

Рёберно-отказоустойчивые расширения 8-, 9- и 10-вершинных графов

Судани Х.Х.К.

Аннотация – Надёжность технических систем является очень важным параметром. Одним из способов повышения надёжности является построение отказоустойчивой реализации системы. В некоторых системах часто случаются отказы связей между её элементами. В пример можно привести повреждение линии связи в вычислительной сети или точки соединения провода и устройства (гнезда или разъёма), что приводит к невозможности использовать провод и передавать по нему данные или электричество. Теоретическую модель на основе графов для исследования такого рода отказов – рёберную отказоустойчивость (edge fault tolerance), – предложили в 1993 году совместно John P. Hayes и Frank Nagary. На языке теории графов построить для системы отказоустойчивую реализацию означает для соответствующего графа найти расширение. Оптимальность реализации означает, что в графе должно быть минимально возможное число вершин и рёбер среди всех соответствующих расширений. Задача построения минимального расширения является вычислительно сложной. В данной статье описывается вычислительный эксперимент по построению минимальных рёберных расширений 8-, 9- и 10-вершинных графов и его результаты.

Ключевые слова — отказоустойчивость, рёберное расширение графа.

I. ВВЕДЕНИЕ

В 1976 г. John P. Hayes предложил модель исследования отказоустойчивости систем на основе графов [1]. В этой работе рассматривались отказы элементов. Совместно с Frank Nagary позднее предложенная модель была распространена на отказы связей между элементами [2]. На языке теории графов задачи построения соответствующих отказоустойчивых реализаций можно рассматривать как задачи построения соответствующих расширений [3].

Неориентированным графом (далее просто графом) называется пара $G = (V, a)$, где V – это множество вершин, a – множество рёбер [3, 4]. Ребром называется неупорядоченная пара различных вершин. Если между вершинами u и v есть ребро, то эти вершины называются смежными, а ребро, соединяющее их обозначается как $\{u, v\}$. Степенью вершины v

называется число $d(v)$, равное количеству смежных v вершин.

Граф G^* называется рёберным k -расширением (P - k - P)-вершинного графа G , если G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любого набора из k рёбер. Если количество вершин в G^* равно n , и количество рёбер в нём минимально среди всех k -вершинных P - k - P графа G , то G^* является минимальным рёберным k -расширением (MP - k - P) графа G . Мы рассматриваем простые графы, поэтому минимальные рёберные k -расширения могут быть не у всех графов. Например, полный граф K_n не имеет MP - k - P ни при каких натуральных значениях k .

Ранее [5] были получены результаты исследования минимальных расширений графов с количеством вершин с 4 по 7 включительно. В данной статье будут описаны минимальные рёберные расширения 8, 9 и 10-вершинных графов.

II. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Используя алгоритмы, описанные в работе [6], в том числе алгоритмы, основанные на методе исключения изоморфных копий [7, 8], были построены все MP - k - P каждого из 8- и 9-вершинных графов для k , равного 1, 2, 3 и 4. Также были построены все MP -1- P каждого 10-вершинного графа.

Вычисления проводились на кластере ПРЦ НИТ Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского [9], в вычислениях было задействовано 40 ядер. Обработка 9-вершинных графов для разных значений параметра k происходила не более шести часов. Для обработки 10-вершинных графов было затрачено около двух с половиной месяцев.

На основе полученных данных была собрана статистика по количеству минимальных рёберных k -расширений, обозначенному как $en(G, k)$, и числу дополнительных рёбер в них, обозначенному как $ec(G, k)$, которая будет приведена в статье далее.

III. КОЛИЧЕСТВО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ РЕБЕР

В таблице 1 представлено количество дополнительных рёбер у графов с 4 вершинами. В первой колонке указано количество дополнительных рёбер, в следующих четырёх колонках указано количество графов, MP - k - P которых имеют соответствующее количество дополнительных рёбер. В последней строке со значением «Нет» в первом столбце указано количество графов, у которых нет расширений.

Статья получена 13 июля 2020.

Х. Х. К. Судани, аспирант ФГБОУ ВО Саратовский Национальный Исследовательский Государственный Университет, Саратов, Россия; Министерство науки и технологий Ирака, Багдад, Ирак (e-mail: hayder.1977@mail.ru).

Таблица 1 – Количество дополнительных рёбер в минимальных расширениях 8-вершинных графов

$ec(G, k)$	Количество графов			
	MP-1-P	MP-2-P	MP-3-P	MP-4-P
0	1	1	1	1
1	34	0	0	0
2	230	6	0	0
3	1297	24	4	0
4	4831	95	6	3
5	4708	261	19	2
6	881	1252	77	4
7	224	4648	266	14
8	83	4057	1138	71
9	35	1269	3205	218
10	12	412	3661	801
11	6	167	2027	2132
12	2	80	838	2796
13	1	36	344	2097
14	0	14	154	1158
15	0	7	74	506
16	0	3	32	182
17	0	1	13	58
18	0	1	6	16
19	0	0	2	4
20	0	0	1	1
21	0	0	1	0
Нет	1	12	477	2282

Рассмотрим для примера ячейку в таблице 1, которая стоит в столбце с заголовком «MP-2-P» и строке со значением «9» в первом столбце. В выбранной ячейке стоит значение «1269». Это означает, что у 1269 графов количество дополнительных рёбер в MP-2-P равно 9.

На рисунке 1 изображён график, соответствующий таблице 1. Видно, что существуют заметно выделенные два подряд идущих участка: первый – увеличение количества графов с ростом количества дополнительных рёбер в расширении, а второй – уменьшение. Это происходит при любом значении k .

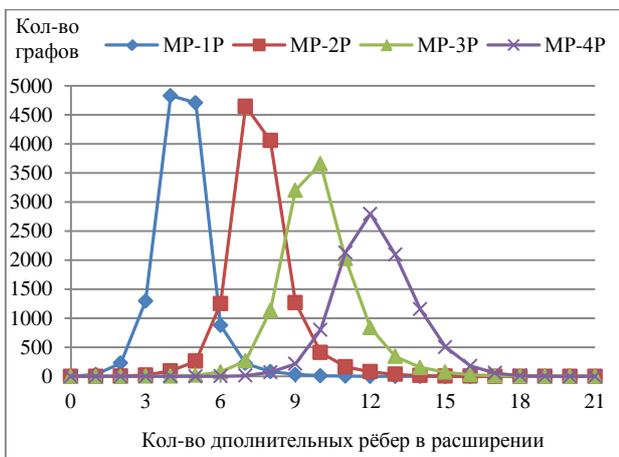


Рисунок 1 – Количества 8-вершинных графов с заданным количеством дополнительных рёбер в расширении

В таблице 2 аналогичные данные указаны для 9-вершинных графов.

Таблица 2 – Количество дополнительных рёбер в минимальных расширениях 9-вершинных графов

$ec(G, k)$	Количество графов			
	MP-1-P	MP-2-P	MP-3-P	MP-4-P
0	1	1	1	1
1	45	0	0	0
2	445	7	0	0
3	3666	33	5	0
4	22847	150	8	4
5	104802	518	26	2
6	124293	2720	108	7
7	15402	13267	402	21
8	2187	75659	1836	85
9	595	127463	8263	360
10	231	38699	34939	1725
11	88	9936	95933	6495
12	38	3561	69698	23781
13	17	1528	33351	62402
14	6	660	15625	68743
15	2	272	6970	44254
16	2	112	3012	27483
17	1	41	1344	16760
18	0	17	623	9282
19	0	6	289	4466
20	0	3	134	1827
21	0	1	63	647
22	0	1	25	214
23	0	0	11	66
24	0	0	5	22
25	0	0	2	8
26	0	0	1	3
27	0	0	1	1
28	0	0	0	1
Нет	1	13	1993	6008

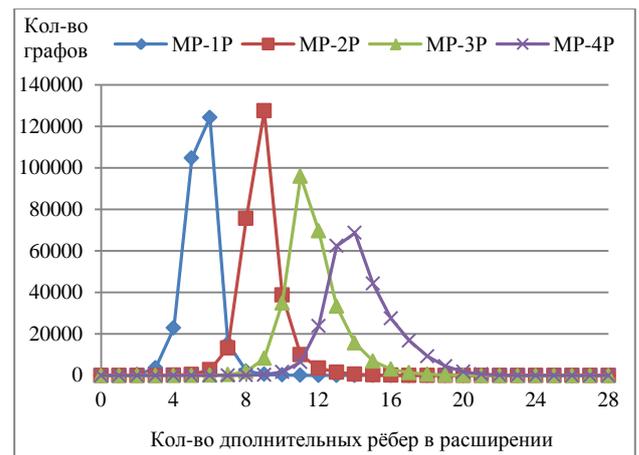


Рисунок 2 – Количество 9-вершинных графов с заданным количеством дополнительных рёбер в расширении

Для MP-1-P 10-вершинных графов аналогичные данные приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Количество дополнительных рёбер в минимальных расширениях 10-вершинных графов

$ec(G, k)$	MP-1-P	$ec(G, k)$	MP-1-P
0	1	11	3256
1	63	12	1182
2	799	13	516
3	8630	14	234
4	75526	15	111
5	554875	16	50
6	2995525	17	23
7	7060790	18	9
8	1216416	19	5
9	74068	20	2
10	13085	21	1
		Нет	1

IV. КОЛИЧЕСТВО РАСШИРЕНИЙ

Было посчитано количество MP- k -P для каждого графа. Полученные результаты по 8-вершинным и 9-вершинным графам указаны в таблицах 4 и 5 соответственно.

Различных значений достаточно много и их невозможно указать в рамках данной статьи, поэтому некоторые значения были сгруппированы по диапазонам. В этом случае в столбце $en(G, k)$ написано $a-b$, где a, b – числа, означающие максимальное и минимальное количество графов, у которых количество расширений равно одному значению в указанном в первом столбце диапазоне, $a > b$. Если $a = b$, то пишется просто число a . Числа a и b .

Таблица 4 – Количество 8-вершинных графов с заданным количеством расширений

$en(G, k)$	Количество графов			
	MP-1-P	MP-2-P	MP-3-P	MP-4-P
0	1	12	477	2282
1	4752	5606	7836	8406
2	2165	2105	1948	851
3	1233	1228	563	185
4	810	839	432	356
5	563	570	204	71
6	434	307	135	42
7	350	242	180	28
8	269	184	67	28
9	250	141	69	11
10	201	144	66	4
11-30	184-12	137-4	59-1	9-0
31-60	18-0	14-1	5-0	4-0
61-96	2-0	4-0	1-0	1-0
97-108	1-0	2-0	0	0
109-159	0	1-0	1-0	0
160-166	0	1-0	0	0

Приведём примеры:

1. В ячейке таблицы 4 на пересечении строки со значением «7» в первом столбце и столбца «MP-2-P» стоит значение «242». Это означает, что у 242 8-вершинных графов количество MP-2-P равно 7.

2. В таблице 5 на пересечении строки «527-1394» и столбца «MP-3-P» стоит значение «2-0». Это означает, что существует не более 2 и не менее 0 графов, у которых количество MP-3-P находится в диапазоне от 527 до 1394.

Таблица 5 – Количество 9-вершинных графов с заданным количеством расширений

$en(G)$	Количество графов			
	MP-1-P	MP-2-P	MP-3-P	MP-4-P
0	1	13	1993	6008
1	85988	80744	106905	178373
2	38269	41538	71809	33925
3	23228	26797	20668	16599
4	16115	15890	11366	11711
5	12152	12167	8462	5883
6	9583	9050	7337	2913
7	7833	7476	5783	4110
8	6596	6232	4303	1728
9	5648	5176	3700	1636
10	5085	4697	2993	1306
11	4539	4244	2466	1060
12	4142	3808	2087	1046
13	3744	3327	1756	940
14	3313	3054	1458	707
15	3176	2745	1304	534
16-50	2878-269	2407-325	1194-137	438-33
51-100	260-27	347-71	152-21	42-2
101-200	40-0	96-9	32-2	9-0
201-300	4-0	21-1	11-0	3-0
301-526	2-0	7-0	5-0	2-0
527-1394	0	4-0	2-0	1-0
1395-2359	0	1-0	0	1-0
2360-3195	0	1-0	0	0

Для MP-1-P 10-вершинных графов аналогичные данные приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Количество 10-вершинных графов с заданным количеством расширений

$en(G, 1)$	MP-1-P	$en(G, 1)$	MP-1-P
0	1	18	120497
1	2936566	19	111779
2	1430218	20	102359
3	949397	21-50	94555-17460
4	724474	51-100	16782-3494
5	583184	101-200	3427-841
6	486326	201-300	883-368
7	413612	301-400	396-149
8	357589	401-500	171-49
9	311638	501-650	73-11
10	274514	651-800	21-0
11	243259	801-1000	7-0
12	217605	1001-1200	2-0
13	194415	1201-1400	1-0
14	175749	1401-1600	1-0
15	159244	1601-1652	0
16	144386	1653	1
17	132070		

Ниже, в таблице 7, показаны графы с наибольшим количеством минимальных рёберных k -расширений и

по одному примеру $MP-k-P$ к нему. Изображения графов приведены без пересечений, если это возможно.

Таблица 7 – Графы с наибольшим количеством минимальных рёберных расширений

MP-1-P	MP-2-P	MP-3-P
MP-4-P	MP-1-P	MP-2-P
MP-3-P	MP-4-P	MP-1-P

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Transactions on Computers. 1976. Vol. C-25. № 9. P. 875–884. DOI: 10.1109/TC.1976.1674712
- [2] Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol.23. P.135–142. DOI: 10.1002/net.3230230207
- [3] Абросимов, М.Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2012, 192 с.
- [4] Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука 1997.
- [5] Абросимов М.Б. Минимальные расширения 4-,5-,6- и 7-вершинных графов. Саратов гос. ун-т. - Саратов, 2000. – 26с.; Деп. в ВИНТИ 06.09.2000, №2352-В00.
- [6] Абросимов М. Б., Судани Х. Х. К., Лобов А. А. Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 105–115. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115>
- [7] Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs // Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 51. P. 25-38. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0118(199610)23:2<139::AID-JGT5>3.0.CO;2-U
- [8] Камил И. А. К., Судани Х. Х. К., Лобов А. А., Абросимов М. Б. Построение всех неизоморфных суперграфов без проверки на изоморфизм // Прикладная дискретная математика. 2020. № 48. 82–92. DOI: 10.17223/20710410/48/7
- [9] Официальный сайт Поволжского Регионального Центра Новых Информационных Технологий // URL:<http://prcnit.sgu.ru>

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье были исследованы минимальные рёберные 1-, 2-, 3- и 4-расширения 8- и 9-вершинных графов, а также минимальные рёберные 1-расширения 10-вершинных графов. Для них было приведено распределение графов по количеству дополнительных рёбер и количеству расширений. В статье приведены изображения графов, имеющих наибольшее количество расширений и пример расширения.

Edge fault tolerant extensions of graphs with 8, 9 and 10 vertices

Sudani H. H. K

Annotation – Reliability is one of the most important issues in design of technical systems. One way to increase reliability is to build a fault tolerant system implementation. In some systems, link failures between its elements occur. An example is the damage to a communication line in a computer network or the connection point of a wire and a device (socket or connector), which makes it impossible to use a wire and transmit data or electricity through it. In 1993 Frank Harary and John P. Hayes proposed a theoretical graph model for investigating the fault tolerance of discrete systems.

To build a fault tolerant implementation for a system means to find an extension for the corresponding graph. Optimization of the implementation means that the graph must have the minimum possible number of vertices and edges among all the corresponding extensions. The problem of constructing a minimal extension is computationally complex. This article describes a computational experiment on constructing minimal edge extensions of 8-, 9-, and 10-vertex graphs and its results.

Key words — fault tolerance, edge graph extension.

REFERENCES

- [1] Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Transactions on Computers. 1976. Vol. C-25. № 9. P. 875–884. DOI: 10.1109/TC.1976.1674712
- [2] Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol.23. P.135–142. DOI: 10.1002/net.3230230207
- [3] Abrosimov M.B. Grafovye modeli otkazoustoichivosti. Saratov : Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2012, 192 p. (in Russian)
- [4] Bogomolov A.M., Salii V.N. Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem. M.: Nauka 1997. (in Russian)
- [5] Abrosimov M.B. Minimal'nye rasshireniya 4-,5-,6- i 7-vershinnykh grafov. Saratov Univ. - Saratov, 2000. – 26c.; Dep. In VINITI 06.09.2000, №2352-B00. (in Russian)
- [6] Abrosimov M. B., Sudani H. H. K., Lobov A. A. Construction of All Minimal Edge Extensions of the Graph with Isomorphism Rejection. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 105–115 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115>
- [7] Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs // Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 51. P. 25-38. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0118(199610)23:2<139::AID-JGT5>3.0.CO;2-U
- [8] Kamil I.A.K., Sudani H.H.K., Lobov A.A., Abrosimov M.B. Constructing all nonisomorphic supergraphs with isomorphism rejection // Prikladnaya Diskretnaya Matematika. 2020. № 48. 82–92. DOI: 10.17223/20710410/48/7
- [9] Volga Regional Center for New Information Technologies. Available at: <http://prcnit.sgu.ru>