

Анализ рабочей области робота DexTAR - dexterous twin-arm robot

Д.И. Малышев¹, М.А. Посыпкин², Л.А. Рыбак³, А.Л. Усов⁴

Аннотация—В работе предлагаются и экспериментально сравниваются два подхода к задаче определения рабочей области параллельных роботов на примере плоского робота DexTAR с двумя степенями свободы. Рассматриваемые подходы основаны на уравнениях связи. В первом случае используются исходные уравнения связи в шестимерном пространстве двух координат, описывающих положение выходного звена и четырёх углов поворота штанг с последующим проецированием решения на двумерную плоскость. Во втором, из уравнений связи выводится система неравенств, связывающая координаты выходного звена манипулятора, которая решается в двумерном Евклидовом пространстве. В работе приведены результаты вычислительного эксперимента. В качестве алгоритмической основы предлагаемых подходов выступает метод неравномерных покрытий, позволяющий получить внешнюю и внутреннюю аппроксимацию множества решений систем для каждого подхода с заданной точностью. Аппроксимация представляет собой совокупность параллелепипедов. Получены результаты построения рабочей области для трёх конфигураций рассматриваемого робота. Показано, что в первом случае эффективнее применять интервальные оценки, совпадающие с экстремумами функции на параллелепипеде, во втором — сеточную аппроксимацию, в связи с многократным вхождением переменных в выражения.

Ключевые слова—параллельный робот, рабочая область, неравномерное покрытие, интервальный анализ.

I. ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия параллельные роботы [1], [2], [3], [4] привлекли к себе внимание большого количества ученых со всего мира. Они обладают целым рядом преимуществ, таких как жесткость и точность позиционирования, что привело к их широкому распространению во всех областях промышленности.

Важной задачей, решаемой при проектировании роботов, является определение его рабочей области, т.е. множества точек, которые может достигнуть инструмент, управляемый роботом. Объем рабочей области является ключевой характеристикой робота. Сама рабочая область служит основой для прокладки траектории движения рабочего инструмента.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 17-37-50082

¹Д.И. Малышев — аспирант кафедры "Технология машиностроения" Белгородского государственного технологического университета им.В.Г.Шухова. malyshev.d.i@yandex.ru

²М.А. Посыпкин — заведующий отделом прикладных проблем оптимизации Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. mposypkin@gmail.com

³Л.А. Рыбак — профессор кафедры "Технология машиностроения" Белгородского государственного технологического университета им.В.Г.Шухова. rl_bgtu@intbel.ru

⁴А.Л. Усов — аспирант Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. alusov@mail.ru

В данной работе рассматриваются два подхода к определению рабочей области робота. Один из подходов основан на непосредственном использовании системы кинематических уравнений координат выходного звена по длинам и углам поворота штанг. Второй подход состоит в приведении системы уравнений связей для штанг к квадратному уравнению и проверке условия его разрешимости. Проводится теоретическое и экспериментальное сравнение эффективности предложенных подходов на примере робота DexTAR [5]. Робот DexTAR (Рис.1.) является плоским параллельным четырехзвенным механизмом, управляемым двумя двигателями.



Рис. 1: Макет робота \underline{RRRRR}

II. АНАЛИЗ КИНЕМАТИКИ

Рассмотрим плоский \underline{RRRRR} параллельный робот DexTAR, имеющий 2 степени свободы (Рис.2.). В состав робота входит 4 штанги постоянной длины, как правило, попарно равные, то есть $l_a = l_d$ и $l_b = l_c$. Рассматривается случай, когда двигатели располагаются выше плоскости рабочей области и не оказывают на неё влияние. Расстояние между точками закрепления штанг равно d . Латинские буквы R в названии робота обозначают 5 вращательных пар (C, D, P, B, A), две из которых подчеркнуты, что подразумевает 2 привода (C и A), вращением которых определяется поступательное движение рабочего органа по осям X и Y.

Запишем уравнения, определяющие координату точки $P(x_p, y_p)$:

$$\begin{cases} x_p = l_b \cdot \cos q_3 + l_a \cdot \cos q_1 + \frac{d}{2}, \\ x_p = -\frac{d}{2} + l_d \cdot \cos q_2 + l_c \cdot \cos q_4, \\ y_p = l_a \cdot \sin q_1 + l_b \cdot \sin q_3, \\ y_p = l_d \cdot \sin q_2 + l_c \cdot \sin q_4. \end{cases} \quad (1)$$

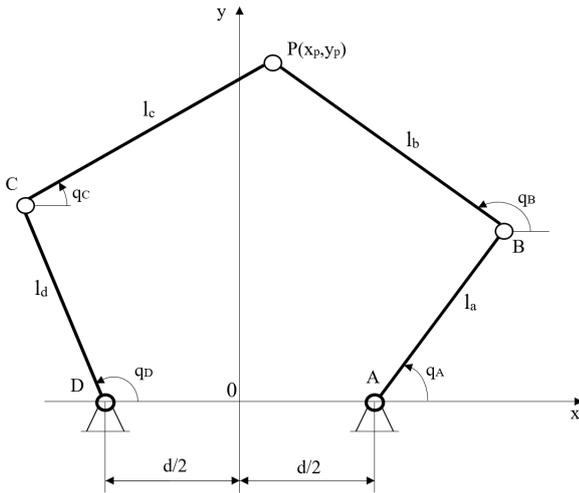


Рис. 2: Схема робота RRRRR

Данные уравнения являются уравнениями связи рассматриваемого робота и представляют собой формулы для вычисления координат x и y по заданным геометрическим характеристикам робота и углам поворота штанг. Примем длины штанг равными $l_d = l_a = a$, $l_c = l_b = b$ соответственно. Рассмотрим кинематическую цепь DCP (Рис.3.) и сделаем замену переменных для упрощения расчетов:

$$\begin{cases} x' = x + d/2, \\ y' = y. \end{cases} \quad (2)$$

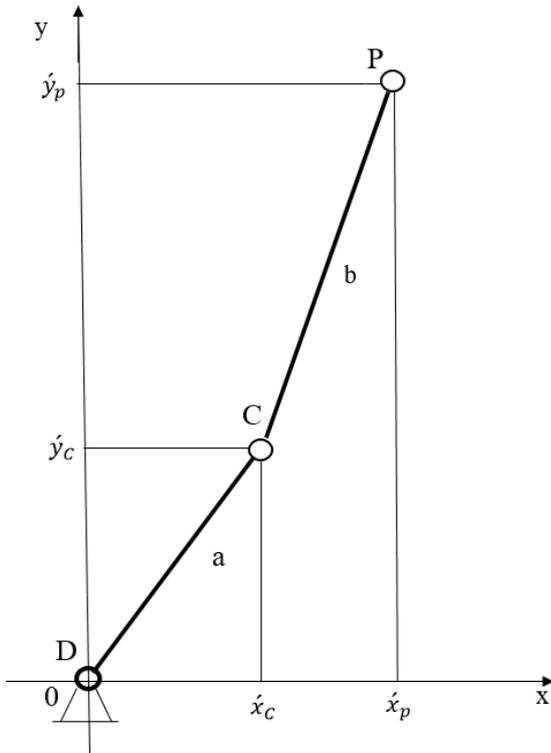


Рис. 3: Кинематическая цепь DCP.

Запишем следующие уравнения связи, используя вве-

денную замену переменных:

$$\begin{cases} x'_C{}^2 + y'_C{}^2 = a^2, \\ (x'_P - x'_C)^2 + (y'_P - y'_C)^2 = b^2. \end{cases} \quad (3)$$

Раскроем скобки во втором уравнении системы (3):

$$x'_P{}^2 - 2x'_C x'_P + x'_C{}^2 + y'_P{}^2 - 2y'_C y'_P + y'_C{}^2 = b^2. \quad (4)$$

Вычтем из (4) первое уравнение системы (3):

$$x'_P{}^2 - 2x'_C x'_P + y'_P{}^2 - 2y'_C y'_P = b^2 - a^2. \quad (5)$$

Выразим y'_C :

$$\begin{aligned} 2y'_C y'_P &= x'_P{}^2 - 2x'_C x'_P + y'_P{}^2 - b^2 + a^2, \\ y'_C &= \frac{1}{2y'_P} (x'_P{}^2 - 2x'_C x'_P + y'_P{}^2 - b^2 + a^2), \\ y'_C &= -\frac{x'_C x'_P}{y'_P} + \left(\frac{x'_P{}^2}{2y'_P} + \frac{y'_P}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y'_P} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим выражение (6) в первое уравнение системы (3):

$$\begin{aligned} x'_C{}^2 + \left(-\frac{x'_C x'_P}{y'_P} + \frac{x'_P{}^2}{2y'_P} + \frac{y'_P}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y'_P} \right)^2 &= a^2 \\ \left(1 + \frac{x'_P{}^2}{y'_P{}^2} \right) x'_C{}^2 + \left(2 \left(-\frac{x'_P}{y'_P} \right) \left(\frac{x'_P{}^2}{2y'_P} + \frac{y'_P}{2} \right. \right. & \\ \left. \left. + \frac{a^2 - b^2}{2y'_P} \right) \right) x'_C + \left(\left(\frac{x'_P{}^2}{2y'_P} + \frac{y'_P}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y'_P} \right)^2 \right. & \\ \left. - a^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем формулу для дискриминанта квадратного уравнения (7):

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(2 \left(-\frac{x'_P}{y'_P} \right) \left(\frac{x'_P{}^2}{2y'_P} + \frac{y'_P}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y'_P} \right) \right)^2 \\ &- 4 \left(1 + \frac{x'_P{}^2}{y'_P{}^2} \right) \left(\left(\frac{x'_P{}^2}{2y'_P} + \frac{y'_P}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y'_P} \right)^2 \right. & \\ &\left. - a^2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Сделаем обратную замену переменных по отношению к (2):

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(2 \left(-\frac{x_p + d/2}{y_p} \right) \left(\frac{(x_p + d/2)^2}{2y_p} + \frac{y_p}{2} \right. \right. & \\ &\left. \left. + \frac{a^2 - b^2}{2y_p} \right) \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{(x_p + d/2)^2}{y_p^2} \right) & \\ &\cdot \left(\left(\frac{(x_p + d/2)^2}{2y_p} + \frac{y_p}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y_p} \right)^2 - a^2 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что система (3) имеет решение тогда и только тогда, когда разрешимо квадратное уравнение (7), т.е. когда $D_1 \geq 0$.

Выполнив аналогичные преобразования для кинематической цепи ABP получим:

$$D_2 = \left(2 \left(-\frac{x_p - d/2}{y_p} \right) \left(\frac{(x_p - d/2)^2}{2y_p} + \frac{y_p}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y_p} \right) - 4 \left(1 + \frac{(x_p - d/2)^2}{y_p^2} \right) \cdot \left(\left(\frac{(x_p - d/2)^2}{2y_p} + \frac{y_p}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2y_p} \right)^2 - a^2 \right) \right). \quad (10)$$

Рабочая область состоит из всех точек (x_P, y_P) , для которых одновременно выполняются неравенства

$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ D_2 \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Для нахождения рабочей области необходимо решить систему неравенств (11).

III. ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ РАБОЧЕЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим два подхода для построения рабочей области. Алгоритмическую основу предлагаемых подходов составляет метод неравномерных покрытий [6], [7]. Для вычисления оценок используются методы интервального анализа [8] или сеточная аппроксимация.

Первый подход заключается в определении множества допустимых решений системы нелинейных алгебраических уравнений (1). Алгоритм работает с двумя списками шестимерных параллелепипедов \mathbb{P} и \mathbb{P}_E . Каждая из осей шестимерного пространства соответствует изменяющимся параметрам в системе уравнений: координаты x_P, y_P и углы поворота штанг $q_i, i = 1, 2, 3, 4$.

На первом шаге алгоритма список \mathbb{P} состоит только из одного параллелепипеда P , включающего весь диапазон углов $-\pi \leq q_i \leq \pi$ и теоретически максимальные границы нахождения рабочего инструмента $-(l_a + l_b + d) \leq x_p \leq l_a + l_b + d$ и $-(l_a + l_b + d) \leq y_p \leq l_a + l_b + d$. Далее в цикле выполняются следующие действия. Из списка \mathbb{P} извлекается параллелепипед P . Для него последовательно определяется минимум и максимум функций уравнений $g_i, i \in 1, 4$ из следующей системы, полученной из решения прямой задачи кинематики:

$$\begin{cases} x_p - l_b \cdot \cos q_3 - l_a \cdot \cos q_1 - \frac{d}{2} = 0, \\ x_p + \frac{d}{2} - l_d \cdot \cos q_2 - l_c \cdot \cos q_4 = 0, \\ y_p - l_a \cdot \sin q_1 - l_b \cdot \sin q_3 = 0, \\ y_p - l_d \cdot \sin q_2 - l_c \cdot \sin q_4 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Если хотя бы в одном из уравнений q_i выполняется хотя бы одно из условий $\min g_i > 0$ или $\max g_i < 0$, то следовательно, параллелепипед не содержит комбинации переменных, являющихся решением уравнения. Поэтому такой параллелепипед исключается из дальнейшего рассмотрения, попадая в список \mathbb{P}_E . В противном случае возможны два варианта:

– параллелепипед имеет диаметр меньший или равный заданному параметру δ , тогда он добавляется в аппроксимационное множество \mathbb{P}_A ;

– параллелепипед имеет диаметр больший δ , тогда он делится на два равных параллелепипеда вдоль максимального по длине ребра и полученные параллелепипеды вносятся в конец списка \mathbb{P} .

Алгоритм завершает свою работу в тот момент, когда список \mathbb{P} становится пустым. Конечность числа шагов алгоритма следует из ограничения на минимальный диаметр параллелепипеда. Множество \mathbb{P}_A является подмножеством пространства \mathbb{R}^6 . Поскольку задача состоит в нахождении рабочей области в пространстве параметров x_P, y_P то для его построения необходимо спроецировать \mathbb{P}_A в пространство \mathbb{R}^2 . Так как множества представляют собой параллелепипеды, то получение проекции не представляет труда.

Второй подход [9], [10] заключается в построении аппроксимации системы (11). Алгоритм работает с четырьмя списками двумерных параллелепипедов $\mathbb{P}, \mathbb{P}_I, \mathbb{P}_B$ и \mathbb{P}_E . Каждая из осей двумерного пространства соответствует координатам x_p и y_p . На первом шаге алгоритма список \mathbb{P} также состоит только из одного параллелепипеда P , включающего диапазоны $-(l_a + l_b + d) \leq x_p \leq l_a + l_b + d$ и $-(l_a + l_b + d) \leq y_p \leq l_a + l_b + d$. Списки $\mathbb{P}_I, \mathbb{P}_B$ и \mathbb{P}_E первоначально пусты.

Из списка \mathbb{P} извлекается параллелепипед P . Для него последовательно определяется минимум и максимум функций g_i из систем неравенств (11). Если для обеих функций выполняется условие $\min g_i \geq 0$, то он полностью удовлетворяет условиям и добавляется к списку \mathbb{P}_I . Если хотя бы для одной функции выполняется условие $\max g_i < 0$, то следовательно, параллелепипед не удовлетворяет требованиям и исключается из дальнейшего рассмотрения, попадая в список \mathbb{P}_E . В остальных случаях если параллелепипед имеет диаметр, меньший или равный δ , то он добавляется к списку \mathbb{P}_B . Если диаметр параллелепипеда больше δ , то он делится на два равных параллелепипеда вдоль ребра с наибольшей длиной. Полученные параллелепипеды вносятся в конец списка \mathbb{P} . Алгоритм завершает свою работу в тот момент, когда список \mathbb{P} становится пустым. Как и для первого подхода, конечность числа шагов алгоритма следует из ограничения на минимальный диаметр параллелепипеда. Аппроксимация принимается равной объединению множеств $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}_I \cup \mathbb{P}_B$.

IV. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Особенностью рассмотренных алгоритмов является то, что они требуют нахождения минимумов и максимумов функций, входящих в левую часть уравнений и неравенств. В общем случае, точный минимум найти сложно и, поэтому, используются оценки. Первоначально в обоих методах были применены интервальные оценки. В первом подходе интервальные оценки являются идеальными выбором. Это связано с тем, что в оцениваемые выражения все переменные входят по одному разу. В условиях однократного вхождения переменных в выражение интервальные оценки совпадают с экстремумами функции на параллелепипеде, т.е. не могут быть улучшены.

При втором подходе выражения содержат многократные вхождения переменных. Проверка показала, что ин-

тервальные оценки не позволяют получать аппроксимации приемлемого качества. Поэтому использовался другой метод, состоящий в приближенной оценке экстремумов функции на равномерной сетке. В каждом параллелепипеде функция, стоящая в левой части неравенства, вычислялась в узлах прямоугольной сетки размера $n \times n$. Минимум и максимум на сетке значений функции на сетке принимался за оценку минимума и максимума функции на параллелепипеде.

Расчеты проводились на персональном компьютере, имеющем четырехъядерный процессор Intel i7 с тактовой частотой 2.4 ГГц и оперативной памятью объемом 8 Гб. Алгоритм реализован на языке C++ с использованием библиотеки Snowgoose [11].

На рисунках 4-9 представлены результаты построения рабочей области для трех конфигураций, полученных с помощью первого и второго подходов. Параметры конфигураций перечислены в таблице I. На каждом рисунке приведена как вся рабочая область (слева), так и ее увеличенный фрагмент (справа).

Таблица I: Исходные данные для моделирования.

Параметр	Конфигурация 1	Конфигурация 2	Конфигурация 3
l_a, l_d	72	72	20
l_b, l_c	87	20	87
d	60	60	60

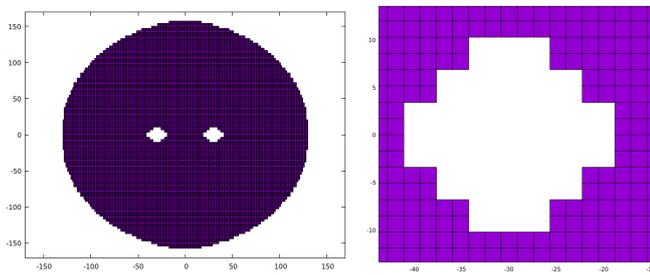


Рис. 4: Построение рабочей области с первым подходом для конфигурации 1.

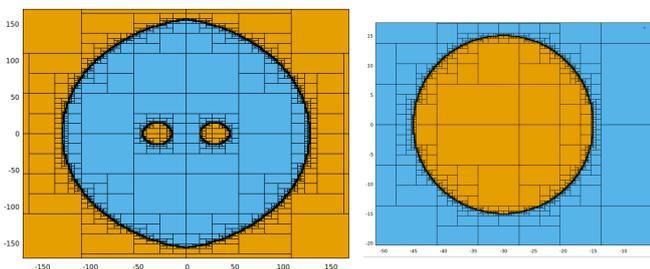


Рис. 5: Построение рабочей области со вторым подходом для конфигурации 1.

Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

- рабочая область при обоих подходах имеет одинаковую форму и размеры;
- качество аппроксимации при втором подходе существенно выше;
- первый подход требует значительно больших затрат времени на вычисления: при указанных значениях время

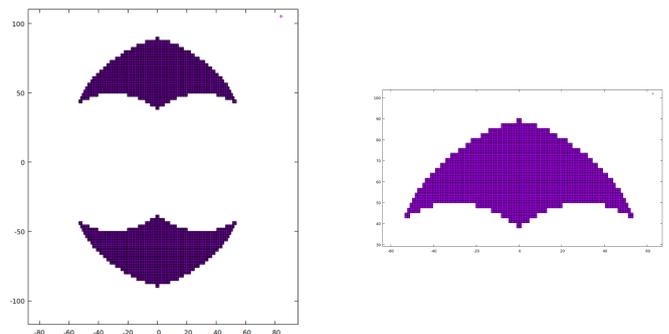


Рис. 6: Построение рабочей области с первым подходом для конфигурации 2.

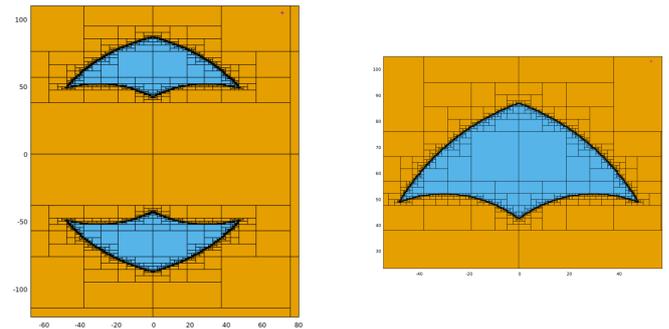


Рис. 7: Построение рабочей области со вторым подходом для конфигурации 2.

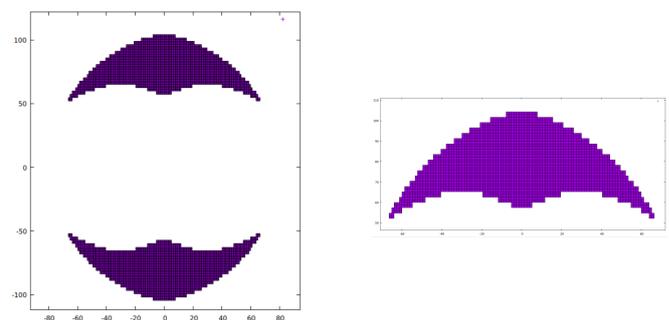


Рис. 8: Построение рабочей области с первым подходом для конфигурации 3.

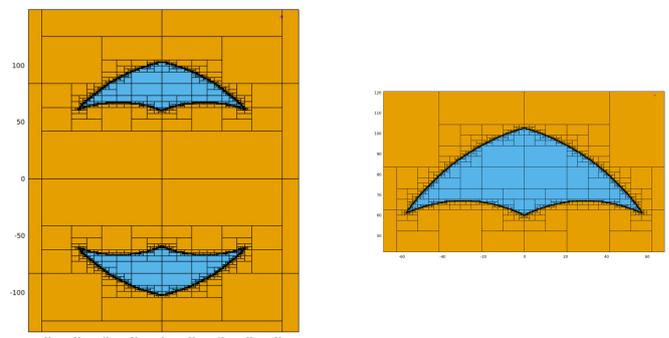


Рис. 9: Построение рабочей области со вторым подходом для конфигурации 3.

расчетов для конфигурации 1 первым подходом составило 39 минут 40 секунд, вторым — 3 минуты 50 секунд.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены два подхода для построения рабочей области. Первый подход состоит в определении множества решений системы уравнений кинематических связей. Второй подход требует предварительного преобразования системы уравнений связи к системе неравенств с уменьшением размерности. Оба подхода реализованы программно. Проведены вычислительные эксперименты, которые показали, что второй подход позволяет получать существенно более качественные реализации по сравнению с первым за меньшее время. Недостатком второго подхода является необходимость преобразований системы неравенств к нужному виду вручную. В дальнейшем планируется применить методы параллельных и распределенных вычислений к решению данной задачи. В этом отношении может быть полезен опыт распараллеливания задач глобальной оптимизации [12].

Список литературы

- [1] Merlet J. P. *Parallel Robots*. — Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.
- [2] Рыбак Л. А. Ержуков В. В. Чичварин А. В. Эффективные методы решения задач кинематики и динамики робота станка параллельной структуры. — М.: Физматлит, 2011.
- [3] Глазунов В.А. Колисков А.Ш. Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. — М.: Наука, 1991.
- [4] Кун С. Госселин К. Структурный синтез параллельных механизмов. — М.: Физматлит, 2012.
- [5] Sergiu-Dan Stan Vistrian Maties, Balan Radu. Optimization of a 2 dof micro parallel robot using genetic algorithms // *Frontiers in Evolutionary Robotics*. — 2008. — P. 465–490.
- [6] Evtushenko Yu G. Numerical methods for finding global extrema (case of a non-uniform mesh) // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1971. — Vol. 11, no. 6. — P. 38–54.
- [7] Evtushenko Yuri, Posypkin Mikhail. A deterministic approach to global box-constrained optimization // *Optimization Letters*. — 2013. — Vol. 7, no. 4. — P. 819–829.
- [8] Jaulin Luc. *Applied interval analysis: with examples in parameter and state estimation, robust control and robotics*. — Springer Science & Business Media, 2001. — Vol. 1.
- [9] Numerical method for approximating the solution set of a system of non-linear inequalities / Yuri G Evtushenko, Mikhail A Posypkin, Larisa A Rybak, Andrei V Turkin // *International Journal of Open Information Technologies*. — 2016. — Vol. 4, no. 12. — P. 1–6.
- [10] Approximating a solution set of nonlinear inequalities / Yuri Evtushenko, Mikhail Posypkin, Larisa Rybak, Andrei Turkin // *Journal of Global Optimization*. — 2017. — P. 1–17.
- [11] Posypkin Mikhail, Usov Alexander. — *Basic numerical routines*, 2018 (accessed May 21, 2018). — URL: <https://github.com/mposypkin/snowgoose>.
- [12] Evtushenko Yuri, Posypkin Mikhail, Sigal Israel. A framework for parallel large-scale global optimization // *Computer Science-Research and Development*. — 2009. — Vol. 23, no. 3-4. — P. 211–215.

Analysis of the working area of the robot DexTAR - dexterous twin-arm robot

Dmitry I. Malyshev, Mikhail A. Posypkin, Larisa A. Rybak, Alexander L. Usov

Abstract—The paper proposes and experimentally compares two approaches to the task of determining the working area of parallel robots using the example of a flat Dextar robot with two degrees of freedom. The considered approaches are based on the coupling equations. In the first case, the original coupling equations are used in the six-dimensional space of two coordinates describing the position of the output link and the four rotation angles of the bars with the subsequent projection of the solution onto a two-dimensional plane. In the second, the system of inequalities connecting the coordinates of the manipulator output link, which is solved in the two-dimensional Euclidean space, is derived from the coupling equations. The algorithm of the proposed approaches is the nonuniform covering method, which allows to obtain external and internal approximation of the set of systems solutions for each approach with a given accuracy. Approximation is a set of parallelepipeds. It is shown that in the first case it is more efficient to use interval estimates that coincide with the extremums of a function on a parallelepiped, in the second it is a grid approximation, in connection with the multiple occurrence of variables in expressions.

Keywords—parallel robot, work area, nonuniform covering, interval analysis.