13], одним ребром, соединяющим чёрные вершины.

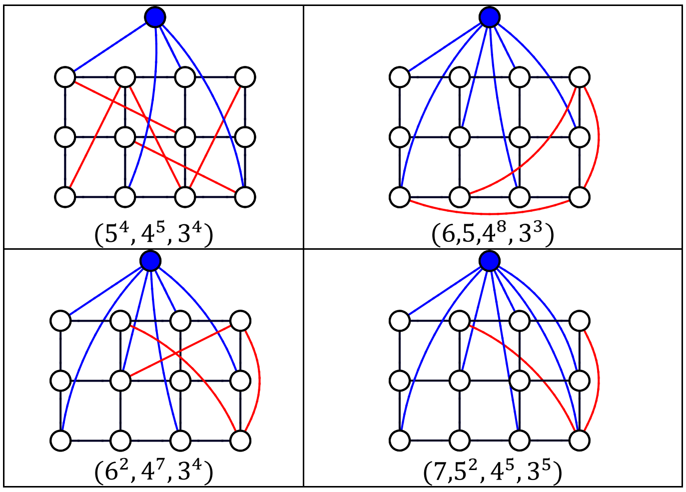
Таблица 8 – МВ-1-Р трёхмерных решёток с количеством вершин до 12



В таблице 9 показаны МВ-1-Р двухмерных решёток размерности $3 \times N$ с количеством вершин до 12. Таких графов всего 2. У решётки 3×3 существует одно МВ-1-Р, а вот у решёток 3×4 их уже 7. При этом только 2 из них имеют равные вектора степеней (но графы неизоморфны).

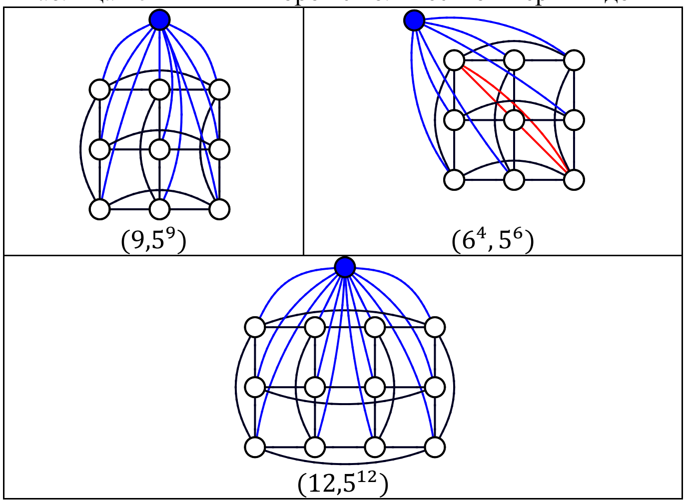
Таблица 9 – МВ-1-Р решёток размерности $3 \times N$ с количеством вершин до 12





В таблице 10 показаны МВ-1-Р торов с числом вершин до 12. Для всех обработанных торов тривиальное 1-расширение является и минимальным. Стоит отметить, что у тора 3×3 существует второе МВ-1-Р, отличное от тривиального.

Таблица 10 – МВ-1-Р торов с количеством вершин до 12



V. Заключение

В данной статье была приведена статистика по количеству дополнительных рёбер и количеству минимальных вершинных 1-расширений 8- и 9-вершинных графов и минимальных вершинных 2-расширений 7- и 8-вершинных графов. Данное исследование дополняет вычислительный эксперимент, проведённый ранее, в котором были получены данные по графам и их МВ-1-Р с количеством вершин не более 7.

Также были представлены МВ-1-Р двухмерных и трёхмерных решёток и двухмерных торов с количеством вершин не более 12. Было отмечено, что для тора тривиальное вершинное 1-расщрение является минимальным.

Библиография

[1] Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system / J. P. Hayes // IEEE Transactions on Computers, 1976. Vol. C-25, No 9. P. 875–884.

[2] Harary F., Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol.27. P.19-23.

[3] Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol.23. P. 135-142.

[4] Абросимов М.Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2012, 192 с.

[5] Абросимов М.Б., Камил И.А.К., Лобов А.А. Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. № 4. С. 479-486.

[6] Камил И.А.К., Лобов А.А., Абросимов М.Б. Построение минимальных вершинных расширений графа методом Рида-Фараджева // International Journal of Open Information Technologies. 2020. Т. 8. № 4. С. 54-58.

[7] Абросимов М.Б. Минимальные расширения 4-,5-,6- и 7-вершинных графов. Саратов гос. ун-т. - Саратов, 2000. – 26с.; Деп. в ВИНИТИ 06.09.2000, №2352-В00.

[8] Абросимов М.Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С.643–650.

[9] Официальный сайт Поволжского Регионального Центра Новых Информационных Технологий // URL:http://prcnit.sgu.ru

[10] Абросимов М.Б. Минимальные *k*-расширения предполных графов // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 6. С. 3-11.

[11] Абросимов М. Б. Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 111–120.

[12] Leighton F.T. Introduction to Parallel Algorithms and Architecture: Arrays,·Trees,·Hypercubes. San Mateo, Morgan Kaufmann, 1992, 852 c.

[13] Лобов А.А., Абросимов М.Б. О вершинном 1-расширении гиперкуба // Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Международной научной конференции. 2018. С. 249-251.

Computational experiment on constructing fault-tolerant graph implementations with up to 9 vertices

I.A.K. Kamil

Annotation – In many applications, failure of a critical element of technical device or system where computers are used, outages or malfunctions can be expensive or even disastrous and can lead to progressive collapse. It is necessary to provide the ability to tolerate faults by detecting failures and isolate defect modules so that the rest of the system can operate correctly. That is, such a system should be fault-tolerant. To study the problem of complete fault tolerance in 1976 J.P. Hayes proposed a graph-based model. Later in 1993 and 1996 J.P. Hayes together with F. Harary proposed two models: for node fault tolerance (NFT) and for edge fault tolerance (EFT). In this paper, we study only a model for element failures. The construction of a system resistant to the failure of *k* elements means the construction of a vertex *k*-extension for a graph corresponding to the system. Optimality requires that the number of additional elements (vertices) and the connections between them (edges) be as small as possible. The task of constructing minimal vertex *k*-extensions is computationally complex. This article will present the results of constructing graphs from vertices of small size to up to 9 vertices and minimal vertex 2-extensions for 7- and 8-vertex graphs. In addition, we present results on extensions of meshes and tori with up to 12 vertices.

Key words — fault tolerance, graph extension, mesh, torus.

REFERENCES

[1] Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system / J. P. Hayes // IEEE Transactions on Computers, 1976. Vol. C-25, No 9. P. 875–884.

[2] Harary F., Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol.27. P.19-23.

[3] Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol.23. P. 135-142.

[4] Abrosimov M.B. Grafovye modeli otkazoustoichivosti. Saratov : Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2012, 192 p. (in Russian)

[5] AbrosimovM.B., KamilI.A.K., LobovA.A. Postroenie vsekh neizomorfnykh minimal'nykh vershinnykh rasshirenii grafa metodom kanonicheskikh predstavitelei // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019. vol. 19, no. 4. pp. 479–486.

[6] Kamil I.A.K., Lobov A.A., Abrosimov M.B. Construction of minimum vertex extensions of a graph by the Read-Faradzhev method // International Journal of Open Information Technologies. 2020. Т. 8. № 4. С. 54-58.

[7] Abrosimov M.B. Minimal'nye rasshireniya 4-,5-,6- i 7-vershinnyh grafov. Saratov Univ. - Saratov, 2000. – 26c.; Dep. In VINITI 06.09.2000, №2352-B00. (in Russian)

[8] Abrosimov M.B. On the complexity of some problems related to graph extensions. Math. Notes, 2010, vol. 88, no. 5, pp. 619–625.

[9] Volga Regional Center for New Information Technologies. Available at: http://prcnit.sgu.ru

[10] Abrosimov M.B. Minimal'nye k-rasshireniya predpolnyh grafov. Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika. 2003, № 6, pp. 3-11. (in Russian)

[11] Abrosimov M.B. Harakterizaciya grafov s zadannym chislom dopolnitel'nyh reber minimal'nogo vershinnogo 1-rasshireniya. Prikladnaya diskretnaya matematika, 2012, № 1, pp. 111–120. (in Russian)

[12] Leighton F.T. Introduction to Parallel Algorithms and Architecture: Arrays,·Trees,·Hypercubes. San Mateo, Morgan Kaufmann, 1992, 852 c.

[13] Lobov A.A., Abrosimov M.B. O vershinnom 1-rasshirenii giperkuba. Komp'yuternye nauki i informacionnye tekhnologii. Materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, 2018, pp. 249-251. (in Russian)