Об одной задаче, возникающей при применении метода повторного квантования к линейным дифференциальным уравнениям с голоморфными коэффициентами

М. В. Коровина, В.Ю. Смирнов

***Аннотация* — Целью статьи является исследование асимптотик решений вырожденных эллиптических уравнений. Технический аппарат, который применяется для интерпретации полученных асимптотик, называется ресургентным анализом. Его основанием является интегральное преобразование Лапласа-Бореля. Обратное преобразование Лапласа-Бореля дает метод регулярного суммирования рядов. В этой статье мы решаем проблему построения асимптотики обратного преобразования Лапласа-Бореля одной функции экспоненциального роста. Это преобразование необходимо для построения асимптотик решений дифференциальных уравнений с вырождением в коэффициентах методом повторного квантования. Этот метод используется для изучения асимптотик решений дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами. В статье приводится пример использования этого метода для одного уравнения 4-го порядка. С использованием метода повторного квантования и обратного преобразования функции экспоненциального типа, полученного в этой статье, строятся асимптотики решения этого уравнения.**

***Ключевые слова* — дифференциальные уравнения с особенностями, особые точки, вырождения, преобразование Лапласа-Бореля, ресургентные функции, основной символ оператора, асимптотическое разложение.**

I. Введение

Работа является продолжением исследований, касающихся построений асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами для случая, когда коэффициенты при старших производных вырождаются. Для обыкновенных дифференциальных уравнений эта классическая задача хорошо изучена в случае, когда точка вырождения является регулярной особой точкой, например, в работах Кондратьева [1], [2]. В этих работах показано, что в случае регулярной особой точки асимптотики решений являются конормальными. Однако, в том случае, когда особая точка является иррегулярной, задача становится значительно более сложной и до настоящего времени окончательно не решена. Бесконечно удаленная точка также является примером иррегулярной особенности.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с голоморфными коэффициентами могут быть представлены в виде

$$H\left(r,-\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = f, \tag{1}$$

где

$$H(r,p)=\sum_{i=0}^{m}a_i(r)p^i, \tag{2}$$

здесь через $a_i(r)$ обозначены голоморфные функции, через k обозначено неотрицательное целое число, которое называется порядком вырождения уравнения (1). В работе [3] найден минимальный порядок вырождения и коэффициенты этого уравнения.

Если в представлении уравнений (1) минимальное k равно нулю, то такое вырождение называется коническим, это случай регулярной особой точки. Асимптотика решения уравнения (1) в некоторой окрестности нуля является конормальной, а именно имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m}r^{\sigma_j}\ln^j r\sum_{i=0}^{\infty}a_i^j r^i .$$

Здесь a_i^j - некоторые числа, $\sum_{i=0}^{\infty}a_i^j r^i$ - сходящийся ряд. В случае, когда минимальное $k>0$, вырождение называется вырождением типа клюва порядка k+1. Это случай иррегулярной особенности. Рассмотрению частных случаях этой задачи посвящены главы в таких классических книгах, как [4], [5].

К примеру, в работе [4] строятся асимптотики уравнения вида

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2u(x)+a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)u(x)+a_0(x)u(x)=0 \tag{3}$$

в окрестности бесконечности, считая, что коэффициенты $a_i(x)$ голоморфны в некоторой ее

Статья получена 5 июля 2018.

М. В. Коровина, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ (e-mail:betelgeuser@yandex.ru).

В. Ю. Смирнов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, РФ (e-mail: vl-smirnov@mail.ru).

окрестности. Эта задача, путем замены $r=\frac{1}{x}$ сводится к уравнению с вырождением типа клюва второго порядка в нуле, которая является частным случаем задач, рассматриваемых в этой статье.

В книге [4] так же, как и в работах [5], [6] построены асимптотические разложения решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, они были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся ряды, однако вопрос об интерпретации полученных расходящихся рядов был оставлен открытым, иными словами метод суммирования этих расходящихся рядов отсутствует. Такие асимптотики в дальнейшем получили названия ВКБ асимптотик. Это название появилось при решении некоторых задач квантовой механики, где были получены асимптотические разложения такого типа.

В конце 80-х годов прошлого века был получен аппарат пригодный для суммирования подобных рядов, основанный на преобразовании Лапласа-Бореля и понятии ресургентной функции, впервые введенном французским математиком Ж. Экалем [7].

В работах [8], [9] была доказана теорема о ресургентности решений обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождением типа клюва, а тем самым и для уравнений с голоморфными коэффициентами, при условии ресургентности правой части.

Благодаря этому результату в работах [8], [10] были построены регулярные асимптотики решений для случая, когда корни старшего символа $H_0(p)=H(0,p)$ имеют первый порядок. В этом случае асимптотики решений, имеют вид

$$u=\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i/r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k, \tag{4}$$

где α_i, $i=1,...,n$ - корни полинома $H_0(p)$ и σ_j и a_i^k – некоторые комплексные числа.

Однако методы, которые использовались для построения асимптотик решений в случае, когда основной символ имел простые корни, оказались неприменимыми в случае кратных корней, кроме случая уравнений второго порядка. В работах [11], [12] вопрос о построении асимптотик решений для уравнения второго порядка с произвольными голоморфными коэффициентами решен. Также в этой работе решена задача о построении асимптотик решений для уравнения Лапласа на многообразии с особенностью типа клюва.

Для решения проблемы кратных корней в последние годы был создан метод повторного квантования [13]. Этот метод применяется в том случае, когда интегро-дифференциальное уравнение в двойственном пространстве не решается методом последовательных приближений и сводится к уравнению с вырождениями типа клюва. В этом случае доказывается теорема о бесконечной продолжимости решения (для обыкновенных дифференциальных уравнений это доказано) и далее еще раз применяется преобразование Лапласа-Бореля и для полученного уравнения строятся асимптотики, которые позволяют найти асимптотики исходного уравнения. С помощью этого метода в настоящее время решен ряд задач для уравнений с вырождениями в случае кратных корней.

Иными словами, суть метода повторного квантования состоит в том, что преобразование Лапласа-Бореля делается два раза. То есть, сдвинув корень p_j с помощью замены

$$u(r)=e^{\frac{p_j}{r}} u_j(r)$$

в точку ноль, делается преобразование Лапласа-Бореля и получается интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $\tilde{u}_j(p)$, которая будет иметь особенность в нуле. Для того чтобы найти асимптотику этой функции в нуле делается преобразование Лапласа-Бореля второй раз. При этом мы получаем интегральное уравнение относительно функции $\hat{u}_j(q)$, которая является преобразованием Лапласа-Бореля функции $\tilde{u}_j(p)$. Для полученного уравнения, с помощью метода последовательных приближений строится асимптотика его решения в окрестности корней главного символа. Найдя асимптотику функции $\hat{u}_j(q)$, и затем, сделав обратное преобразование Лапласа-Бореля, строится асимптотика функции $\tilde{u}_j(p)$ в окрестности нуля. Эта асимптотика может быть ВКБ-асимптотикой или иметь более общий вид и содержать экспоненты с дробными степенями, поэтому возникает необходимость вычисления обратного преобразования Лапласа-Бореля от функций вида $e^{\frac{\alpha}{p^{\frac{n}{k}}}} g(p)$, где $n,k\in N$, $\alpha\in R.$ Проблеме построения асимптотики этого преобразования и посвящена данная статья.

II. Определение преобразования Лапласа-Бореля и его свойства

Дадим определения некоторых понятий ресургентного анализа, которые понадобятся нам ниже.

Обозначим через $S_{R,\varepsilon}$ сектор $S_{R,\varepsilon}=\{r|-\varepsilon<\arg r<\varepsilon,|r|<R\}$. Будем говорить, что функция f аналитическая на $S_{R,\varepsilon}$ имеет не более чем k-экспоненциальный рост, если существуют такие неотрицательные константы C и α, что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$|f|<Ce^{a\frac{1}{|r|^k}}.$$

Через $E_k(S_{R,\varepsilon})$ обозначим пространство функций голоморфных в области $S_{R,\varepsilon}$, которые k-экспоненциально растут в нуле.

Основным техническим средством для построения теории ресургентных функций является преобразование Лапласа-Бореля. В монографии [14] описано определение и свойства этого преобразования в классе гиперфункций k-экспоненциального роста при $k=1$.

Обозначим через $E(\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon})$ пространство голоморфных функций экспоненциального роста в области $\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon} = \left\{ p \middle| -\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg p < \frac{\pi}{2} + \varepsilon, |p| > R \right\}$, а через $E(C)$ будет обозначаться пространство целых функций экспоненциального роста.

k-преобразованием Лапласа-Бореля функции $f(r) \in E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется отображение $B_k : E_k(S_{R,\varepsilon}) \to$ E($\tilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$)/E(C) , такое что

$$B_k f = \int_0^{r_0} e^{-p/r^k} f(r) \frac{dr}{r^{k+1}} .$$

Обратное k-преобразование Лапласа-Бореля определяется формулой

$$B_k^{-1} \tilde{f} = \frac{k}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} e^{p/r^k} \tilde{f}(p) dp .$$

Контур $\tilde{\gamma}$ изображен на рисунке 1 в работе [8]. Заметим, что для k-преобразования Лапласа-Бореля верны формулы

$$B_k \circ \left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r) = p B_k f$$
$$\frac{\partial}{\partial p} \circ B_k f = -B_k \left(\frac{1}{r^k} f(r) \right) .$$

III. Основной результат

В этом параграфе мы найдем обратное преобразование Лапласа- Бореля от функции $e^{-\frac{\alpha}{p^{\frac{k}{n}}}} g(p)$.

ТЕОРЕМА. *Асимптотика функции* $B^{-1} e^{-\frac{\alpha}{p^{\frac{k}{n}}}} g(p)$ *в окрестности нуля имеет вид*

$$\sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{n+k}}} \right) r^{\frac{\sigma_j}{n+k}} \sum_l c_l^j r^{\frac{l}{n+k}} \tag{5}$$

Здесь $\alpha_{n-1}^j, j = 1,\dots,k+n$ *корни полинома* $p^{n+k} + \left(\frac{n+k}{k} \right)^{n+k} (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha k}{n} \right)^n$, *а* коэффициенты α_i^j при $i < n-1$, c_i^j, *- некоторые константы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}
&\left(-r^2 \frac{d}{dr} \right)^{n+k} u + c_{n-1} r \left(-r^2 \frac{d}{dr} \right)^{k+n-1} u + \\
&+ c_{n-2} r^2 \left(-r^2 \frac{d}{dr} \right)^{k+n-2} + \\
&+ \dots + c_1 r^{n-1} \left(-r^2 \frac{d}{dr} \right)^{k+1} u + \\
&+ c r^n u + c_0 r^n \left(-r^2 \frac{d}{dr} \right)^k u = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

здесь через $c_i, i = 0,\dots,n-1$ и c обозначены некоторые константы . Сделаем преобразование Бореля

$$\begin{aligned}
&p^{n+k} \tilde{u} + c_0 (-1)^n \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^k \tilde{u}(p_1) dp_1 \dots dp_n + \\
&+ c_1 (-1)^{n-1} \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^{k+1} \tilde{u}(p_1) dp_1 \dots dp_{n-1} + \\
&+ c_2 (-1)^{n-2} \int_1^p \int_1^{p_2} p_1^{k+2} \tilde{u}(p_1) dp_1 dp_2 + \dots + \\
&+ c_{n-1} (-1) \int_1^p p_1^{k+n-1} \tilde{u}(p_1) dp_1 + \\
&+ c (-1)^n \int_1^p \dots \int_1^{p_2} \tilde{u}(p_1) dp_1 \dots dp_n = f(p).
\end{aligned}$$

Через $f(p)$ обозначена произвольная голоморфная функция. Продифференцируем n раз

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dp} \right)^n p^{n+k} u + c_0 (-1)^n p^k u + c_1 (-1)^{n-1} \left(\frac{d}{dp} \right) p^{k+1} u + \\
&+ c_2 (-1)^{n-2} \left(\frac{d}{dp} \right)^2 p^{k+2} u + \dots + \\
&+ c_{n-1} (-1) \left(\frac{d}{dp} \right)^{n-1} p^{k+n-1} u + (-1)^n c u = f(p).
\end{aligned} \tag{7}$$

Покажем, что можно выбрать константы $c, c_i, i = 0,\dots,n-1$ так, чтобы функция $\tilde{u}(p) = p^\sigma e^{-\frac{\alpha}{p^{\frac{k}{n}}}}$ являлась решением уравнения (7), для этого подставим эту функцию в уравнение.

Тогда получим уравнение относительно констант $c, c_i, i = 0,\dots,n-1$

$$\left(\alpha_0^n p^{\sigma+k} + \alpha_1^n p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \alpha_2^n p^{\sigma+k-\frac{2k}{n}} + \alpha_3^n p^{\sigma+k-\frac{3k}{n}} + \ldots + \alpha_n^n p^{\sigma}\right) +$$
$$+ c_{n-1}\left(\alpha_0^{n-1} p^{\sigma+k} + \alpha_1^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \alpha_2^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{2k}{n}} + \alpha_3^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{3k}{n}} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1} p^{\sigma+k-\frac{(n-1)k}{n}}\right) +$$
$$+ c_{n-2}\left(\alpha_0^{n-2} p^{\sigma+k} + \alpha_1^{n-2} p^{\sigma+k-\frac{k}{n}} + \ldots + \alpha_{n-2}^{n-2} p^{\sigma+k-\frac{(n-2)k}{n}}\right) +$$
$$+ \ldots + c_1\left(\alpha_0^1 p^{\sigma+k} + \alpha_1^1 p^{\sigma+k-\frac{k}{n}}\right) + c_0 p^{\sigma+k} + c(-1)^n p^{\sigma} = 0,$$

здесь $\alpha_i^j,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n$ - соответствующие константы. Заметим, что $\alpha_n^n = \left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n$. Из последнего уравнения следует

$$\begin{aligned} &c(-1)^n = -\alpha_n^n \\ &\alpha_{n-1}^{n-1} c_{n-1} = -\alpha_{n-1}^n \\ &\alpha_{n-1}^{n-2} c_{n-2} + \alpha_{n-2}^{n-2} c_{n-1} = -\alpha_{n-2}^n \\ &\ldots \\ &\alpha_0^{n-1} c_{n-1} + \alpha_0^{n-2} c_{n-2} + \ldots + \alpha_0^1 c_1 + c_0 = -\alpha_0^n. \end{aligned}$$

Очевидно, что эта система имеет единственное решение, отсюда следует, что можно выбрать константы $c, c_i, i = 0,\ldots,n-1$ так, чтобы функция $\tilde{u}(p) = p^{\sigma} e^{-\frac{\alpha}{p^{\frac{k}{n}}}}$ была решением уравнения (7). Решение $u(x)$ уравнения (6) является обратным преобразованием Лапласа-Бореля этой функции.

Вернемся к уравнению (6) и найдем его решение. Разделим это уравнение на r^n и запишем его в виде

$$\left(-r^{2-\frac{n}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{n+k} u + c'_{n-1} r^{\frac{k}{n+k}}\left(-r^{2-\frac{n}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k+n-1} u +$$
$$+ c'_{n-2} r^{2\frac{k}{n+k}}\left(-r^{2-\frac{n}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k+n-2} + \ldots +$$
$$+ c'_1 r^{(n-1)\frac{k}{n+k}}\left(-r^{2-\frac{n}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k+1} u +$$
$$+ cu + c'_0 r^{\frac{nk}{n+k}}\left(-r^{2-\frac{n}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k} u +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i r^{\frac{(n+i)k}{n+k}}\left(-r^{2-\frac{n}{n+k}}\frac{d}{dr}\right)^{k-1-i} u = 0,$$

здесь через $\alpha_i,\ c'_j,\ i = 1,\ldots,k-1,\ j = 0,\ldots,n-1$ обозначены соответствующие константы. Сделаем в (8) подстановку $x = r^{\frac{1}{n+k}}$, тогда получим уравнение

$$\left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^{n+k} u + c_{n-1}\frac{n+k}{k}x^k\left(-\frac{1}{k}x^k + 1\frac{d}{dx}\right)^{k+n-1} u +$$
$$+ c_{n-2}\left(\frac{n+k}{k}\right)^2 x^{2k}\left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^{k+n-2} u +$$
$$+ \ldots + c_1\left(\frac{n+k}{k}\right)^{n-1} x^{(n-1)k}\left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^{k+1} u +$$
$$+ \left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k} cu + c_0\left(\frac{n+k}{k}\right)^n x^{nk}\left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^k u +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+1+i} x^{(n+i)k}\left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^{k-1-i} u = 0.$$

Так как основной символ этого уравнения равен

$$H_0(p) = p^{n+k} + (-1)^{n+1}\left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k} c = p^{n+k} +$$
$$+ (-1)^{n+1}\left(\frac{n+k}{k}\right)^{n+k}\left(\frac{\alpha k}{n}\right)^n$$

и все корни полинома $H_0(p)$ имеют первый порядок, то асимптотика решения уравнения (6) в нуле имеет вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{x^i}\right) x^{\sigma_j} \sum_l c_l^j x^l,$$

где $\alpha_k^j,\ j = 1,\ldots,n+k$ являются корнями полинома $H_0(p)$. Так как

$$\sum_{j=1}^{n+k} e^{\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i^j}{x^j}} x^{\sigma_j} \sum_l c_l^j x^l = \sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{n+k}}}\right) r^{\frac{\sigma_j}{n+k}} \sum_l c_l^j r^{\frac{l}{n+k}},$$

то окончательно получили, что асимптотика функции $B_1^{-1} p^{\sigma} e^{-\frac{\alpha}{p^{\frac{k}{n}}}}$ в окрестности нуля имеет вид

$$B_1^{-1} p^{\sigma} e^{\frac{1}{p^{\frac{k}{n}}}} \approx \sum_{j=1}^{n+k} \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{n+k}}}\right) r^{\frac{\sigma_j}{n+k}} \sum_l c_l^j r^{\frac{l}{n+k}}.$$

Теорема доказана.

IV. Пример

В качестве примера применения формулы (5) построим асимптотику решения уравнения 4-го порядка с кратными корнями, а именно уравнения с индексом сингулярности равным трем.

Пусть индекс сингулярности равен трем, тогда рассмотрим уравнение

$$\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^4 u + c_1 r\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^2 u + c_2 r^2\left(-r^2\frac{d}{dr}\right) u +$$
$$+ c_3 r^3 u + c_4 r^2\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^2 u + \qquad (8)$$
$$+ c_5 r\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^3 u + r^3 H\left(r, \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)\right) u = 0.$$

Здесь через $c_i, i = 1,...,5$ обозначены некоторые константы и выполнено условие $c_1 \neq 0$. Через $H\left(r,\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)\right)$ обозначен дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами.

$$H\left(r,\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)\right) = a_1\left(-r^2\frac{d}{dr}\right) + a_2\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^2 + + a_3\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^3 + r\sum_{i=0}^{3} b_i(r)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^i, \tag{9}$$

где $a_i, i = 1,2,3$ некоторые константы, а через $b_i(r)$ - соответствующие голоморфные функции. Сделаем преобразование Лапласа-Бореля уравнения (8)

$$\begin{aligned} &p^4\tilde{u}(p) + c_1(-1)\int_1^p p^2\tilde{u}(p)dp + \\ &+ c_2(-1)^2\int_1^p\int_1^{p_2} p_1\tilde{u}(p_1)dp_1dp_2 + \\ &+ c_4(-1)^2\int_1^p\int_1^{p_2} p_1^2\tilde{u}(p_1)dp_1dp_2 + \\ &+ c_5(-1)\int_1^p p^3\tilde{u}(p)dp + \\ &+ (-1)^3\int_1^p\int_1^{p_3}\int_1^{p_2} BH\left(r,\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right)u(r)dp_1dp_2dp_3 = f(p). \end{aligned} \tag{10}$$

Через $f(p)$ обозначена произвольная голоморфная функция. Продифференцируем это уравнения два раза:

$$\begin{aligned} &\left(-p^2\frac{d}{dp}\right)^2\tilde{u}(p) + c_1\left(-p^2\frac{d}{dp}\right)\tilde{u}(p) + \\ &+ c_2^1 p\tilde{u}(p) + c_3^1 p^2\tilde{u}(p) + \\ &+ c_4^1 p\left(-p^2\frac{d}{dp}\right)\tilde{u}(p) - \\ &- \int_1^p BH\left(r,\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right)u(r)dp = \left(\frac{d}{dp}\right)^2 f(p). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь через $c_i^1, i = 2,3,4$ обозначены соответствующие константы. Применим метод повторного квантования. Основной символ имеет два корня первого порядка $q = 0$ и $q = c_1$. Легко показать, что слагаемое $\int_1^p BH\left(r,\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right)u(r)dp$ дает младшие члены асимптотики функции $\tilde{u}(p)$ в окрестности нуля. Это следует из того, что, сделав преобразование Лапласа-Бореля уравнения (11), получим уравнение:

$$\begin{aligned} &q(q - c_1)\hat{u}(q) + \int_1^q (c_2^1 + c_4^1 q)\hat{u}(q)dq + \\ &+ c_3^1\int_1^q\int_1^{q_1}\hat{u}(q_2)dq_2dq_1 + \\ &+ B\int_1^p BH\left(r,\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right)u(r)dp = B\left(\frac{d}{dp}\right)^2 f(p). \end{aligned} \tag{12}$$

Выразив из уравнения (12) функцию $\hat{u}(q)$ и проведя метод последовательных приближений аналогично тому, как это сделано, к примеру, в работе [8], легко показать, что слагаемое $B\int_1^p BH\left(r,\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right)u(r)dp$ дает младшие члены асимптотики функции $\hat{u}(q)$ в окрестностях точек $q = 0$ и $q = c_1$. Это следует из равенства

$$B\left(\int_{q_0}^p \tilde{u}(p)dp\right) = -\frac{1}{q}\int\int_{q_0}^q \hat{u}(q_1)dq_1dq\ , \tag{13}$$

которое было доказано в работе [13].

Таким образом, применения метод последовательных приближений к уравнению (12) с учетом того, что слагаемое (13) дает младшие члены асимптотики, а корни главного символа являются простыми, получим асимптотику решения уравнения (11) в окрестности точки $p = 0$. Она будет иметь вид

$$u(p) \approx e^{-\frac{c_1}{p}} p^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty} a_i^1 p^i + p^{\sigma_2}\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i\ .$$

Чтобы получить асимптотику решения уравнения (8) сделаем обратное преобразование Лапласа-Бореля. Из формулы (5) получим

$$B^{-1}\left(e^{-\frac{c_1}{p}} p^{\sigma_1}\sum_{i=0}^{\infty} a_i^1 p^i + p^{\sigma_2}\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i\right) =$$

$$= e^{\frac{\alpha_1}{\sqrt{r}}} r^{\lambda_1}\sum_{l=0}^{\infty} c_l^1 r^{\frac{l}{2}} + e^{\frac{\alpha_2}{\sqrt{r}}} r^{\lambda_2}\sum_{l=0}^{\infty} c_l^2 r^{\frac{l}{2}} + r^{\lambda_3}\sum_{l=0}^{\infty} c_l^3 r.$$

Здесь $\alpha_i, i = 1,2$ – корни многочлена $p^2 + 4c_1$.

Библиография

[1] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московского математического общества. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.

[2] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях. Докл. АН СССР, 153:1 (1963), 27-29

[3] Кац Д. С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1612–1617.

[4] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. Пер. с англ. под ред. А. П. Прудникова. – М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит,1990. – 528 с.

[5] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература, 1958. — 475 с.

[6] Л. Чезари. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. — 477 с.

[7] J. Ecalle. Cinq applications des fonctions résurgentes. // Prepub. Math. d'Orsay, 1984, 84T62, # 110 pp.

[8] Коровина М. В., Шаталов В. Е. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.

[9] Коровина М. В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 349–357.

[10] Коровина М. В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 302–304.

[11] Коровина М. В. Асимптотики решений уравнений второго порядка со старшими вырождениями и уравнение Лапласа на многообразии с особенностью типа клюва // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 456, № 4. — С. 396–399.

[12] Korovina M. V. Asymptotic solutions of second order equations with holomorphic coefficients with degeneracies and laplace's equations on a manifold with a cuspidal singularity // Global Journal of Science Frontier Research (GJSFR): F Mathematics & Decision Sciences. — 2017. — Vol. 17, no. 6. — P. 57–71.

[13] Коровина М. В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождениями // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 60–77.

About one problem that occurs when applying the repeated quantization method to linear differential equation with holomorphic coefficients

M. V. Korovina, V.Y. Smirnov

***Abstract* — The present paper deals with asymptotic expansions for solution degenerate elliptic differential equations. The technique for the interpretation and construction of asymptotic expansions on the basis of the Laplace-Borel transform is referred to as resurgent analysis. The inverse Laplace-Borel transform provides a regular method for the summation of the series. In this paper, we solve the problem of constructing asymptotic expansions the inverse-transform Laplace-Borel of one exponential type functions. This transform is necessary for construction of asymptotic of solutions of differential equations with degeneration in the coefficients with repeated quantization method. This method is used to study the asymptotic of solutions of equations with holomorphic coefficients. By using the repeated quantization method, we will consider an example fourth order differential equation and used inverse-transform Laplace-Borel of one exponential type functions, which receive in the paper, we construct asymptotic expansions of solution of this equation.**

***Keywords* — differential equations with singularities, singular points, degenerate, Laplace-Borel transformation, resurgent function, principle operator symbol, asymptotic expansion.**