International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162 vol. 5, no.6, 2017

Бесконечные арифметические прогрессии и глобальные деревья в структуре натуральных

Г. Г. Рябов, В. А. Серов

***Аннотация*—Статья является продолжением тематики исследования структуры натуральных чисел на основе композиции инфинитарных структур, бесконечных арифметических прогрессий, глобальных d-арных деревьев и, собственно, множества неотрицательных натуральных. Предложен полуаддитивный канонический вид натурального при заданном опорном модуле d, на основе алгоритма Эвклида. Дано определение 6-арного глобального, ориентированного дерева GT как графа развертки процесса маркировки вершин последовательностью натуральных. Рассмотрен выбор опорных модулей d для конструкции GT отличных от 6. Отмечен "галактический" характер GT. Введены конструкции, близкие по понятиям к арифметическим прогрессиям — кольцевая прогрессия и квази-прогрессия с переменной разностью d, как результат слияния прогрессий.**

***Ключевые слова*—Бесконечные арифметические прогрессии, множество натуральных, глобальное d-арное дерево.**

I. Введение

Исследования в области числовой комбинаторики продолжают оставаться одной из областей самого интенсивного развития математики [1].

В [2,3] рассматривались шесть бесконечных арифметических прогрессий с разностью $d = 6$ и начальными членами $a_{0i} = 4,5,6,7,8,9$. Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело со сравнениями по $\bmod d$ (в частности, $d = 6$) и:

$6 \equiv 0(\bmod 6), 7 \equiv 1(\bmod 6), 8 \equiv 2(\bmod 6), 9 \equiv 3(\bmod 6)$,

соответственно будут рассматриваться бесконечные прогрессии:

$$S_0 = \{0,6,12,18,...\},\ S_1 = \{1,7,13,19,...\},\\ S_2 = \{2,8,14,20,...\},\ S_3 = \{3,9,15,21,...\},\\ S_4 = \{4,10,16,22,...\},\ S_5 = \{5,11,17,23,...\}. \quad (1)$$

Основные свойства этих множеств:

$$\bigcup_{i=0}^{5} S_i = N_0, \quad S_i \cap S_j = \varnothing, i \neq j \quad \text{, где} \quad (2)$$

N_0 — множество неотрицательных натуральных.

Ниже приведены бинарные отношения между $S_0 \div S_5$, как полугруппами по сложению (с “0” полугруппы как S_0) и умножению (с “1” полугруппы как S_1) (рис.1).

Отметим, что начальные члены этих прогрессий совпадают с остаточными классами и, таким образом, все члены каждой прогрессии являются равноостаточными [4].

+	S0	S1	S2	S3	S4	S5
S0	0	1	2	3	4	5
S1	1	2	3	4	5	0
S2	2	3	4	5	0	1
S3	3	4	5	0	1	2
S4	4	5	0	1	2	3
S5	5	0	1	2	3	4

x	S0	S1	S2	S3	S4	S5
S0	0	0	0	0	0	0
S1	0	1	2	3	4	5
S2	0	2	4	0	2	4
S3	0	3	0	3	0	3
S4	0	4	2	0	4	2
S5	0	5	4	3	2	1

Рис.1 Бинарные отношения по сложению и умножению для $S_0 \div S_5$. Всегда только: $p_1 + p_2 = \textit{четное} \in S_4$, $p_3 + p_4 = \textit{четное} \in S_2$, $p_1 + p_3 \in S_0$. $p_1, p_2 \in P(S_5)$ — простые из класса S_5, $p_3, p_4 \in P(S_1)$ —простые из класса S_1.

Из (2) следует однозначное, единственное положение каждого натурального только в одной из прогрессий $S_0 \div S_5$. Поэтому можно говорить о *каноническом* виде представления каждого натурального в системе бесконечных прогрессий $S_0 \div S_5$ с разностью d=6. Последующая часть статьи относится к рассмотрению предлагаемого канонического вида (с элементами аддитивности) любых натуральных, в т.ч. и простых.

II. Алгоритм Эвклида и представление натуральных в остаточных классах

Воспользуемся схемой хорошо известного алгоритма Эвклида [4] нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных для представления натурального в остаточных классах, показав это на примере самого большого (из 100 000 натуральных) простого, равного 99971 (рис.2). Остаточные классы по $\bmod 6$ в этом примере в порядке их вычисления образуют последовательность: 5,5,4,0,5,0 и последнее частное 2 при делении нацело. Поскольку начало было с младших разрядов, запись последовательности для восстановления исходного числа надо рассматривать в

Статья получена 28 апреля 2017.

Г. Г. Рябов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия (e-mail: gen-ryabov@yandex.ru).

В. А. Серов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

обратном порядке: 2,0,5,0,4,5,5. Отсюда реконструкция числа:

$$(((((2\times 6+0)\times 6+5)\times 6+0)\times 6+4)\times 6+5)\times 6+5=99971;$$

Поскольку при $\bmod 6$ (назовем его в данном случае опорным модулем) допустимый конечный алфавит $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, то в записи числа в остаточных классах можно разделители устранить: $\mathrm{Res}\,6\,(99971)=2050455$. Именно это число будем считать *полуаддитивным каноническим видом натурального при опорном модуле d=6* (в отличие от мультипликативного канонического вида разложения целого на простые сомножители).

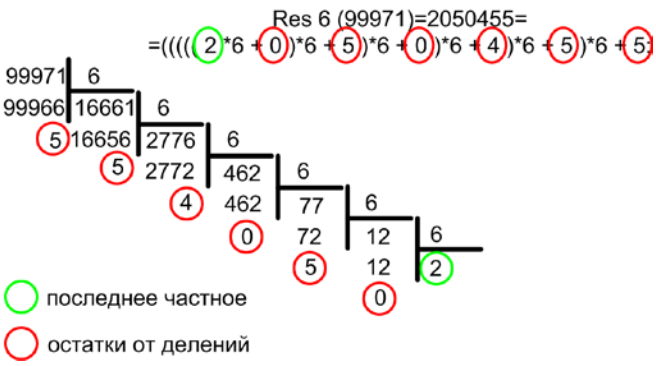


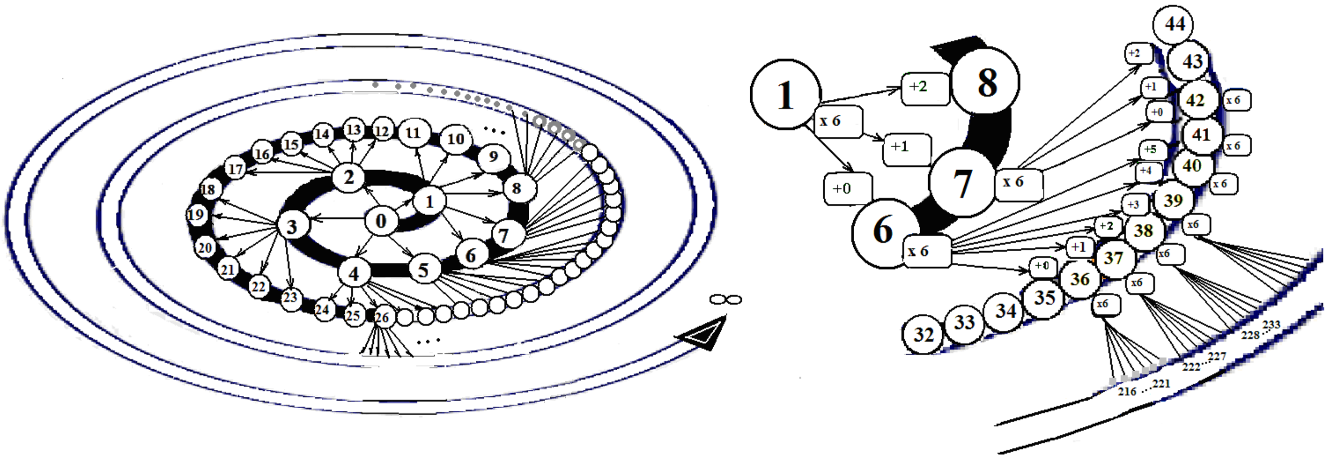
Рис.2 Алгоритм Эвклида и восстановление числа по остаткам и последнему частному.

III. 6-АРНОЕ ГЛОБАЛЬНОЕ ОРИЕНТИРОВАННОЕ ДЕРЕВО $GT(\bmod 6)$ И МАРКИРОВКА ЕГО ВЕРШИН И РЕБЕР

Определение. Пусть дано корневое дерево с множеством вершин V и множеством ориентированных ребер E. Каждая вершина (кроме корневой) имеет одно входящее ребро и 6 выходящих ребер. Корневая вершина имеет только 6 выходящих ребер. Вершины, смежные с корнем, будем считать вершинами 1-го ранга, вершины с входящими ребрами от вершин 1-го ранга—вершины 2-го ранга и т.д. В нашем случае число вершин 1-го ранга равно 6, 2-го ранга 36 и т.д. Неограниченно, последовательно увеличивая ранги и число вершин даем оправдание термину “глобальное 6-арное дерево” (рис. 3а).

Собственно дерево представляет собой граф развертки процесса маркировки вершин последовательностью натуральных начиная с корня, двигаясь против часовой стрелки и образуя спираль натуральных. При этом каждый 6-кортеж ложится в шестерку вершин с входящими ребрами, которые являются исходящими из вершины предыдущего ранга. На рис.3б на фрагменте дерева рядом с маркированной вершиной на входящих и выходящих ребрах отображены в фигурных экранах действия умножения на 6 ($\times 6$) значения натурального из предыдущего ранга и сложения с числом, равным очередному остатку при реализации алгоритма Эвклида.

В соответствии с предложенной конструкцией $GT(\bmod 6)$ кратчайший путь из любой вершины, маркированной натуральным n, по ребрам (в направлении, противоположном их ориентации) до корня проходит по ребрам с пометками остаточных классов, последовательность которых и есть канонический полуаддитивный вид натурального n при заданном опорном модуле (в данном случае $\bmod 6$).



а) б)

Рис.3 а) 6-арное глобальное ориентированное дерево и спираль натуральных на вершинах дерева. б) Принцип маркировки вершин натуральными и ребер действиями сложения и умножения для вычисления значения натурального в вершине следующего ранга дерева (показаны на фрагменте дерева).

IV. ОБЩАЯ СХЕМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ В КОНСТРУКЦИИ $GT(\bmod d)$ И ВЫБОР ОПОРНОГО МОДУЛЯ

До этого раздела мы имели дело с постоянным опорным модулем $d=6$. Теперь рассмотрим более общий случай опорных модулей d из натуральных по отношению к рассматриваемой конструкции GT и цели ее использования. Итак, GT целиком определяется конечным множеством $\{S_0, S_1, \ldots, S_{d-1}\}$ бесконечных арифметических прогрессий, каждая с разностью d и, соответственно, с начальными членами $0,1,2,...,(d-1)$, которые являются одновременно остаточными классами для множеств членов этих прогрессий.

Все построения GT предыдущего раздела формально остаются в силе, но при этом более широко рассмотрим цели использования такой конструкции. Так, при $d=6$ все простые "кластеризовались" *только в двух* из них: S_1 и S_5, что, при взаимно простых парах $(1,6)=1$ и $(5,6)=1$, соответствует выполнению условия Дирихле о бесконечном числе простых в таких прогрессиях. При других d число таких прогрессий будет равно значению функции Эйлера $\varphi(d)$. Так: $\varphi(3)=2$; $\varphi(4)=2$; $\varphi(5)=4$; $\varphi(6)=2$; $\varphi(7)=6$; $\varphi(8)=4$; $\varphi(10)=4$; $\varphi(30)=8$;

Увеличение $\varphi(d)$ приводит к рассредоточению простых между прогрессиями, что не всегда желательно.

С другой стороны, при записи натурального в каноническом полуаддитивном виде желательно оставаться в рамках стандартного конечного алфавита $A=\{0,1,2,...,9\}$, хотя принципиально расширение этого алфавита возможно.

Еще один фактор требует учета: как соотносится такое представление с машинными реализациями (двоичная, четверичная, восьмеричная и т.д. системы счисления). Так, восьмеричная система изоморфна конструкции $GT(\bmod 8)$ с алфавитом $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Большие опорные модули требуют особого рассмотрения.

V. Галактический характер $GT(\bmod d)$-структуры натуральных и особенности ориентации в этой структуре

Графическое отображение нескольких первых рангов $GT(\bmod d)$-структуры порождает ассоциацию с галактическим видом, в котором между натуральными n_1 и n_2 реализуются иные метрические отношения, чем $|n_1-n_2|$ (рис.4 при $d=6$).

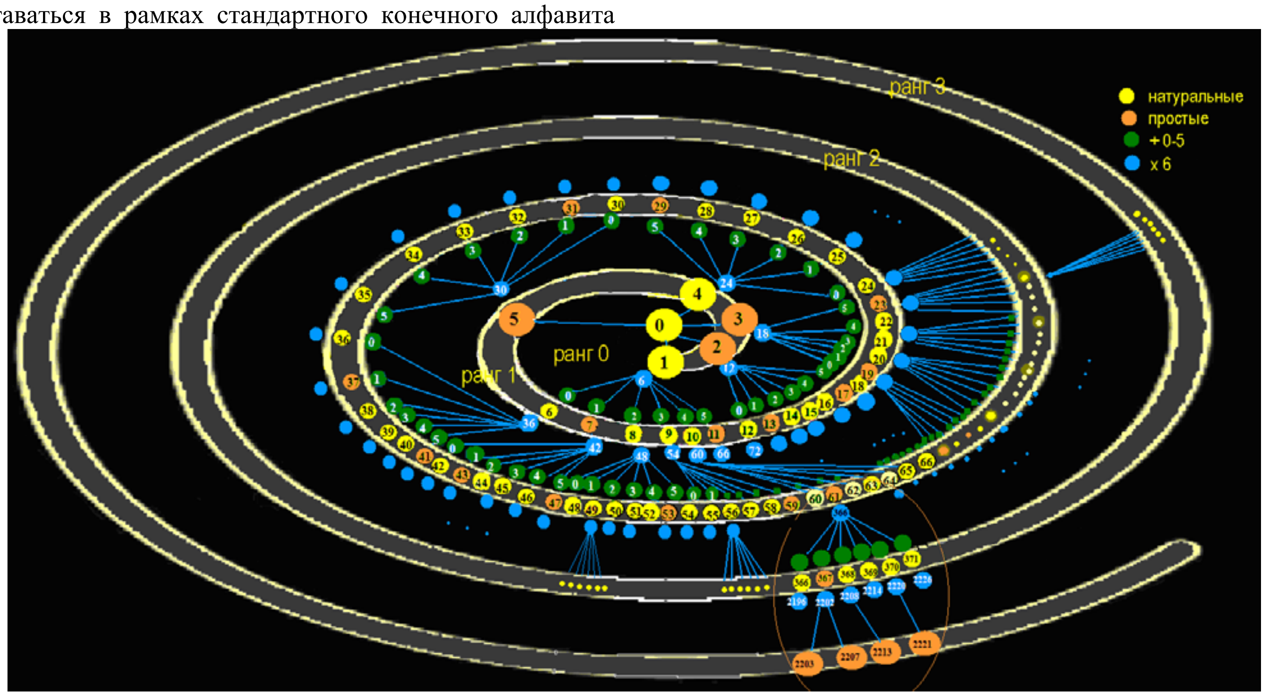


Рис.4. "Галактика натуральных" при опорном mod, равном $d=6$.

Здесь речь идет о метрике, индуцированной совместно GT (по ребрам дерева) и вдоль спирали натуральных, натянутой на вершины дерева. Для обозначения более детального анализа возможных аномалей натуральных с теми или иными свойствами, целесообразно заимствовать приемы астрономии в ориентации областей небесного свода по хорошо известным созвездиям и указанием диапазона расстояний (в световых годах или иных принятых единицах). В нашем случае можно предложить в качестве известных созвездий простых-близнецов из первых 100 натуральных, а в качестве диапазона расстояний—диапазон рангов $GT(\bmod d)$. Для примера, изображенного на рис.4, это указание ориентации звучало бы примерно так: найти скопление простых в "созвездии близнецов 59-61" в диапазоне рангов 3-5.

VI. Обобщения понятий арифметических прогрессий и свойства натуральных в них

В этом разделе мы кратко коснемся двух конструкций, близких по понятиям к арифметическим прогрессиям, но обладающих свойствами, полезными при исследовании структуры натуральных—"кольцевых прогрессий" и квази-прогрессий с переменной разностью d, как результат слияния прогрессий.

Соотношения (1) представим в правой части рис.5 и достроим их следующим образом. От чисел столбца-кортежа при заданном d, к которым прибавляли d, двигаясь вправо, теперь будем последовательно вычитать d, двигаясь влево. Получившиеся отрицательные натуральные будем в дальнейшем рассматривать по абсолютной величине. В результате общая картина состоит из 6 бесконечных в оба конца строк, связанных единым опорным модулем d и столбцом d-кортежем. Так образованную строку будем называть кольцевой прогрессией и обозначать $< S_i / d >$.

Теперь уже множество членов “кольцевой прогрессии” это член группы (не только полугруппы) по сложению и умножению. Бинарные отношения (рис.1) действуют и для них. Отметим, что простые-близнецы в $< S_1 / d >$ расположены на местах, равноудаленных от опорного кортежа-столбца.

Другим обобщением арифметических прогрессий может служить конструкция, представляющая слияние двух и более прогрессий из множества (1) в единое, полностью упорядоченное по возрастанию множество членов, образующее бесконечную *квази-прогрессию* с переменной разностью.

Поясним на примере слияния прогрессий S_0, S_1, S_5:

$S_0 / S_1 / S_5 = \{0, 1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 29,$
$30, 31, 35, 36, 37, ..\};$

Поскольку множества членов прогрессий $S_0 \div S_5$ попарно не пересекаются (2) члены всех прогрессий, участвующих в слиянии сохранены. В этом примере последовательность разностей между соседними членами имеет вид:

$D = \{1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, ...\}$,

т.е. циклическая тройка 1,4,1, в сумме равная $d = 6$.

$< S_0 /6>= \{\ldots$	96	90	84	78	72	66	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	…
$< S_1 /6>= \{\ldots$	95	89	83	77	$\boxed{71}$	65	$\boxed{59}$	53	47	$\boxed{41}$	35	$\boxed{29}$	23	$\boxed{17}$	$\boxed{11}$	$\boxed{5}$	1	$\boxed{7}$	$\boxed{13}$	$\boxed{19}$	25	$\boxed{31}$	37	$\boxed{43}$	49	55	$\boxed{61}$	67	$\boxed{73}$	79	85	91	97	…
$< S_2 /6>= \{\ldots$	94	88	82	76	70	64	58	52	46	40	34	28	22	16	10	4	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	…
$< S_3 /6>= \{\ldots$	93	87	81	75	69	63	57	51	45	39	33	27	21	15	9	3	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	…
$< S_4 /6>= \{\ldots$	92	86	80	74	68	62	56	50	44	38	32	26	20	14	8	2	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	…
$< S_5 /6>= \{\ldots$	91	85	79	73	67	61	55	49	43	37	31	25	19	13	7	1	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	…

Рис 5. Столбец опорного кортежа при $d = 6$ и единые строки-“кольцевые прогрессии” $< S_i / d >$ с разностью $d = 6$. Множество членов прогрессии $< S_1 / 6 >$ содержит все простые (рамкой отмечены простые-близнецы >3).

VII. Заключение

Включение в рассмотрение структуры натуральных отображения d-кортежей на структуру глобального d-арного дерева позволяет говорить о топологической составляющей в числовой комбинаторике. Несмотря на всю метафоричность сравнения с галактикой, изучение достаточно отдаленных областей натуральных может иметь общие когнитивные корни с задачами космического телескопа “Хаббл” для изучения отдаленных уголков вселенной. Подобный, разумеется, виртуальный вояджер в глубину натуральных должен представлять спецпроцессор со значительно расширенными нетрадиционными операциями с нетрадиционными операндами (приведенные системы вычетов, мультипликативные функции, работа с числами в остаточных классах, квази-прогрессии и т.п.). Работа по такой тематике лежит в русле отечественной математической науки и связана с такими ее выдающимися представителями как П.Л.Чебышев, И.М. Виноградов, А.О. Гельфонд и другими.

Работа выполняется в рамках гранта РФФИ 16-07-01071.

Библиография

[1] Kevin Ford, Ben Green, Sergei Konyagin, James Maynard, Terence Tao, "Long gaps between primes," arXiv:1412.5029v2 [math.NT], 6 Apr 2015. Available: http://arxiv.org/pdf/1412.5029v2

[2] G. G. Ryabov, V. A. Serov, “On natural numbers structure on the basis of six arithmetical progressions,” International Journal of Open Information Technologies, 2016, vol. 4, no. 4, pp. 49–53. Available (in russian): http://injoit.org/index.php/j1/article/view/277

[3] G. G. Ryabov, V. A. Serov, “Classification of natural numbers based on arithmetic progressions with a difference 6,” International Journal of Open Information Technologies, 2016, vol. 4, no. 12, pp. 13–15. Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/355/314

[4] И.М. Виноградов, *Основы теории чисел.* М.: Наука, 1972.

Infinite arithmetical progressions and global trees in natural numbers structure

G. G. Ryabov, V. A. Serov

***Abstract*—The article is a continuation of the natural numbers structure research on the basis of infinitary structures composition, infinite arithmetical progressions, global d-ary trees and the set of non-negative natural N. The semi-additive canonical form of natural number with the given module d is offered, on the basis of Euclid's algorithm. The definition of the global, directed 6-ary tree (GT) as a graph of nodes marking process by the sequence of natural numbers is given. The choice of the basic modules d for GT structure other than 6 is considered. It is noted also the "galactic" character of GT. The ring progression and the quasi-progression with a variable difference d, as a result of progressions merging are entered.**

***Keywords*—Infinite arithmetical progressions, set of natural numbers, global d-ary tree.**