

Исследование малых колебаний пластинки в потоке среды

Д.В. Беляков

Аннотация – Работа посвящена построению и исследованию математической модели автоколебаний аэродинамического профиля в потоке среды. В качестве модели воздействия среды на тело принята модель квазистатического обтекания пластинки средой. Предложена программа, позволяющая проводить численные исследования устойчивости состояния покоя для исследуемой модели.

Ключевые слова – Автоколебания, флаттер, пластинка

I. ВВЕДЕНИЕ

Каждое время выдвигает на первый план свою научно-техническую задачу. В 30-х годах прошлого века ею стало развитие авиации. Пожалуй, наиболее острой в то время проблемой был флаттер – один самых распространенных видов аэроупругих колебаний. М.В. Келдыш математически показал, что флаттер имеет резонансную природу. Чтобы избежать резонанса при движении крыла в воздушном потоке, он предложил соответствующим образом перераспределить массы вдоль крыла и так расположить упругие элементы, чтобы избежать совпадения собственных частот колебаний крыла с частотами вынуждающих внешних сил. Своими работами учёный на годы вперёд определил, как нужно решать на практике задачи защиты от флаттера. В 1942 году он был награждён Сталинской премией. В 1946 году М. В. Келдыша избрали действительным членом Академии наук, а впоследствии – её президентом. Результаты М.В.Келдыша не только привели к разработке простых и надёжных мер предотвращения флаттера, но и стали основой нового раздела науки о прочности авиационных конструкций. В настоящее время проблема флаттера также нередко встречается. В 2010 году во время сильного ветра семикилометровый волгоградский мост испытывал сильные колебания. Машины подбрасывало и переворачивало в воздухе на 180 градусов. Лишь по счастливой случайности никто не пострадал. Конструкторы, проектировавшие мост, не учли возможность резонансных колебаний при сильном ветре.

При детальном изучении флаттера почти во всех случаях обнаруживаются нелинейные аэродинамические эффекты. Однако в ряде ситуаций оказалось возможным успешно решить задачу на основе линейных аналитических подходов. Рассмотрим модельную задачу о флаттере, в которой можно использовать такие подходы.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается модельная задача о теле, представляющем из себя пластинку, закрепленную с помощью двух упругих элементов и совершающей автоколебания в потоке среды (см. рисунок 1). Введем неподвижную систему координат XOY . Будем считать, что в положении покоя пластинка занимает положение равновесия, в котором она ориентирована навстречу потоку. Будем считать, что пластинка может двигаться только по прямой BD , а силы деформации элементов крепления зависят от отклонений линейным образом и сводятся к восстанавливающей силе $F = -kx$ и возвращающему моменту $M = -c\vartheta$

Аэродинамические силы, приложенные к телу, приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины [1]-[5], [7]-[13]. Аналогичные задачи по математическому моделированию проводились также в работах [14]-[16].

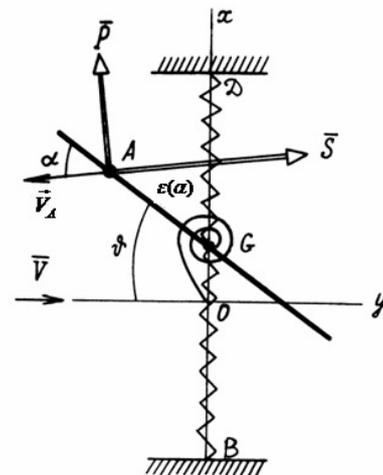


Рис. 1 Рассматриваемое тело

В рассматриваемой модели предполагается, что центр давления пластинки точку A можно считать подвижной относительно пластинки. Сдвиг центра давления описывается функцией $\epsilon(\alpha)$. Зависимость $\epsilon(\alpha)$ определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными [6]. Типичный вид $\epsilon(\alpha)$ (для удлинения $\lambda = 8$) представлен на рисунке 4. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим на две составляющие: сила

Статья получена 10 февраля 2016.

Д. В. Беляков, к.т.н., доцент, Московского Авиационного Института (Национального исследовательского университета), г. Москва (e mail: pm@mati.ru)

сопротивления \vec{S}_A , направленная против скорости \vec{V}_A точки А относительно потока среды, и подъемная сила \vec{P}_A , направленные ей ортогонально. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha + \delta)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha + \delta)V_A^2$$

где α - угол атаки между вектором \vec{V}_A и пластинкой p, s - аэродинамические функции углов атаки, c_x, c_y - безразмерные аэродинамические функции (см. рис. 2), ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки

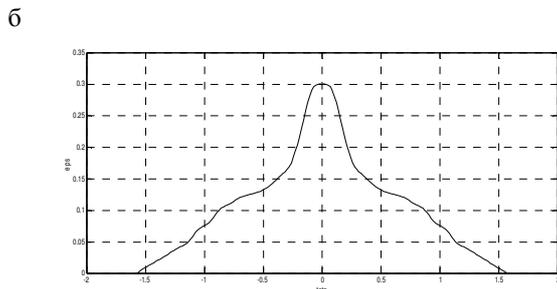
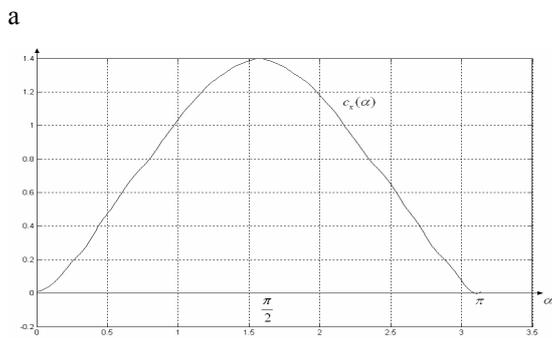
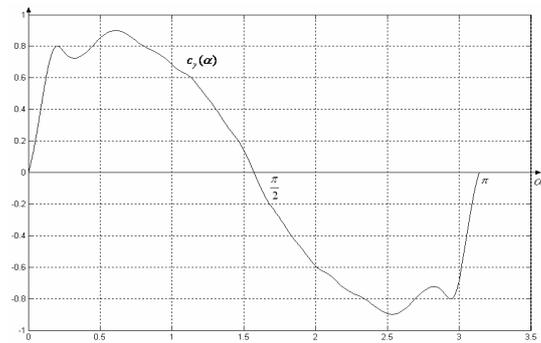


Рис. 2 Аэродинамические функции:
 а) подъемной силы; б) силы сопротивления
 в) сдвига центра давления

Составим уравнения движения рассматриваемого тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координату x центра масс G , совпадающего с серединой пластинки и угол ϑ отклонения пластинки от горизонтали.

Тогда теорема о движении центра масс в проекции на ось OY и теорема об изменении кинетического момента будут иметь вид:

$$m\ddot{x} = -s(\alpha)V_A(\dot{x} + \varepsilon(\alpha)\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + p(\alpha)V_A(V - \varepsilon(\alpha)\dot{\vartheta}\sin\vartheta) - kx$$

$$J\ddot{\vartheta} = s(\alpha)V_A^2\sin\alpha + p(\alpha)V_A^2\cos\alpha - c\vartheta$$

Кинематические соотношения, связывающие V_A, α с $x, \dot{x}, \vartheta, \dot{\vartheta}$, имеют вид:

$$V_A \sin\alpha = V \sin\vartheta - \dot{x}\cos\vartheta - \varepsilon(\alpha)\dot{\vartheta}$$

$$V_A \cos\alpha = \dot{x}\sin\vartheta + V\cos\vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (1)-(2)

III. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Будем считать, что пластинка совершает малые колебания около положения покоя. Исследуем устойчивость тривиального положения равновесия $x = 0, \vartheta = 0$ по первому приближению. Линеаризуем уравнения движения (1) - (2) при $x \rightarrow 0$ и $\vartheta \rightarrow 0$

После несложных преобразований уравнения малых колебаний пластинки примут вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + (p'_0 + s_0)V\dot{x} + p'_0\varepsilon_0V\dot{\vartheta} - p'_0V^2\vartheta = 0 \\ J\ddot{\vartheta} + cx + (p'_0 + s_0)V\varepsilon_0\dot{x} + (p'_0 + s_0)V\varepsilon_0^2\dot{\vartheta} - (p'_0 + s_0)V^2\varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

Где $p'_0 = p'(0), s_0 = s(0), \varepsilon_0 = \varepsilon(0)$

Выпишем характеристическое уравнение системы (3)

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= mJ \\ a_1 &= (p'_0 + s_0)[mV\varepsilon_0 + JV] \\ a_2 &= -m[(p'_0 + s_0)V^2\varepsilon_0 - c] + kJ \\ a_3 &= -(p'_0 + s_0)V[(p'_0 + s_0)V^2\varepsilon_0 - c] - p'_0(p'_0 + s_0)V^3 \\ a_4 &= -p'_0(p'_0 + s_0)V^3 \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости тривиального положения равновесия $x = 0, \vartheta = 0$

используем критерий Гурвица. Для того чтобы избежать громоздких выкладок, проведем численные исследования при различных значениях параметров:

m, J, V, k, c и проведем параметрический анализ устойчивости по первому приближению.

IV. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Используем полученные выше основные аналитические результаты для численного исследования устойчивости по первому приближению с помощью математического пакета MATLAB 7. Приведем программу, которая реализует критерий Гурвица для уравнения (4) и изображает на плоскости параметров m, J область устойчивости при различных значениях скорости потока. В начале работы программы вводятся основные параметры m, J, V, k, c . Далее используются аэродинамические функции $c_x(\alpha), c_y(\alpha), \varepsilon(\alpha)$ для пластинки с удлинением $\lambda = 8$, которые являются экспериментальными данными и получены из публикации [6]. Далее применяется критерий Гурвица. При выполнении условий критерия Гурвица устойчивая точка изображается на плоскости m, J зеленым крестиком. В противном случае, неустойчивая точка изображается красной звездочкой.

```
% Программа исследования устойчивости
автоколебаний пластинки
format long
% Ввод констант
splast=0.32
a2=splast/8
a=sqrt(a2)
r=8*a
r0=1.27;
J=0.1
m=0.9
V=0.5
k=0.01
c=0.05
nap=0.5*splast*r0
% Ввод переменных
hh=(pi*5)/180
alfa=-0.5*pi:(pi*5)/180:0.5*pi
s=[1.4 1.38 1.35 1.3 1.25 1.17 1.09 0.99
0.89 0.79 0.71 0.61 0.5 0.4 0.28 0.2 0.11
0.02 0.01 0.02 0.11 0.2 0.28 0.4 0.5 0.61
0.71 0.79 0.89 0.99 1.09 1.17 1.25 1.3
1.35 1.38 1.4];
p=[0 -0.17 -0.28 -0.4 -0.5 -0.6 -0.65 -
0.72 -0.77 -0.81 -0.87 -0.9 -0.87 -0.79 -
0.73 -0.75 -0.78 -0.4 0 0.4 0.78 0.75
0.73 0.79 0.87 0.9 0.87 0.81 0.77 0.72
0.65 0.6 0.5 0.4 0.28 0.17 0];
e=[0. 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.07 0.08
0.1 0.11 0.12 0.125 0.13 0.14 0.155 0.175
0.23 0.29 0.3 0.29 0.23 0.175 0.155 0.14
```

```
0.13 0.125 0.12 0.11 0.10 0.08 0.07 0.05
0.040 0.03 0.02 0.01 0.]
s0=nap*s(19)
p1=nap*(p(19)-p(18))/hh
L0=nap*e(19)
a0=m*J
a1=m*(p1+s0)*V*L0+J*(p1+s0)*V
a2=((p1+s0)^2)*L0*V*V+k*J-
m*((p1+s0)*V*V*L0-c)
a3=-(p1+s0)*V*((p1+s0)*V*V*L0-c)-
p1*(p1+s0)*V*V*V
a4=-p1*(p1+s0)*V*V*V
DEL1=a1;
delta1=DEL1
DEL2=[a1 a3;a0 a2]
delta2=det(DEL2)
DEL3=[a1 a3 0;a0 a2 a4;0 a1 a3];
delta3=det(DEL3)
if(delta1>0 & delta2>0 & delta3>0)
ust=1
disp('система устойчива');
plot(m, J, 'x G')
grid on
else
ust=0
disp('система неустойчива');
xlabel('m')
ylabel('J')
title('V=0.5')
plot(m, J, '* R');
grid on
end;
hold on
```

Приведем некоторые результаты работы программы:

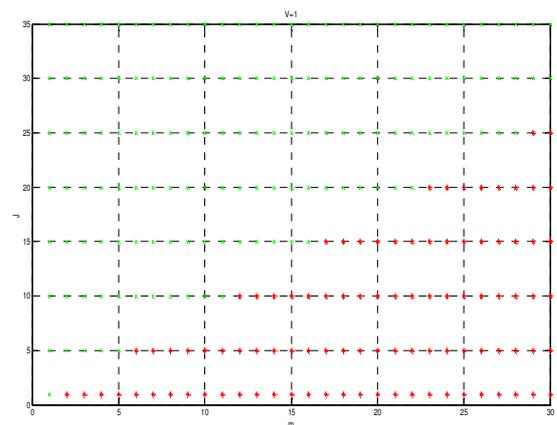


Рис. 3. Область устойчивости при скорости потока $V=1$ м/с

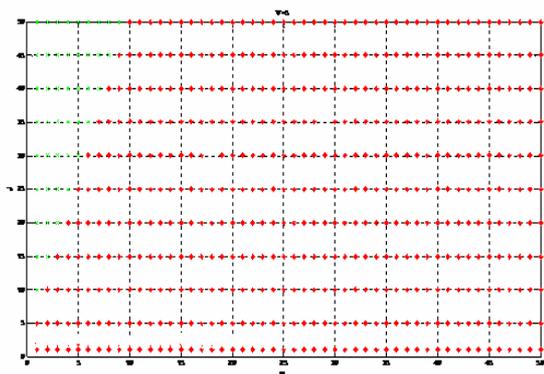


Рис. 4. Область устойчивости при скорости потока $V=5$ м/с

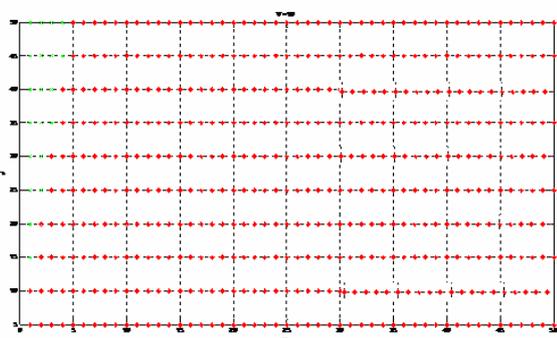


Рис. 5. Область устойчивости при скорости потока $V=10$ м/с

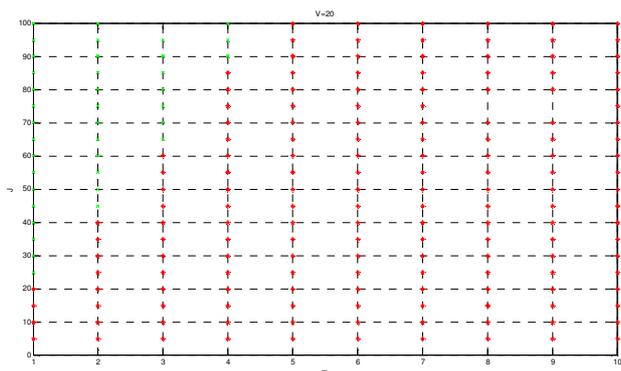


Рис. 6. Область устойчивости при скорости потока $V=20$ м/с

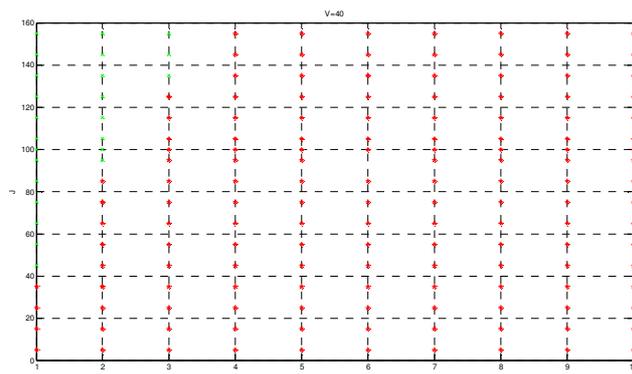


Рис. 7. Область устойчивости при скорости потока $V=40$ м/с

По результатам численных расчетов можно сделать следующие выводы:

Область устойчивости представляет собой множество точек, лежащее в верхней части первого квадранта. Граница области устойчивости является прямой. При увеличении скорости потока граница смещается вверх и область устойчивости уменьшается.

Таким образом, скорость потока - это самый существенный фактор, влияющий на устойчивость тривиального положения равновесия пластинки.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе:

1. Создана математическая модель колебаний пластинки.
2. Проведены численные исследования, в которых реализован критерий Гурвица и изображена область устойчивости при различных значениях параметров m, J, V, k, c . Аналогичные задачи по математическому моделированию проводились также в работах [14]-[16]

Библиография

- [1] Беляков Д.В., Самсонов В.А., Филиппов В.В. «Исследование движения несимметричного тела в сопротивляющейся среде». Издательство «МЭИ», журнал «Вестник МЭИ», выпуск № 4 2006 г., стр. 5-10.
- [2] Беляков Д.В. "Исследование и особенности математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде". Издательство «Новые технологии», журнал "Мехатроника, Автоматизация, Управление". Выпуск № 11. 2007 г., стр. 20-24
- [3] Локшин Б.Я. , Привалов В.А., Самсонов В.А. "Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде". Издательство Московского университета. 1992.
- [4] Паршин Д.Е. Самсонов В.А. «Качественный анализ в задаче о движении аэродинамического маятника.»1992г. (МГУ НИИмеханики, отчет 419).
- [5] Б.Я. Локшин, В.А. Привалов, В.А. Самсонов «Качественный анализ движения твердого тела в

сопротивляющейся среде». Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986 г.

[6] Табачников В.Г. «Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки.» Труды ЦАГИ 1974 г. выпуск 1621

[7] Strickland J.N. , Smith T. and Sun K. , "A vortex Model of the Darrious Turbine: An analytical and experimental study", Final Report submitted to Sandia Laboratories on contract # 13-5602, 1982

[8] Г.И. Шоломович, В.П. Карликов, О.В. Зверев «Исследование по оптимизации ортогональных энергоагрегатов для использования энергии воздушных и водных течений. Оценка влияния кривизны и неоднородности потока на аэродинамические характеристики профиля», -М., 1990 г. -33 л. (МГУ. НИИ механики, отчет 3910)

[9] Paraschivoiu J., "Double Multiple Streamtube model with Recent Improvements", Journal of Energy, vol.7 no.3

[10] В.Ф. Журавлев Д.М. Климов «Прикладные методы в теории колебаний» Издательство «Наука» 1988 г.

[11] Самсонов В.А. Беляков Д.В. «Оптимизация движения спускающегося авторотирующего тела». Седьмой Международный Аэрокосмический Конгресс IAC'07. Полные доклады. 27-31 августа 2012 г., Москва, Россия. Электронный вид. Регистрационный номер: ISBN 7-85312-056-7

[12] Беляков Д.В. Имитационное моделирование спуска осесимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде. Девятая Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ образование» 13-15 ноября 2014 г. Сборник трудов стр. 856-864

[13] Беляков Д. В. Оптимизация спуска осесимметричного авторотирующего тела в воздушной среде. Международный журнал открытых информационных технологий <http://injoit.org> .Регистрационный номер: ISSN: 2307-8162 Том 3, № 2 (2015)

[14] Костяной Д. С., Мокряков А. В., Цурков В. И. Решение модели сбалансированного распределения ресурсов в условиях ограниченности редуцированными методами. Журнал: Известия РАН. Теория и системы управления 2014 г. № 4 Страницы: 43-48

[15] Беляков Д. В. Математическое моделирование движения спуска осесимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде. Международный журнал открытых информационных технологий <http://injoit.org> .Регистрационный номер: ISSN: 2307-8162 Том 3, № 3 (2015)

[16] Беляков Д.В. Задача об автоколебаниях пластинки в потоке среды. Журнал Современные информационные технологии и ИТ образование. Том 2 (№11) 2015. Издательство Московского университета. Страница 554. Опубликовано при поддержке РФФИ (грант № 15-07-20760 г)

Study of the small fluctuations of the plate in flow of the ambience

D.V. Belyakov

Abstract – This paper is dedicated to building and study to mathematical model autorotating aerodynamic profile in a flow of the ambience. As the models of the influence of the ambience on a body is accepted model quasistatic flow around plates by the ambience. We propose the program allowing conduct the numerical studies to a stability of the condition rest for under investigation model.

Keywords - fluctuations, flatter, plate