# Исследование и анализ кредитных рисков методами актуарной математики

Беляевских Е.А.

***Аннотация* — В последнее десятилетие приобрела актуальность задача разработки моделей, позволяющих минимизировать кредитные риски посредством страхования кредитов от невыплат. В статье описывается модель страхования кредитного риска, построенная на основе концепций актуарной математики. Рассматриваются конкретные примеры применения построенной модели на практике при помощи банковских статистических данных.**

***Ключевые слова* — страхование кредита, кредитный риск, актуарная приведенная стоимость страхования кредита.**

## I. Введение

Банки, выдавая кредиты, неизбежно несут потери, с ними связанные. Существует риск невозврата заемщиком средств, взятых у банка. Банки применяют различные методы и стратегии, чтобы сократить кредитные риски. Один из таких методов – это страхование данных рисков.

Задача страхования кредитных рисков в наше время стоит очень остро, поскольку кредиты берутся всеми и повсеместно, и точно оценить возможные потери может быть достаточно сложно. Страхуя риск, связанный с невозвратом кредита, банк частично или полностью перекладывает потери по данному договору на страховую компанию, минимизируя таким образом собственные потери.

В отличие от таких разделов страхования, как, например, страхование жизни или имущества, механизмы страхования кредитных рисков на сегодняшний день всё ещё недостаточно развиты, поскольку сама система страхования кредитов появилась сравнительно недавно. В России сейчас лишь немногие банки имеют в некоторой мере развитую схему страхования кредитных рисков.

В статье описываются основные концепции актуарной математики, и на их строится модель для вычисления стоимости страхования кредита. Для оценки предложенной модели используются статистические банковские данные.

Статья получена 5 июня 2013. Работа представляет собой результат магистерской диссертации.

Е.А. Беляевских, студентка магистратуры Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова (e-mail: elena.belyaevskikh@gmail.com)

## II. Основные понятия актуарной и финансовой математики

Рассмотрим некоторые понятия актуарной математики, которые далее будут использоваться в этой работе. Будем при этом ориентироваться на хорошо разработанную область страхования жизни.

*Продолжительность предстоящей жизни для лица в возрасте x*

Рассмотрим новорожденного. Для него время предстоящей жизни $X$(иначе, возраст в момент смерти) является непрерывной случайной величиной. Обозначим функцию распределения этой случайной величины $F_X(x)$.

$$F_X(x) = P(X \le x), \qquad x \ge 0.$$

Положим

$$s(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x), \quad x \ge 0.$$

Функцию $s(x)$ будем называть функцией дожития. Для любого $x > 0$ функция $s(x)$ является вероятностью того, что новорожденный доживет до возраста $x$.

Будем обозначать $(x)$ человека в возрасте $x$ лет. Продолжительность предстоящей жизни этого человека $(x)$ обозначается $T(x)$. Также нам потребуются следующие обозначения:

$${}_tp_x = P[(x)\text{доживет до возраста } x + t\text{лет}],$$

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = P[(x)\text{не доживет до возраста } x + t\text{лет}].$$

Несложно заметить, что

$${}_xp_0 = s(x), \qquad x \ge 0.$$

${}_tp_x$и ${}_tq_x$ можно также записать следующим образом:

$${}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Существует символ, обозначающий более общее событие, состоящее в том, что $(x)$ проживет $t$ лет и умрет в течение последующих $u$ лет:

$${}_{t|u}q_x = P[t < T(x) \le t+u] = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x.$$

Соответственно,

$${}_{t|u}p_x = 1 - {}_{t|u}q_x.$$

Запишем ${}_{t|u}q_x$ через функции дожития:

$${}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} =$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t+u) - s(x+t)}{s(x+t)} = {}_tp_x \; {}_uq_{x+t}.$$

Обозначим $l_x$ число людей, доживших до возраста $x$. Вероятность для лица $(x)$ прожить ещё один год равна

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Вероятность прожить $n$ лет равна

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\cdots\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}. $$

*Интенсивность смертности*

Введем понятие интенсивности смертности $\mu(x)$:

$$ \mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)} \qquad (1). $$

Для каждого возраста $x$ эта функция дает значение в точке $x$ случайной величины $X$ при условии дожития до возраста $x$. В теории надежности эта величина называется интенсивностью отказов. В актуарной математике она называется интенсивностью смертности. В этой работе будем использовать название «интенсивность отказов», поскольку оно лучше согласуется с процессом кредитных выплат.

Выясним, как связаны величины ${}_np_x$ и $\mu(x)$. Заменим в формуле $(1)$ $x$ на $y$ и получим

$$ -\mu(y)dy = d\ln s(y). $$

Интегрируя это выражение от $x$ до $x+n$, получим:

$$ -\int_x^{x+n} \mu(y)\,dy = \ln\frac{s(x+n)}{s(x)} = \ln {}_np_x . $$

Отсюда

$$ {}_np_x = e^{\left[-\int_x^{x+n}\mu(y)dy\right]}. $$

*Некоторые понятия финансовой математики*

Нам потребуются также некоторые понятия, используемые в финансовой математике. Будем обозначать $i$ ставку банковского процента. Введем величину $d$.

$d$ – авансовый номинальный процентный доход, или учетная ставка,

$$ d = \frac{i}{1+i}. $$

Для удобства введем величину коэффициента дисконтирования $v = \frac{1}{1+i}$. Она понадобится нам при учете дисконтирования в расчетах выплат по кредиту.

В случае непрерывного начисления процента и непрерывных выплат аналогом дискретной процентной ставки $i$ является непрерывная процентная ставка $\delta$. В этом случае принимается аппроксимация

$$ 1 + i = e^{\delta}. $$

Из этого выражения можно выразить $\delta$:

$$ \delta = \ln(1+i). $$

## III. Расчет актуарной приведенной стоимости страхования кредита

Предположим, что заемщик должен выплатить банку сумму в размере $C$. Сумма выплачивается за $n$ итераций, по $\frac{C}{n}$ за один раз. Необходимо учесть процент, который банк требует за возможность такой рассрочки. Пусть банковская ставка равна $100\,i$ процентам за некоторый промежуток времени, например, год. Тогда по окончании первого года заемщик выплатит банкусумму $\frac{C}{n}(1+i)$, по окончании второго года – $\frac{C}{n}(1+i)^2$, и т.д. По окончании $n$-го года заемщик выплатит банку сумму $\frac{C}{n}(1+i)^n$. Таким образом, финансовая приведенная стоимость этого кредита равна

$$ C_n = \frac{C}{n}\left((1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^n\right) = $$
$$ = \frac{C}{n}(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{C}{n}\frac{(1+i)^n-1}{d}. $$

В вышеописанном случае у нас не возникает сомнений относительно платежеспособности клиента, мы предполагаем, что он выплатит долг по кредиту полностью.

Предположим теперь, что клиент выплачивал долг банку за $k$ итераций, $k \in [1,\ n-1]$, но не смог погасить задолженность по кредиту до конца. Чтобы гарантированно не потерять свои средства, банк может заключить договор со страховой компанией, с тем, чтобы она выплатила банку сумму, которую не смог выплатить клиент. Получаем, что страховая компания выплатит банку сумму

$$ C_k = \frac{C}{n}\left((1+i)^{k+1}+\cdots+(1+i)^n\right) = $$
$$ = \frac{C}{n}(1+i)^{k+1}\frac{(1+i)^{n-k}-1}{i} = \frac{C}{n}\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)^{k+1}}{i}. $$

Теперь необходимо выяснить, за какую цену можно купить такой страховой полис. Мы не можем заранее знать, выплатит ли клиент полностью свой кредит, или же выплатит только некоторую часть. Относительно размера этой части мы тоже можем лишь строить предположения. Таким образом, в нашей модели появляется элемент неопределенности.

Будем использовать известную в актуарной математике величину ${}_kp_x$ в несколько ином контексте. Обозначим как ${}_kp_x$ вероятность того, что кредит, который выплачивали $x$ периодов, будут выплачивать ещё по крайне мере $k$ периодов. Аналогично, ${}_kq_x$ – вероятность того, что выплаты по этому кредиту прекратятся в течение первых $k$ периодов. Тогда величина ${}_kp_x\, q_{x+k}$ – это вероятность того, что кредит «возраста» $x$ будет выплачиваться ещё $k$ периодов, а затем выплаты по нему прекратятся.

На основании вышеприведенных рассуждений, а также с учетом дисконтирования на момент $k+1$, получаем актуарную приведенную стоимость страхования кредита, т.е. стоимость страховки с учетом неопределенностей. Обозначим её $A_c$.

$$ A_c = \sum_{k=1}^{n} C_k v^{k+1}\ {}_kp_x\, q_{x+k} = \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+i)^{n-k}-1}{i}\ {}_kp_x\, q_{x+k}. $$

В случае непрерывныхвыплат

$$ A_c = \frac{C}{(e^{\delta}-1)n}\int_1^n \left(e^{\delta}\right)^{n-t}\ {}_tp_x\, q_{x+t}dt. $$

Далее рассмотрим полученное выражение в контексте различных моделей актуарной математики.

*Постоянная интенсивность отказов*

Выше была получена формула для расчета актуарной приведенной стоимости страхования кредита. Помимо множителей, зависящих только от размера выданного кредита и ставки банковского процента, в ней присутствуют компоненты, значения которых зависят ещё и от выбора модели их оценки. Как было показано ранее,

$$ {}_kp_x = e^{-\int_x^{x+k}\mu(y)dy}, $$

$$q_{x+k} = 1 - \, p_{x+k} \, = \, 1 - e^{-\int_{x+k}^{x+k+1} \mu(y)dy}.$$

Эти величины зависят от интенсивности отказов $\mu$, оценить которую можно по-разному. Предположим, что $\mu = const$. Тогда

$$\int_x^{x+k} \mu \, dy = \, \mu(x + k - x) \, = \, \mu k \, ,$$
$$_k p_x \, = \, e^{-\mu k}, \; q_{x+k} = 1 - e^{-\mu}.$$

$$A_c = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i} \, {}_k p_x \, q_{x+k} =$$
$$= \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i} e^{-\mu k} (1 - e^{-\mu}) =$$
$$= \frac{C}{n} (1 - e^{-\mu}) \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i} e^{-\mu k} =$$
$$= \frac{C}{n} (1 - e^{-\mu}) \frac{1}{i} \left[ \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} e^{-\mu k} - \sum_{k=1}^{n} e^{-\mu k} \right] =$$
$$= \frac{C}{ni} (1 - e^{-\mu}) \left[ \frac{1}{e^{\mu n}} \sum_{k=1}^{n} [(1+i) e^{\mu}]^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} e^{-\mu k} \right] =$$
$$= \frac{C}{ni} (1 - e^{-\mu}) \left[ \frac{[(1+i) e^{\mu}]^n - 1}{[(1+i) e^{\mu} - 1] e^{\mu n}} - e^{-\mu} \frac{1 - e^{-\mu n}}{1 - e^{-\mu}} \right].$$

Рассмотрим теперь случай, когда проценты начисляютсянепрерывно:

$$A_c = \frac{C}{ni} (1 - e^{-\mu}) \int_1^n ((1+i)^{n-t} - 1) e^{-\mu t} dt =$$
$$= \frac{C}{n(e^{\delta} - 1)} (1 - e^{-\mu}) \int_1^n (e^{\delta(n-t)} - 1) e^{-\mu t} dt =$$
$$= \frac{C}{n(e^{\delta} - 1)} (1 - e^{-\mu}) \int_1^n (e^{\delta n - \delta t - \mu t} - e^{-\mu t}) dt =$$
$$= \frac{C}{n(e^{\delta} - 1)} (1 - e^{-\mu}) \left[ \int_1^n (e^{\delta n - \delta t - \mu t}) dt - \int_1^n e^{-\mu t} dt \right] =$$
$$= \frac{C}{n(e^{\delta} - 1)} (1 - e^{-\mu}) \left[ \frac{e^{\delta n - (\delta + \mu) t}}{-(\delta + \mu)} \Bigg|_1^n - \frac{e^{-\mu t}}{-\mu} \Bigg|_1^n \right] =$$
$$= \frac{C}{n} \frac{(1 - e^{-\mu})}{(1 - e^{\delta})} \left[ \frac{e^{-\mu} - e^{-\mu n}}{\mu} - \frac{e^{\delta(n-1) - \mu} - e^{-\mu n}}{\delta + \mu} \right].$$

*Модель де Муавра*

В модели, предложенной в 1729 году английским математиком французского происхождения Абрахамом де Муавром, интенсивность отказовприближается функцией $\mu(x) = \frac{1}{\omega - x}$, где $x$ – возраст человека, $\omega$ – некоторая константа – предельный возраст жизни. В нашем случае $x$ – количество периодов уже произведенных выплат по кредиту.

Согласно данной модели,

$$_k p_x \, = \, e^{-\int_x^{x+k} \frac{1}{\omega - y} dy} = 1 - \frac{k}{\omega - x},$$
$$q_{x+k} \, = \, 1 - e^{-\int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{\omega - y} dy} = \frac{1}{\omega - x - k}.$$

Тогда

$$A_c = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i} \, {}_k p_x \, q_{x+k} =$$
$$= \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i} \left( 1 - \frac{k}{\omega - x} \right) \left( \frac{1}{\omega - x - k} \right).$$

Опуская промежуточные вычисления, получим окончательное выражение для $A_c$:

$$A_c = \frac{C}{ni} \frac{1}{\omega - x} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right].$$

В случае непрерывного начисления процентов

$$A_c = \frac{C}{n(e^{\delta} - 1)} \frac{1}{\omega - x} \left[ \frac{e^{\delta(n-1)} - 1}{\delta} - n + 1 \right].$$

*Модель Мэйкхема*

В 1860 году Мэйкхем предложил приближать интенсивность смертности функцией вида $A + Be^{\alpha x}$. Постоянное слагаемое $A$ позволяет учесть риски для жизни, связанные с несчастными случаями, а член $Be^{\alpha x}$ учитывает влияние возраста на смертность. Пусть

$$\mu(x) \, = \, A + Be^{\alpha x}.$$

Тогда

$$_k p_x \, = \, e^{-\int_x^{x+k} (A + Be^{\alpha y}) dy} \, = \, e^{-\left( Ak + \frac{Be^{\alpha x}(e^{\alpha k} - 1)}{\alpha} \right)},$$

$$q_{x+k} = 1 - e^{-\int_{x+k}^{x+k+1} (A + Be^{\alpha y}) dy} =$$
$$= 1 - e^{-\left( A + \frac{Be^{\alpha(x+k)}(e^{\alpha} - 1)}{\alpha} \right)}.$$

Выражение для вычисления актуарной приведенной стоимости кредита в этом случае выглядит следующим образом:

$$A_c = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i} \, {}_k p_x \, q_{x+k} =$$
$$= \frac{C}{ni} \sum_{k=1}^{n} [(1+i)^{n-k} - 1] *$$
$$* \left[ e^{-\left( Ak + \frac{Be^{\alpha x}(e^{\alpha k} - 1)}{\alpha} \right)} - e^{-\left( A(k+1) + \frac{Be^{\alpha x}(e^{\alpha(k+1)} - 1)}{\alpha} \right)} \right].$$

В случае, когда проценты начисляются непрерывно, актуарную приведенную стоимость можно вычислить по формуле

$$A_c = \frac{C}{n(e^{\delta} - 1)} *$$
$$* \int_1^n \left[ \left[ (e^{\delta})^{n-t} - 1 \right] \left[ e^{-\left( At + \frac{Be^{\alpha x}(e^{\alpha t} - 1)}{\alpha} \right)} - e^{-\left( A(t+1) + \frac{Be^{\alpha x}(e^{\alpha(t+1)} - 1)}{\alpha} \right)} \right] \right] dt.$$

## IV. Случай M-кратных выплат

Выше был рассмотрен случай, в котором выплаты по кредиту происходят раз в год в течение $n$ лет. Предположим теперь, что выплаты происходят $m$ раз в год в течение тех же $n$ лет. Таким образом, всего предполагается $nm$ выплат величиной $\frac{C}{nm}$ каждая. Очевидно, что процент, начисляемый $m$ раз в год, будет отличаться от процента, начисляемого ежегодно.

Обозначим новую процентную ставку $i^{(m)}$. Это номинальная процентная ставка при *m*-кратном конвертировании. Она связана с годовой процентной ставкой выражением

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{nm}.$$

По аналогии со случаем ежегодного начисления процентов, предположим, что клиент выплачивал кредит в течение $j$ периодов, $j \in [1, nm-1]$, а затем выплаты прекратились. Опустим рассуждения относительно вывода формулы для вычисления актуарной приведенной стоимости страхования кредита, поскольку они аналогичны рассуждениям, приведенным в разделе «Расчет актуарной приведенной стоимости страхования кредита» для случая ежегодного начисления процентов. Выпишем сразу формулы для вычисления суммы $C_j$, которую страховая компания должна выплатить банку в случае невыплаты клиентом кредита, и актуарной приведенной стоимости страхового полиса $A_C^{(m)}$:

$$C_j = \frac{C}{nm}\left(1+i^{(m)}\right)^{j+1}\frac{\left(1+i^{(m)}\right)^{nm-j} - 1}{i^{(m)}},$$

$$A_C^{(m)} = \sum_{j=1}^{nm} C_j (v^{(m)})^{j+1}\, {}_{\frac{j}{m}}p_x\, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}} =$$

$$\frac{C}{i^{(m)}nm}\sum_{j=1}^{nm}\left[\left(1+i^{(m)}\right)^{nm-j} - 1\right] {}_{\frac{j}{m}}p_x\, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}},$$

где $j = km + \frac{s}{m}$, $k$ – количество полных лет, $s$ – остаток, например, количество месяцев в предположении, что кредит выплачивается ежемесячно, то есть при $m = 12$.

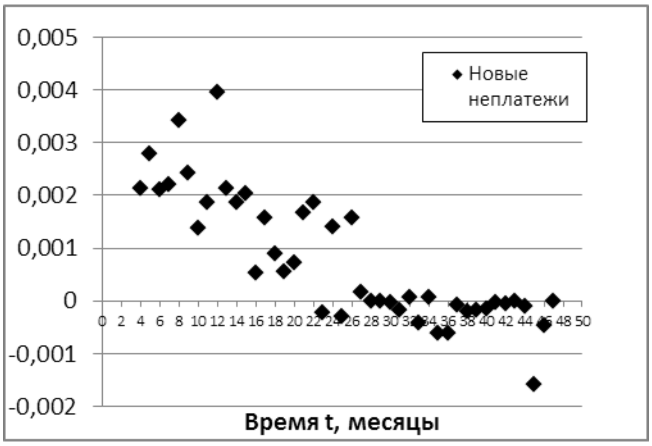
## V. Расчеты на основе имеющейся банковской статистики

Рассмотрим статистику неплатежей по кредитам, имеющим определенные характеристики, предоставленную российским коммерческим банком, и построим на её основе модель, описывающую интенсивность отказов (объем невыплат) в зависимости от «времени жизни» кредита.

Чтобы иметь возможность вести статистику и оценивать возможные потери, все кредиты группируют на основе определенных критериев. Такими критериями являются сумма кредита (обычно это некоторый диапазон значений), процентная ставка, срок, на который выдается кредит, периодичность платежей и время выдачи кредита. Кредиты, имеющие одинаковые вышеперечисленные характеристики, относят к одной группе и именуют поколением. Например, кредиты на сумму от 70 до 100 тыс. рублей, выданные под 20% годовых на 12 месяцев в январе 2013 года и выплачиваемые ежемесячно, принадлежат одному поколению. Кредиты с аналогичными свойствами, выданные в феврале 2013 года, будут принадлежать уже следующему поколению.

Были проанализированы данные по 46 поколениям потребительских кредитов сроком на 4 года, выплаты по которым происходят ежемесячно. Поскольку все кредиты в поколении примерно одинаковы в денежном измерении, можно принять суммы кредитования равными, и это не приведет к ухудшению качества модели.

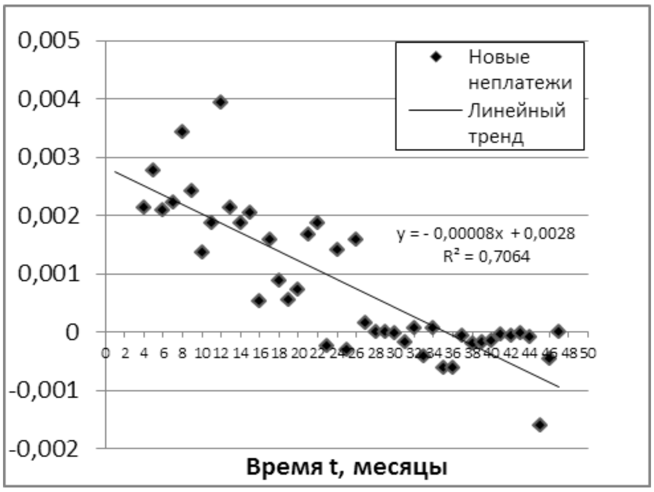
Для каждого поколения имеются данные о том, какая доля всех кредитов в поколении каждый месяц переходила в категорию «мёртвых». «Мертвыми» в банковской терминологии считаются кредиты, выплаты по которым задерживаются более чем на 90 дней. Данные о неплатежах в графическом представлении выглядят следующим образом:




Долей новых невыплат назовем долю всех кредитов в рассматриваемых поколениях, просрочка по которым в данный момент времени *t* составила более 90 дней и которые не были учтены как «мертвые» в более ранние периоды, т.е. «смерть» кредита была зафиксирована именно в момент времени *t*.

Чтобы получить зависимость интенсивности отказов от времени, необходимо аппроксимировать имеющиеся данные некоторой функцией. В качестве таких функций были рассмотрены линейная функция, полиномы 2-6 степеней и логарифмическая функция.

Линейная функция достаточно точно аппроксимирует исходные данные (коэффициент детерминации $R^2$ = 0,7064).




При аппроксимации полиномом с ростом степени улучшается точность приближения (при приближении полиномом 6 степени коэффициент детерминации $R^2$ = 0,7619), однако впоследствии использование полиномиальной функции значительно усложняет вычисления. Попытки приближения логарифмической функцией дают худшие результаты: коэффициент детерминации $R^2$ достигает лишь 0,6967.

Как известно из исследований в области актуарной математики, функция, описывающая интенсивность смертности людей, является возрастающей. В то же время, из приведенных графиков для кредитов мы видим обратную тенденцию: чем больше времени проходит с момента начала жизни поколения, тем меньше кредитов переходят в категорию «мертвых». Это объясняется тем, что заемщик стремится сохранять свою положительную кредитную историю: если он не допускал неплатежей на начальных сроках жизни кредита, он с большой вероятностью не станет неплательщиком и на более поздних сроках. Также можно заметить, что на поздних сроках жизни кредитов интенсивность отказов становится отрицательной. Это означает, что кредиты перестают быть «мертвыми», иначе говоря, «выздоравливают»: после просрочки более 90 дней по ним снова производятся выплаты.

Будем полагать, что интенсивность отказов для кредитных выплат описывается линейной функцией, которой аппроксимируются исходные данные по просроченным платежам.

$$\mu(t) = -0{,}00008t + 0{,}0028.$$

Ранее была получена формула для расчета актуарной приведенной стоимости страхования кредита в случае, если выплаты по нему происходят $m$ раз в год:

$$A_C^{(m)} = \frac{C}{i^{(m)}nm}\sum_{j=1}^{nm}\left[\left(1+i^{(m)}\right)^{nm-j}-1\right]\,{}_{\frac{j}{m}}p_x\;{}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}},$$

где $j = km + \frac{s}{m}$, $k$ – количество полных лет, $s$ – остаток, например, количество месяцев в предположении, что кредит выплачивается ежемесячно, то есть при $m = 12$.

${}_{\frac{j}{m}}p_x$ и ${}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}}$ зависят от интенсивности отказов следующим образом:

$${}_{\frac{j}{m}}p_x = e^{\left[-\int_x^{x+\frac{j}{m}}\mu(t)dt\right]},$$

$${}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}} = e^{\left[-\int_{x+\frac{j}{m}}^{x+\frac{j}{m}+\frac{1}{m}}\mu(t)dt\right]}.$$

Опустив промежуточные вычисления, приведем полученные выражения для ${}_{\frac{j}{m}}p_x$ и ${}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}}$:

$${}_{\frac{j}{m}}p_x = e^{\left(0{,}00004\left(\frac{j}{m}\right)^2+0{,}00008\frac{xj}{m}-0{,}0028\frac{j}{m}\right)},$$

$${}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}} = e^{\left(0{,}00004\frac{1}{m^2}+0{,}00008\frac{j}{m^2}+0{,}00008\frac{x}{m}-0{,}0028\frac{1}{m}\right)}.$$

Подставляя в формулу для $A_C^{(m)}$ эти выражения и данные об условиях кредитования, можно рассчитать точную стоимость страхования кредита.

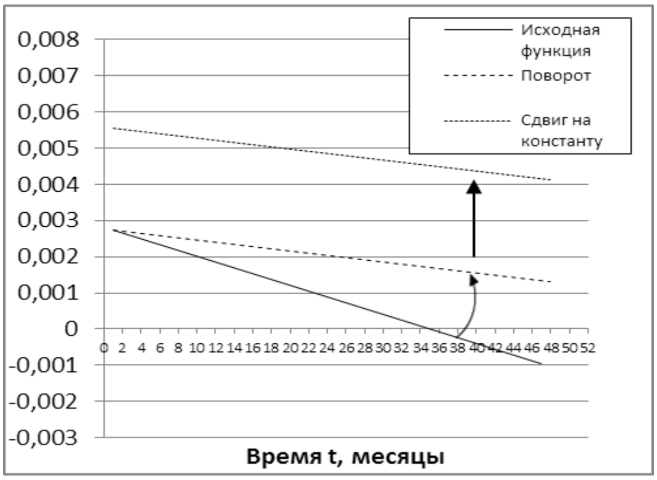
Применим полученную формулу для вычисления актуарной приведенной стоимости страхования кредита. Пусть сумма кредита $C = 100000$ рублей, годовая ставка процента $i = 15\%$, срок выплаты кредита – 4 года, выплаты производятся ежемесячно, то есть $m = 12$. Подставив эти данные в выражение для $A_C^{(m)}$, получаем, что стоимость страхования кредита в указанных условиях составит 642 рубля 11 копеек. Стоимость страховки адекватна сумме кредита; исходя из полученных результатов, модель можно считать состоятельной.

## VI. Модификация модели для кризисной ситуации

В свете событий финансового кризиса 2008-2009 годов приобрели актуальность исследования с целью разработки новых методов оценки кредитных рисков, моделирующих поведение заемщика в кризисной ситуации. Адаптируем полученную модель к ситуации повышенного риска неплатежеспособности заемщика.

Статистических данных, описывающих поведение заемщика во время кризиса, недостаточно, или же они отсутствуют вовсе. Это объясняется тем, что продолжительность кризисов невелика по сравнению с периодами стабильного развития экономики. Таким образом, для того, чтобы адаптировать модель к кризисной экономической ситуации, необходимо применить аналитические методы.

Логично предположить, что негативная экономическая ситуация отразится на финансовом состоянии заемщиков, и вследствии этого уровень неплатежей по кредитам вырастет. Так, некоторым образом изменится функция, описывающая интенсивность отказов. Ранее было замечено, что эта функция убывает. Скорее всего, скорость убывания функции в кризисной ситуации снизится, поскольку даже при желании сохранять положительную кредитную историю клиент не всегда имеет такую возможность. Кроме того, вероятно, что количество невыплат в первый же период существенно возрастет, то есть свободный член функции увеличится. Таким образом, новая функция, описывающая интенсивность отказов, может быть получена из старой посредством прибавления к ней линейной функции.




Прибавив к исходной функции некоторую линейную функцию, мы получим более пессимистичный прогноз для интенсивности отказов, который и будет отражать последствия наступления кризисной экономической ситуации. В общем случае новая функция будет описываться выражением

$$\mu_{cr}(t) = \mu(t) + c(t - t_0) + d,$$

где $\mu_{cr}(t)$ – интенсивность отказов в кризисной ситуации, $\mu(t)$ – первоначальная интенсивность отказов, $ct + d$ – линейная функция, которую мы прибавляем к исходной, $t_0$ – неподвижная точка при повороте.

Предположим, что в кризисной ситуации уровень неплатежей по кредитам в начальный момент выростет в 1,5 раза, а скорость убывания функции сократится в 2 раза. Тогда $c$ = 0,00004, $d$ = 0,0014. Новое выражение для вычисления интенсивности отказов будет выглядеть следующим образом:

$$\mu_{cr}(t) = -0{,}00004t + 0{,}0042\ .$$

Тогда

$${}_{\frac{j}{m}}p_x = e^{\left(0{,}00002\left(\frac{j}{m}\right)^2 + 0{,}00004\frac{xj}{m} - 0{,}0042\frac{j}{m}\right)},$$

$${}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}} = e^{\left(0{,}00002\frac{1}{m^2} + 0{,}00004\frac{j}{m^2} + 0{,}00004\frac{x}{m} - 0{,}0042\frac{1}{m}\right)}\ .$$

Пусть условия кредитования остаются неизменными: $C = 100000$ рублей, $i = 15\%$, $n = 4$, $m = 12$. Подставляя эти данные, а также выражения для ${}_{\frac{j}{m}}p_x$ и ${}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{j}{m}}$ в формулу для $A_C^{(m)}$, получаем, что стоимость страхования кредита составит 986 рублей 73 копейки. Как видно из приведенных расчетов, в условиях кризиса стоимость страхового полиса увеличивается. Для кредитов, выданных на условиях, описанных выше, стоимость страховки возрастает примерно в 1,5 раза.

## VII. Заключение

В ходе работы были рассмотрена основные концепции актуарной математики, и на их основе была построена модель для нахождения актуарной приведенной стоимости страхования кредита для случаев ежегодных и m-кратных выплат по нему. Была проведена оценка компонент полученной модели при помощи методов актуарной математики и данных банковской статистики, а также приведены примеры вычисления актуарной приведенной стоимости страховки на основе имеющихся статистических данных. Также была получена модификация компонент модели для случая, когда кредитование происходит в условиях экономического кризиса, и приведен пример вычисления стоимости страховки в этих условиях.

Результаты, полученные в работе, могут быть полезны банковскому сообществу. Имея статистические данные, характеризующие неплатежи по той или иной категории кредитов, можно на основе описанной в статье модели рассчитать стоимость их страхования и, заключив договор со страховой компанией, минимизировать таким образом кредитные риски.

## Библиография


[1] Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика. Перевод с англ./Под ред. В.К. Малиновского. – М.: Янус-К, 2001.

[2] Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. – М.: Финансово-актуарный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994.

[3] Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело, 2004.

[4] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.

[5] Andrew Kuritzkes, Til Schuermann, Scott Weiner. Deposit Insurance and Risk Management of the U.S. Banking System: How Much? How Safe? Who Pays? – The Wharton School, University of Pennsylvania, 2002.

[6] Reza Vaez-Zadeh, Danyang Xie, Edda Zoli. A Market-Oriented Deposit Insurance Scheme. – International Monetary Fund, 2002.

[7] The Human Life-Table Database (*http://www.lifetable.de/* ).

[8] Практическое руководство по актуарной математике (*http://oaoospos.ru/activities/mnresearch/9-resmat004.html* ).