Численный метод аппроксимации множества решений системы нелинейных неравенств

Ю.Г. Евтушенко[1], М.А. Посыпкин[2], Л.А. Рыбак[3], А.В. Туркин[4]

***Аннотация*—В работе представлен метод приближенной оценки множества решений системы нелинейных неравенств с предопределенной точностью, основанный на концепции неравномерных покрытий. Предложены два подхода к построению аппроксимаций: с использованием глобальной оптимизации для поиска решения на отдельном параллелепипеде покрытия и с применением приближенных оценок максимума и минимума. Выделены их недостатки: время вычислений, в случае использования глобальной оптимизации и точность аппроксимации, в случае применения приближенных оценок экстремумов функции на параллелепипеде. Эффективность предложенных методов иллюстрируется на задаче нахождения рабочей области планарного робота параллельной структуры.**

***Ключевые слова*—Метод неравномерных покрытий, системы нелинейных неравенств, аппроксимация, рабочая область робота**

I. ВВЕДЕНИЕ

Существует много задач, решениями которых являются некоторые множества. Например, при многокритериальной оптимизации ищется множество Парето. В задачах управления динамическими объектами строятся области достижимости. При решении систем равенств и неравенств может возникнуть необходимость нахождения всех решений или их аппроксимации. В [1], [2], [3] рассмотрена аппроксимация выпуклых тел с помощью многогранников. Приближение области достижимости динамических систем исследовалось в [4], [5]. В [6] предложена аппроксимация образа компактного множества при отображении с помощью понятия ε-эффективной оболочки и дан метод ее построения. Следует также отметить работы, посвященные построению расчетных сеток в областях сложной формы [7], [8].

В данной работе представлен метод приближенной оценки множества решений системы нелинейных неравенств с предопределенной точностью. Поиск множества решений осуществляется с использованием концепции неравномерных покрытий. Приводятся два подхода к оценке аппроксимационных множеств: с использованием процедуры глобальной оптимизации и без нее, с применением приближенных оценок. С помощью предлагаемого метода строится внешнее и внутреннее аппроксимационные множества и рассматриваются их свойства. Внутреннее аппроксимационное множество включается во множество решений системы неравенств, а внешнее включает его. Оба множества представлют собой объединения n-мерных параллелепипедов.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 16-19-00148

[1]Ю.Г. Евтушенко — директор Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. evt@ccas.ru

[2]М.А. Посыпкин — заведующий отделом прикладных проблем оптимизации Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. mposypkin@gmail.com

[3]Л.А. Рыбак — профессор кафедры Технологии машиностроения Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова rl_bgtu@intbel.ru

[4]А.В. Туркин — младший научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; доцент кафедры Вычислительной техники Национального исследовательского университета «МИЭТ». aturkin@org.miet.ru

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача определения и описания множества X решений системы неравенств общего вида:

$$\begin{cases} g_j(x) \le 0, j \in \overline{1,m}, \\ a_i \le x_i \le b_i, i \in \overline{1,n}. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть каждая функция $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j \in \overline{1,m}$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любых $x, y \in P$ выполнены неравенства:

$$|g_j(x) - g_j(y)| \le L_j \|x - y\|,\ j \in \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $P = [a,b] = \{x : a_i \le x_i \le b_i, i \in \overline{1,n}\}$ — n-мерный параллелепипед. *Диаметром параллелепипеда* P будем называть величину $d(P) = \|b - a\|$.

Заметим, что система неравенств (1) имеет то же множество решений, что и следующая система:

$$\begin{cases} \phi(x) \le 0, \\ a_i \le x_i \le b_i, i \in \overline{1,n}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\phi(x) = \max_{j=\overline{1,m}} g_j(x)$.

Требуется оценить множество $X \subseteq P \subseteq \mathbb{R}^n$ решений системы (1) с некоторой заданной точностью.

III. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Решение задачи будем искать, используя *покрытие множества* P [9], под которым будем понимать совокупность n-мерных параллелепипедов P_i, $i \in \overline{1,k}$ таких что:

$$P \subseteq \cup_{i \in \overline{1,k}} P_i. \tag{4}$$

Для каждого из параллелепипедов покрытия выполняется одно из трех условий:

$$\max_{x \in P_i} \phi(x) < 0, \tag{5}$$

$$\min_{x \in P_i} \phi(x) > 0, \tag{6}$$

$$\text{условия (5), (6) не выполнены и } d(P_i) \le \delta, \tag{7}$$

где δ — заданная положительная величина, определяющая точность аппроксимации.

Введем следующие обозначения для объединений параллелепипедов: $Q_I = \cup_{i\in I} P_i$ — объединение таких параллелепипедов, для которых выполняется утверждение (5), $I \subseteq \overline{1,k}$ — множество индексов этих параллелепипедов; $Q_E = \cup_{i\in E} P_i$ — объединение таких параллелепипедов, для которых выполняется утверждение (6), $E \subseteq \overline{1,k}$ — множество их индексов; $Q_M = \cup_{i\in M} P_i$ — объединение параллелепипедов, для которых выполняется утверждение (7), $M \subseteq \overline{1,k}$ — множество индексов таких параллелепипедов.

Из определения множества решений вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1: Для того, чтобы параллелепипед P_i, $i \in \overline{1,k}$, был подмножеством множества X решений системы (1) (не содержал решений системы (1)) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5) (выполнялось условие (6)).

Утверждение 2: Справедливы включения

$$Q_I \subseteq X \subseteq Q_I \cup Q_M \tag{8}$$

Доказательство:
Выполнение включения $Q_I \subseteq X$ очевидно ввиду выполнения условия (5) для всех параллелепипедов, включенных в Q_I. Рассмотрим второе включение: $X \subseteq Q_I \cup Q_M$. Предположим, что включение не выполнено. Тогда найдется точка $x \in X$, которая не принадлежит ни Q_I, ни Q_M, а, следовательно, $x \in Q_E$. Учитывая условие (6) и утверждение 1, можно заключить, что $x \notin X$, что приводит к противоречию с предположением. ■

Утверждение 3: Пусть ∂X — граница множества X. Тогда справедливо включение $\partial X \subseteq Q_M$.

Доказательство:
Предположим, что это не так, т.е. найдется точка $x \in \partial X$, не принадлежащая Q_M, а, следовательно, $x \in Q_I$ или $x \in Q_E$. Исходя из условий (5) и (6) $\phi(x) \neq 0$. Очевидно, что для любой точки $x \in \partial X$ выполняется $\phi(x) = 0$, что приводит к противоречию. ■

Определение. Множество X будем называть *регулярным*, если его граница совпадает со множеством решений уравнения $\phi(x) = 0$.

Утверждение 4: Пусть ∂X граница регулярного множества X, тогда любой параллелепипед, для которого выполняется условие (7), содержит точку границы.

Доказательство:
Рассмотрим такой параллелепипед P', для которого справедливо (7). Невыполнение условия (5) приводит к тому, что найдется точка $x \in P'$, для которой $\phi(x) \geq 0$. Из невыполнения условия (6) следует, что найдется такая точка $y \in P'$, что $\phi(y) \leq 0$. Из непрерывности функции ϕ и теоремы о промежуточном значении вытекает, что найдется такая точка $z \in [x, y]$, для которой значение функции $\phi(z) = 0$. Так как множество P' — выпукло, то $z \in P'$. Учитывая регулярность множества решений X, получаем, что z — граничная точка. ■

Введем следующие обозначения и понятия: $B(a,\delta) = \{x \in R^n : \|x - a\| \leq \delta\}$ — *δ-окрестность точки* $a \in R^n$, $B(A,\delta) = \cup_{a\in A} B(a,\delta)$ — *δ-окрестность множества* $A \subseteq R^n$. Рассмотрим множество $X^{-\delta} = X \backslash B(\partial X, \delta)$, полученное из X удалением границы с ее δ-окрестностью, а также множество $X^{+\delta} = X \cup B(\partial X, \delta)$.

Следствие 1: Если множество X регулярно, то справедливо включение

$$Q_M \subseteq B(\partial X, \delta). \tag{9}$$

Доказательство:
Рассмотрим один из параллелепипедов, $i \in M$, $P_i \subseteq Q_M$. Согласно утверждению 4 найдется точка $x \in P_i \cap \partial X$. Так как $d(P_i) \leq \delta$, то $P_i \subseteq B(\partial X, \delta)$. ■

Множества Q_I и $Q_I \cup Q_M$ являются внутренней и внешней аппроксимацией множества X. Представление о точности аппроксимации дает следующая

Теорема 1: Если множество X регулярно, то

$$X^{-\delta} \subseteq Q_I \subseteq X \subseteq Q_I \cup Q_M \subseteq X^{+\delta}. \tag{10}$$

Доказательство:
Справедливость включений $X^{-\delta} \subseteq Q_I$ и $Q_I \cup Q_M \subseteq X^{+\delta}$ непосредственно вытекает из следствия 1. Из этого факта и утверждения 2 следует утверждение теоремы. ■

Для проверки справедливости неравенств (5), (6) требуются процедуры нахождения глобального максимума и минимума функции $\phi(x)$ на n-мерном параллелепипеде. Рассмотрим альтернативный вариант, основанный на использовании верхних и нижних оценок. Справедливо следующее

Утверждение 5: Функция $\phi(x)$ является липшицевой с константой $L = \max_{j\in\overline{1,m}} L_j$.

Доказательство:
Пусть числа $k, l \in \overline{1,m}$ — индексы функций, значения которых для точек x и y соответственно являются максимальными: $g_k(x) = \phi(x)$, $g_l(y) = \phi(y)$.

В случае, когда $k = l$, утверждение верно, что непосредственно следует из (2): $|g_k(x) - g_l(y)| \leq L_k\|x - y\| = L_l\|x - y\| \leq L\|x - y\|$.

Для случая $k \neq l$ рассмотрим следующие варианты: (1) $g_k(x) > g_l(y) > 0$; (2) $0 > g_l(y) > g_k(x)$; (3) $g_k(x) > g_l(y)$, $g_k(x) > 0$, $g_l(y) < 0$.

1) Пусть $g_k(x) > g_l(y) > 0$, тогда $|g(x) - g(y)| = |g_k(x) - g_l(y)| < |g_k(x) - g_k(y)| \leq L_k\|x - y\|$.
2) Пусть $0 > g_l(y) > g_k(x)$, тогда $|g(x) - g(y)| = |g_k(x) - g_l(y)| < |g_l(x) - g_l(y)| \leq L_l\|x - y\|$.
3) Пусть $g_k(x) > g_l(y)$, $g_k(x) > 0$, $g_l(y) < 0$, тогда $|g(x) - g(y)| = |g_k(x) - g_l(y)| < |g_k(x) - g_k(y)| \leq L_k\|x - y\|$

Анатогично рассматриваются три следующих варианта: (1) $g_l(y) > g_k(x) > 0$, (2) $0 > g_k(x) > g_l(y)$, (3) $g_l(x) > g_k(y)$, $g_l(x) > 0$, $g_k(y) < 0$.

Следовательно, $|g_k(x) - g_l(y)| \leq \max(L_k, L_l) \leq L\|x - y\|$. ■

Свойство липшицевости позволяет построить миноранту $\mu_i(x)$ и мажоранту $M_i(x)$ функции $\phi(x)$ на параллелепипеде $P_i = \left[a^{(i)}, b^{(i)}\right]$:

$$\mu_i(x) = \phi(c^{(i)}) - L\left\|x - c^{(i)}\right\|, M_i(x) = \phi(c^{(i)}) + L\left\|x - c^{(i)}\right\|,$$

где $c^{(i)} = \frac{1}{2}\left(a^{(i)} + b^{(i)}\right)$ — центр параллелепипеда P_i.

Очевидно $\mu_i(x) \leq \phi(x) \leq M_i(x)$ при $x \in P_i$. Сформулируем условия на покрывающие множества с использованием эти оценок.

Для каждого из параллелепипедов покрытия выполняется одно из трех условий:

$$\max_{x\in P_i} M_i(x) < 0, \tag{11}$$

$$\min_{x\in P_i} \mu_i(x) > 0, \tag{12}$$

$$\text{условия (11), (12) не выполнены и } d(P_i) \le \delta, \tag{13}$$

где δ — заданная положительная величина, определяющая точность аппроксимации.

Заметим, что экстремумы миноратны и мажоранты находятся аналитически по формулам

$$\begin{aligned} \max_{x\in P_i} M_i(x) &= \phi\left(c^{(i)}\right) + Ld(P_i)/2, \\ \min_{x\in P_i} \mu_i(x) &= \phi\left(c^{(i)}\right) - Ld(P_i)/2, \end{aligned} \tag{14}$$

что делает условия (11), (12) легко проверяемыми.

Очевидно, что утверждения 2 и 3 остаются справедливыми, в отличие теоремы 1, доказательство которой становится неверным при замене функции $\phi(x)$ на ее оценки.

Для $\varepsilon \ge 0$ определим *ε-границу множества* X, множество $\partial_\varepsilon X = \{x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon \le \phi(x) \le \varepsilon\}$.

Лемма 1: Пусть параллелепипед P_i удовлетворяет условию (13). Тогда $c_i \in \partial_\varepsilon X$, где $\varepsilon = \delta L/2$.

Доказательство:
Так как P_i удовлетворяет условию (13), то $\phi\left(c^{(i)}\right) - Ld(P_i)/2 \le 0 \le \phi\left(c^{(i)}\right) + Ld(P_i)/2$. Следовательно $-Ld(P_i)/2 \le \phi\left(c^{(i)}\right) \le Ld(P_i)/2$. По условию леммы $d(P_i) \le \delta$ и $\varepsilon = \delta L/2$. Следовательно $-\varepsilon \le \phi\left(c^{(i)}\right) \le \varepsilon$. Тем самым лемма доказана. ■

Следствие 2: Множество Q_M является подмножеством $B(\delta, \partial_\varepsilon X)$, где $\varepsilon = \delta L/2$.

Рассмотрим множество $X_\varepsilon^{-\delta} = X \setminus B(\delta, \partial_\varepsilon X)$, и множество $X^{+\delta} = X \cup B(\delta, \partial_\varepsilon X)$, где $\varepsilon = \delta L/2$.

Используя введенные понятия, можно сформулировать следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2: Справедливы включения

$$X_\varepsilon^{-\delta} \subseteq Q_I \subseteq X \subseteq Q_I \cup Q_M \subseteq X_\varepsilon^{+\delta}, \tag{15}$$

где $\varepsilon = \delta L/2$.

Доказательство: Включения $X_\varepsilon^{-\delta} \subseteq Q_I$ и $Q_I \cup Q_M \subseteq X_\varepsilon^{+\delta}$ справедливы в силу следствия 2. Из этого факта и утверждения 2 вытекает справедливость теоремы. ■

IV. ПОСТРОЕНИЕ ПОКРЫТИЯ

Рассмотрим алгоритм построения покрытия для аппроксимации множества решений системы (1).

На начальном этапе работы алгоритма 1 создается бинарное дерево T с одним узлом, которому приписывается пометка — исходный параллелепипед P. Вычисляется диаметр указанного параллелепипеда и результат сохраняется в переменную δ_c. Инициализируется переменная L_c, используемая для хранения сведений о текущем уровне бинарного дерева. В основе алгоритма лежит многократное повторение двух операций: выбор всех узлов дерева некоторого уровня и анализ приписанных им пометок-параллелепипедов.

Во внешнем цикле осуществляется отбор всех узлов дерева (N_{L_c}), расположенных на уровне L_c, с последующим переходом на следующий. Во вложенном цикле

Входные данные: P, δ
Выходные данные: Q_I, Q_E, Q_M
$T(1) := P$;
$\delta_c := d(P)$;
$L_c := 1$;
$Q_I := \emptyset$; $Q_E := \emptyset$; $Q_M := \emptyset$;
Пока $\delta_c > \delta$ **:**
  $N_{L_c} := T($*все вершины уровня* $L_c)$;
  Для каждого $N_q \in N_{L_c}$ **:**
    $P_q \leftarrow N_q$;
    Если $\min_{x\in P_q} \phi(x) > 0$ **, тогда**
      $N_q := (P_q,$ "Q_E")
      $Q_E := Q_E \cup P_q$;
      продолжить с другой вершиной из N_{L_c};
    Конец условия
    Если $\max_{x\in P_q} \phi(x) < 0$ **, тогда**
      $N_q := (P_q,$ "Q_I")
      $Q_I := Q_I \cup P_q$;
      продолжить с другой вершиной из N_{L_c};
    Конец условия
    Разбить P_q на два: P_q^l и P_q^r
    $T(N_q, L_c + 1) := (P_q^l), (P_q^r)$
    $\delta_c := \max\left(d(P_q^l),\ d(P_q^r)\right)$
  Конец цикла
  $L_c := L_c + 1$
Конец цикла
$Q_M \leftarrow T($*все вершины уровня* $L_c)$
Возвратить Q_I, Q_E, Q_M

Рис. 1: Псевдокод построения покрытия P для решения задачи приближенной оценки множества решений системы нелинейных неравенств (1) с некоторой заданной точностью δ.

осуществляется перебор узлов N_q из N_{L_c} с проверкой каждого приписанного этому узлу параллелепипеда P_q на выполнение условий (6) и (5). При выполненнии условия (6) узлу приписывается пометка о принадлежности к множеству Q_E. При выполнении условия (5) узлу приписывается пометка опринадлежности к множеству Q_I. В каждом из рассмотренных случаев параллелепипед добавляется к соответствующего множеству. При невыполнении указанных выше условий происходит разбиение текущего параллелепипеда на два: P_q^l и P_q^r, создаются два новых узла, являющихся дочерними к N_q, и им приписываются пометки, содержащие информацию о вновь полученных параллелепипедах. Вычисляется диаметр этих параллелепипедов и значение переменной δ_c обновляется.

На заключительном этапе работы алгоритма сведения о параллелепипедах из множеств Q_I, Q_E и Q_M возвращаются в качестве результата работы алгоритма.

Аналогичным образом может записывается алгоритм для приближенного оценивания значений максимума и минимума функции $\phi(x)$. Для этого проверка условий (6) и (5) заменяется проверкой условий (12) и (11).

V. ОЦЕНКА РАБОЧЕЙ ОБЛАСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РОБОТА

Рассмотренный подход к нахождению множества решений системы нелинейных неравенств может быть при-

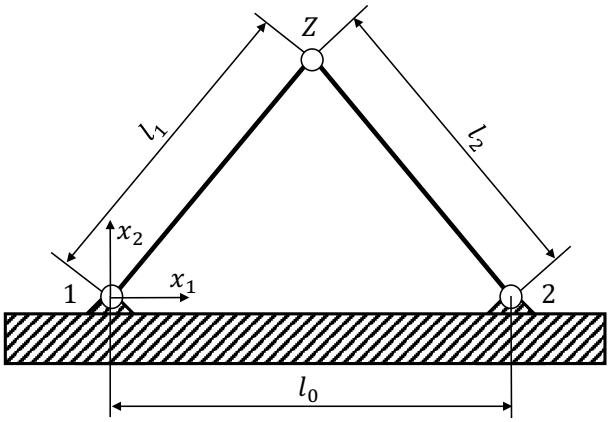


Рис. 2

менен к оценке рабочей области роботов параллельной структуры, под которой понимается множество положений рабочего инструмента робота. Рабочая область X для ряда роботов может быть задана как множество решениий системы (1). Рассмотрим простейший случай параллельного планарного робота ($X \subseteq \mathbb{R}^2$), приведенного на рисунке 2, и соответствующую его рабочей области систему неравенств:

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - (l_1^{max})^2, \\ g_2(x_1,x_2) &= (l_1^{min})^2 - x_1^2 - x_2^2, \\ g_3(x_1,x_2) &= (x_1 - l_0)^2 + x_2^2 - (l_2^{max})^2, \\ g_4(x_1,x_2) &= (l_2^{min})^2 - (x_1 - l_0)^2 - x_2^2, \end{aligned} \tag{16}$$

где x_1, x_2 — координаты рабочего инструмента робота, l_1^{min} и l_1^{max}, l_2^{min} и l_2^{max} — конструктивно возможные минимальные и максимальные длины штанг l_1 и l_2, вместе с l_0 образующие треугольник $l_0 l_1 l_2$.

Необходимо аппроксимировать с некоторой точностью рабочую область этого робота, т.е. определить множество точек на плоскости, в котором может находиться точка Z. Две штанги робота закреплены в точках $1, 2$ с помощью механизмов, позволяющих изменять длины l_1, l_2 и обеспечивающих беспрепятственное вращение штанг вокруг точек закрепления.

Длина горизонтального ребра исходного прямоугольника P не может превышать $l_2^{max} + l_0 + l_1^{max}$, а вертикального — $\min(l_1^{max}, l_2^{max})$, левый нижний угол расположен в точке $(-l_2^{max}, 0)$.

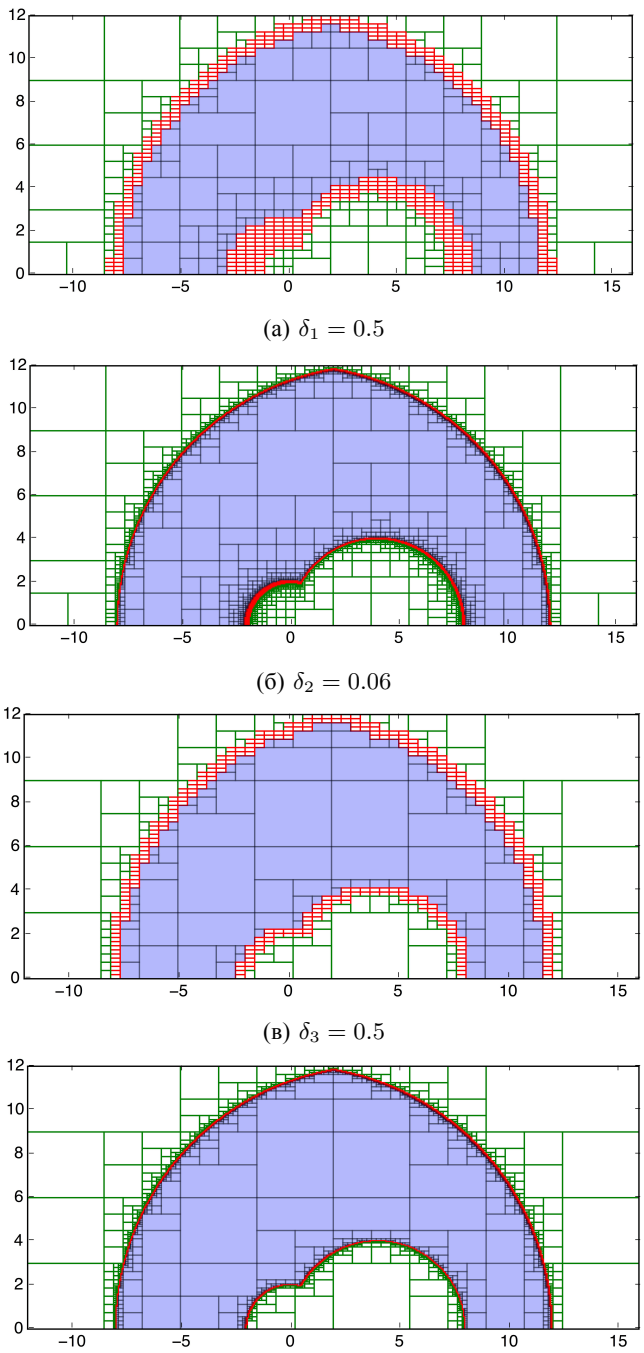
Константы Липшица для функций $g_1, ..., g_4$ и некоторого прямоугольника P_i оцениваются следующим образом:

$$L_1 = L_2 = L_{12} = \sup_{(x_1,x_2)\in P_i} \{\|\nabla g_1(x_1,x_2)\|\}$$
$$L_3 = L_4 = L_{34} = \sup_{(x_1,x_2)\in P_i} \{\|\nabla g_3(x_1,x_2)\|\}.$$

Принимая во внимание утверждение 5, значение константы Липшица для функции $\phi(x_1,x_2)$ и некоторого прямоугольника P_i может быть получено вычислением максимума двух найденных констант:

$$L = \max(L_{12}, L_{34}),$$
$$L_{12} = 2\big(\max(|a_1|,|b_1|)^2 + \max(|a_2|,|b_2|)^2\big)^{1/2},$$
$$L_{34} = 2\big(\max(|a_1 - l_0|,|b_1 - l_0|)^2 + \max(|a_2|,|b_2|)^2\big)^{1/2}.$$

Для проведения эксперимента были выбраны следующие параметры робота: $l_1^{min} = 2$, $l_2^{min} = 4$, $l_1^{max} = l_2^{max} = l^{max} = 12$, $l_0 = 4$. Расчет проводился на персональном компьютере, имеющем четырехъядерный процессор Intel i7 с тактовой частотой 2.2 ГГц и оперативной памятью объемом 16 Гб. Алгоритм был реализован на языке Python с использованием библиотеки *ete* [10][1] для работы с бинарным деревом, которое было выбрано в качестве структуры дланных для хранения информации о каждой итерации общего цикла.



(а) $\delta_1 = 0.5$

(б) $\delta_2 = 0.06$

(в) $\delta_3 = 0.5$

(г) $\delta_4 = 0.06$

Рис. 3: Приближенные оценки множества решений системы (16) для двух значений δ: 0.5 и 0.06, полученные как с использованием оценок (14) (3а,3б) так и с применением процедуры глобальной оптимизации (3в,3г).

[1]Все результаты, представленные в этой работе, были получены с использованием программы на языке Python, опубликованной на GitHub: https://github.com/andreiturkin/INJOIT2016.NUCovering.git

На рис. 3 приведены четыре покрытия, которые аппроксимируют множества решений системы (16), построенные со значениями $\delta_1 = 0.5$ (Рис. 3а), $\delta_2 = 0.06$ (Рис. 3б), а также $\delta_3 = 0.5$ (Рис. 3в) и $\delta_4 = 0.06$ (Рис. 3г). Покрытия, изображенные на рисунках 3в и 3г, получены с использованием оценок (14), а те, что изображены на 3в и 3г — с применением процедуры глобальной оптимизации.

Из приведенных результатов видно, что использование процедуры нахождения точного значения оптимума на прямоугольнике позволяет добиться визуально лучших результатов. Однако, при таком подходе следует учитывать вычислительную сложность. Так, например, при использовании приближенных оценок покрытие, приведенное на рисунке 3а, было получено за 0.03 секунды, в то время как для получения результата, показанного на рисунке 3в, потребовалось около 90 секунд, что объясняется многократным использованием алгоритма глобальной оптимизации, в качестве которого был выбран MIDACO[11] из библиотеки PyOpt[12].

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен подход к приближенной оценке множества решений систем нелинейных неравенств. Получены два способа построения аппроксимаций: с использованием процедуры глобальной оптимизации для поиска решения на параллелепипеде и применяя приближенную оценку максимума и минимума целевой функции. Исследуются свойства таких аппроксимаций и приводится пример их использования для решения задачи нахождения рабочей области планарного параллельного робота. Результаты экспериментов показывают особенности применения каждого из представленных способов построения приближенных оценок множества решений системы нелинейных неравенств. Недостатком применения процедуры глобальной оптимизации является время вычислений, в то время как при использовании подхода к приближенной оценке экстремумов функции на прямоугольнике возникает проблема, связанная с точностью аппроксимации.

Список литературы

[1] Лотов Александр Владимирович, Поспелов Алексей Игоревич. Модифицированный метод уточнения оценок для полиэдральной аппроксимации выпуклых многогранников // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Vol. 48, no. 6. — P. 990–998.

[2] Каменев Георгий Кириллович. Метод полиэдральной аппроксимации шара с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Vol. 54, no. 8. — P. 1235–1248.

[3] Каменев Георгий Кириллович. Эффективность метода уточнения оценок при аппроксимации многомерных шаров многогранниками // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Vol. 56, no. 5. — P. 756–767.

[4] Бушенков Владимир А, Лотов Александр Владимирович. Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — Vol. 20, no. 5. — P. 1130–1141.

[5] Численные методы построения области достижимости динамической системы / Евгений Михайлович Воронов, Анатолий Павлович Карпенко, Оксана Геннадьевна Козлова, Владимир Андреевич Федин // Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Приборостроение». — 2010. — no. 2.

[6] Евтушенко Юрий Гаврилович, Посыпкин Михаил Анатольевич. Детерминированный глобальный метод аппроксимации эффективной оболочки множества // Доклады Академии Наук. — 2014. — Vol. 459. — P. 550–553.

[7] Гаранжа Владимир Анатольевич. Барьерный метод построения квазиизометричных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2000. — Vol. 40, no. 11. — P. 1685–1705.

[8] Гаранжа Владимир Анатольевич, Кудрявцева Людмила Николаевна. Построение трехмерных сеток Делоне по слабоструктурированным и противоречивым данным // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Vol. 52, no. 3. — P. 499–520.

[9] Евтушенко Юрий Гаврилович, Посыпкин Михаил Анатольевич. Метод неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации с гарантированной точностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Vol. 53, no. 2. — P. 209–224.

[10] Huerta-Cepas Jaime, Serra François, Bork Peer. Ete 3: reconstruction, analysis, and visualization of phylogenomic data // Molecular biology and evolution. — 2016. — Vol. 33, no. 6. — P. 1635–1638.

[11] Schlüter Martin, Egea Jose A, Banga Julio R. Extended ant colony optimization for non-convex mixed integer nonlinear programming // Computers & Operations Research. — 2009. — Vol. 36, no. 7. — P. 2217–2229.

[12] Perez Ruben E., Jansen Peter W., Martins Joaquim R. R. A. pyOpt: A Python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization // Structures and Multidisciplinary Optimization. — 2012. — Vol. 45, no. 1. — P. 101–118.

Numerical method for approximating the solution set of a system of non-linear inequalities

Yuri G. Evtushenko, Mikhail A. Posypkin, Larisa A. Rybak, Andrei V. Turkin

***Abstract*—This paper presents a method of finding an approximation to the solution set of systems of nonlinear inequalities, which is based on the non-uniform covering concept. Two approaches to constructing approximations are discussed: the first one is based on using a global optimization technique to get a solution for a box of the covering, the second one relies on a optimum approximation technique to avoid the drawbacks of the first approach. We point out the following features of these approaches: the amount of time that the program takes to solve the problem by using global optimization, the precision of the solution when using extrema approximations for a box of the covering.**

***Keywords*—the non-uniform covering concept, systems of nonlinear inequalities, approximation, workspace of a manipulator.**