

Пространственно-распределенная модель Ланчестера с учетом нелинейной динамики

Н.Д. Борисов, В.В. Нефедов

Аннотация — В статье предложена пространственно-распределенная модель Ланчестера для моделирования динамики военных конфликтов, учитывающая процессы диффузии и реакции в двумерной области с препятствиями. Модель описывает эволюцию двух групп войск, обозначенных как $U(x, y, t)$ и $V(x, y, t)$, посредством системы нелинейных уравнений в частных производных с коэффициентами диффузии и временной модуляцией реакционных членов. Взаимодействие осуществляется после утраты связи с центральным командным пунктом, когда основной удар и сосредоточение сил уже завершены. Другими словами, моделируемое событие представляет собой локальное взаимодействие, реализуемое в соответствии с предварительно согласованным тактическим планом. В работе рассмотрено влияние на взаимодействие трех типов препятствий — квадратное, круглое и гладкое выпуклое, — моделирующих непроходимые области, влияющие на пространственную динамику волновых фронтов. Численное решение системы реализовано с использованием метода переменных направлений и метода конечных элементов с временной дискретизацией по схеме Кранка-Николсона, обеспечивающей устойчивость благодаря адаптивному уточнению сетки вблизи препятствий. Начальные условия отражают распределение войск вдоль линии фронта с применением однородных граничных условий Дирихле. Устойчивость модели подтверждена анализом показателя Ляпунова, а чувствительность к параметрам исследована для оценки их влияния на динамику системы. Результаты численных экспериментов иллюстрируют влияние геометрии препятствий на концентрации войск, с количественным анализом долей областей преобладания сил во времени.

Ключевые слова — пространственно-распределенная модель, Ланчестер, военные конфликты, диффузия, реакционные уравнения, нелинейная динамика, препятствия, метод переменных направлений, метод конечных элементов, схема Кранка-Николсона, чувствительность параметров, численное моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование военных конфликтов объединяет методы прикладной математики, военной

Статья получена 27 июня 2025

Н. Д. Борисов – аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики. Институтский переулок, 9, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Российская Федерация. Email: borisov.nd@phystech.edu, ORCID: 0009-0001-4204-3012.

В. В. Нефедов – к.ф. –м.н., Доцент кафедры АНИ, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики. Ленинские горы, 1, стр.52, 119234, Москва, Российская Федерация. Email: vv_nefedov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-4602-5070.

стратегии, экологии и социальных наук. Исторически первая строгая математическая модель конфликта была предложена Фредериком Ланчестером в 1916 году [1]. Ланчестер разработал свою модель для анализа эффективности воздушных сил в Первой мировой войне, которая впоследствии оказалась применима к гораздо более широкому классу явлений.

Классическая модель Ланчестера описывает динамику двух противоборствующих сторон (R и B) системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dR/dt = -k_B B, \quad dB/dt = -k_R R, \quad (1)$$

В данной модели используется линейный закон потерь, что может быть применимо для симуляции конфликтов, где каждый воин сражается один на один. Более того, результат предопределен и зависит от численности войск каждой из сторон.

Однако с развитием военных технологий и появлением средств массового поражения Ланчестер предложил [1,2] модификацию с квадратичным законом. В этой версии интенсивность потерь каждой стороны пропорциональна произведению численностей противоборствующих сил, что лучше отражает реалии современной войны.

Исторически развитие моделей динамики конфликтов после Ланчестера шло по пути усложнения и учета дополнительных факторов. В 1921 году Хартли и Хейл [2] предложили модель, учитывающую пространственную диффузию. Эта модель стала важным шагом к пространственно-распределенным симуляциям. В 1957 году Хичкок и Максвелл [1] проанализировали материально - технического обеспечения и командной структуры. Это направление получило развитие в работах советских математиков – обобщенный подход на многоагентных системах в модели Краснощекова и учет взаимодействия между подразделениями в модели Осипова [3]. Особого внимания заслуживает модель Бекманна-Пуу-Занга, описывающая сложные нелинейные взаимодействия с пространственной диффузией.

Дальнейшее развитие моделей Ланчестера шло по нескольким направлениям. Одним из важнейших стал учет пространственного распределения сил, что привело к появлению пространственно-распределенных моделей [4, 5, 6, 7]. В работе Гонзалеса [8] подробно исследуется этот класс моделей, где в уравнения добавляются диффузионные члены, описывающие передислокацию сил в пространстве. Такой класс моделей позволяют учитывать не только временную динамику конфликта, но и его пространственную организацию, что особенно

важно при анализе боевых действий на протяженных территориях.

Значительный вклад в развитие теории внесли Кангиотти, Каполли, Сенси [9]. Они предложили обобщенную модель, включающую как классические уравнения Ланчестера, так и их нелинейные обобщения, а также учитывающую возможность изменения стратегий сторон в ходе конфликта.

Интересную альтернативу дифференциальным моделям предлагает Кеане [10]. Автор проводит сравнительный анализ двух подходов к моделированию боевых действий: основанного на дифференциальных уравнениях и использующего клеточные автоматы. Каждый из подходов имеет свои преимущества: дифференциальные уравнения позволяют получить аналитические результаты и лучше подходят для описания крупномасштабных конфликтов, тогда как клеточные автоматы более адекватно описывают локальные взаимодействия и нерегулярные структуры.

В 2023 году Корепанов, Чхартишвили и Шумов в статье "Базовые модели боевых действий" [10] провели систематический анализ различных модификаций моделей Ланчестера. Особое внимание уделяется моделям с переменными коэффициентами, позволяющим учитывать изменение эффективности сил в ходе конфликта.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель, представленная в данной работе, описывает эволюцию реакционно-диффузионной системы двух групп войск, обозначаемых как $U(x, y, t)$ и $V(x, y, t)$, в двумерной области

$\Omega = [0, L] \times [0, L]$, где $L = 1$. Эти компоненты интерпретируются как концентрации или плотности войск. Взаимодействие происходит, когда связь с центральным командным пунктом уже потеряна, основной удар и концентрация сил прошли. Иными словами, моделируемое событие описывает локальное взаимодействие в рамках заранее утвержденного тактического плана.

Система состоит из двух нелинейных уравнений в частных производных, которые учитывают процессы диффузии и реакции между группами, а также влияние пространственных ограничений, таких как препятствия. Уравнения записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mu_1 \nabla^2 U + R_1(U, V), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \mu_2 \nabla^2 V + R_2(U, V), \quad (2)$$

где $U(x, y, t)$ и $V(x, y, t)$ представляют концентрации компонентов в точке (x, y) в момент времени t , $\mu_1 = 0.02$ и $\mu_2 = 0.05$ являются коэффициентами диффузии, определяющими скорость пространственного распространения групп войск, а $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, описывающий диффузионный процесс в двумерной области. Функции $R_1(U, V)$ и $R_2(U, V)$ представляют нелинейные реакционные члены, моделирующие взаимодействие между U и V , включая автокаталитические эффекты и конкурентные процессы. Структура этих уравнений позволяет моделировать

широкий спектр явлений, таких как волновая динамика, обострение или стационарные состояния, в зависимости от параметров и начальных условий.

Реакционные члены R_1 и R_2 задаются следующим образом:

$$R_1(U, V) = \alpha_1(t)U + a_{11}U^2 + a_{12}UV, \quad R_2(U, V) = \beta_1V + a_{21}V^2 + a_{22}UV, \quad (3)$$

где параметры $a_{11} = -0.2$, $a_{12} = 0.1$, $\beta_1 = -0.5$, $a_{21} = 0.1$, $a_{22} = -0.1$ определяют характер нелинейного взаимодействия. Коэффициент $\alpha_1(t)$ вводит временную модуляцию, что позволяет учитывать нестационарные внешние воздействия, такие как периодические возмущения. Формула для $\alpha_1(t)$ имеет вид:

$$\alpha_1(t) = \alpha_1 \cdot \alpha_{\text{mod}} \left(\frac{3}{2} - \sin(\pi t) \right) \cdot \left(\frac{t}{T} + \beta_{\text{mod}} \right), \quad (4)$$

где $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_{\text{mod}} = 0.3$, $\beta_{\text{mod}} = 0.2$, а $T = 1.0$ — временной горизонт моделирования. Синусоидальная зависимость $1 - \sin(\pi t)$ и линейный член $\frac{t}{T} + \beta_{\text{mod}}$ создают сложную динамику, имитирующую, например, циклические изменения интенсивности боя. Такая форма $\alpha_1(t)$ позволяет моделировать системы с переменной реакционной активностью, что особенно важно, когда внешние условия могут существенно варьироваться [11, 12].

A. Начальные условия

Начальные условия для системы задаются с учетом разделения области по линии фронта, определяемой уравнением $x + y = 1$. Это разделение моделирует пространственную неоднородность начального распределения войск. Для компонента начальное условие задается следующим образом:

$$U(x, y, 0) = \begin{cases} 1.2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \cdot \sin\left(\pi x \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) \times \\ \quad \times \exp(-5(x + y - 1)^2), & \text{если } x + y < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5)$$

где 1.2 определяет амплитуду, тригонометрические функции $\sin(\pi x)$, $\sin(\pi y)$ и $\sin\left(\pi x \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)$ создают осциллирующее поведение, а экспоненциальный член $\exp(-5(x + y - 1)^2)$ обеспечивает локализацию распределения вблизи фронта $x + y = 1$. Такая форма отражает сложную пространственную структуру, характерную для начальных условий в задачах с волновой динамикой. Такая форма отражает сложную пространственную структуру, характерную для начальных условий в задачах с волновой динамикой.

Для компонента начальное условие определяется как:

$$V(x, y, 0) = \begin{cases} 3.0 \cdot x(1 - x) \cdot y(1 - y) \times \\ \quad \times \exp(-5((x - 0.8)^2 + (y - 0.8)^2)), & \text{если } x + y \geq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Амплитуда 3.0 задает более высокую интенсивность V по сравнению с U , а полиномиальные члены $x(1 - x)$ и

$y(1-y)$ создают параболическое распределение с максимумом внутри области. Экспоненциальный член $\exp(-5((x-0.8)^2 + (y-0.8)^2))$ локализует распределение вблизи точки $(0.8, 0.8)$, что усиливает асимметрию начальных условий. Разделение по линии $x+y=1$ обеспечивает комплементарное распределение U и V , моделируя сценарий, в котором компоненты изначально занимают различные части области, что способствует формированию сложных волновых фронтов в процессе эволюции.

В. Граничные условия

На границах области $\partial\Omega$ применяются однородные граничные условия Дирихле, которые задаются $U(x, y, t) = V(x, y, t) = 0$ для всех $(x, y) \in \partial\Omega$. Эти условия предполагают, что концентрации войск равны нулю на границах области, что может интерпретироваться как отсутствие притока или оттока численности через границы [3, 13]. В физическом контексте это соответствует замкнутой системе, где компоненты не взаимодействуют с внешней средой через границы области. В численной реализации такие условия упрощают решение, фиксируя значения U и V на граничных узлах сетки, что позволяет сосредоточиться на внутренней динамике системы.

С. Препятствия

Препятствия представляют собой области внутри Ω , где концентрации U и V принудительно равны нулю, моделируя непроходимые физические или геометрические ограничения, такие как, например, горы или ущелья. Рассматриваются три различных типа препятствий, каждый из которых характеризуется своей геометрией и влияет на пространственную динамику системы по-своему.

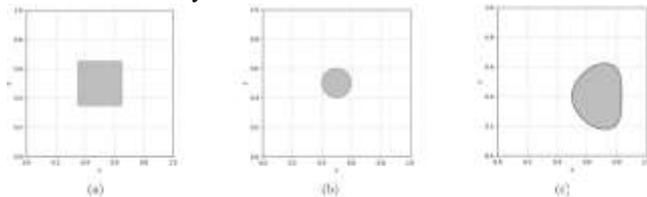


Рисунок 1. Типы препятствий: (а) квадратное; (б) круглое; (с) гладкое выпуклое.

Первое препятствие — квадратное, с размером 0.3×0.3 и центром в точке $(0.5, 0.5)$, что соответствует области $[0.35, 0.65] \times [0.35, 0.65]$. Эта форма моделирует резкие границы, которые могут существенно изменять траектории волновых фронтов, особенно вблизи углов.

Второе препятствие — круговое, с радиусом 0.1 и центром в $(0.5, 0.5)$, задаваемое уравнением $(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \leq 0.01$. Круглая форма обеспечивает более плавное взаимодействие с диффузионными процессами, что приводит к менее выраженным локальным артефактам по сравнению с квадратным препятствием.

Третье препятствие — гладкое выпуклое, определяемое сложным неравенством:

$$(x-0.5)^4 + (x-0.5)^2(y-0.4)^2 + (y-0.4)^4 - \frac{1}{3}(x-0.5)((x-0.5)^2 + (y-0.4)^2) \leq 0. \quad (7)$$

Эта форма создает несимметричную область с гладкими границами, что усложняет численное моделирование, но позволяет изучать влияние более реалистичных геометрий на динамику системы. Препятствия вводятся в модель путем принудительного обнуления U и V в соответствующих узлах сетки, что требует специальной обработки в численной схеме.

III. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Алгоритм метода переменных направлений позволяет эффективно решать системы двух уравнений реакционно-диффузии в двумерной области $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Этот метод позволяет разделить вычисление на последовательные одномерные этапы, снижая вычислительную сложность по сравнению с полностью неявными схемами [14, 15]. Каждый временной шаг разбивается на два полушага, на которых уравнение решается неявно по одной пространственной переменной и явно по другой, что обеспечивает устойчивость и точность при умеренных вычислительных затратах.

Область Ω дискретизируется равномерной сеткой $N \times N$, где $N = 60$, с шагом $h = 1/(N-1) \approx 0.01695$. Временной интервал $[0,1]$ делится на $M = 300$ шагов с шагом $\tau \approx 0.003333$. Узлы сетки обозначаются как (x_i, y_j) , где $x_i = ih, y_j = jh, i, j = 0, 1, \dots, N-1$, а значения функций U и V в этих узлах на временном слое n записываются как $U_{i,j}^n$ и $V_{i,j}^n$. На первом полушаге уравнение для U решается неявно по направлению x и явно по направлению y :

$$\frac{U_{i,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^n}{\tau/2} = \mu_1 \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1/2} + U_{i-1,j}^{n+1/2} - 2U_{i,j}^{n+1/2}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{h^2} \right) + R_1(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n). \quad (8)$$

Вторая производная по x , аппроксимируемая выражением $\frac{U_{i+1,j}^{n+1/2} + U_{i-1,j}^{n+1/2} - 2U_{i,j}^{n+1/2}}{h^2}$, вычисляется неявно на промежуточном слое $n + 1/2$, тогда как вторая производная по y , заданная как $\frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{h^2}$, берется явно на слое n . Реакционный член $R_1(U_{i,j}^n, V_{i,j}^n)$ вычисляется явно, что упрощает реализацию, но требует контроля устойчивости.

На втором полушаге порядок обработки направлений меняется: решение становится неявным по y и явным по x :

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1/2}}{\tau/2} = \mu_1 \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1/2} + U_{i-1,j}^{n+1/2} - 2U_{i,j}^{n+1/2}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1}}{h^2} \right) + R_1(U_{i,j}^{n+1/2}, V_{i,j}^{n+1/2}). \quad (9)$$

Вторая производная по y аппроксимируется неявно на слое $n + 1$, а по x — явно на слое $n + 1/2$. Реакционный член вычисляется на промежуточном слое $n + 1/2$, что повышает точность. Аналогичные уравнения применяются для V , с заменой μ_1 на μ_2 и R_1 на R_2 . Оператор Лапласа $\nabla^2 U$ аппроксимируется пятиточечным шаблоном:

$$\nabla^2 U_{i,j} \approx \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}}{h^2}. \quad (10)$$

На каждом полушаге формируется система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, решаемая методом прогонки, что снижает вычислительную сложность до $O(N^3)$.

А. Обработка препятствий

Препятствия моделируются как области, где $U_{i,j} = V_{i,j} = 0$, представляя непроходимые барьеры. Рассматриваются квадратное препятствие размером 0.3×0.3 с центром в $(0.5, 0.5)$, определяемое областью $[0.35, 0.65] \times [0.35, 0.65]$; круговое препятствие радиусом 0.1 с центром в $(0.5, 0.5)$, задаваемое уравнением $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.01$; и гладкое выпуклое препятствие, описываемое неравенством $(x - 0.5)^4 + (x - 0.5)^2(y - 0.4)^2 + (y - 0.4)^4 - \frac{1}{3}(x - 0.5)((x - 0.5)^2 + (y - 0.4)^2) \leq 0$. В узлах, попадающих в область препятствия, значения $U_{i,j}^n$ и $V_{i,j}^n$ принудительно устанавливаются равными нулю на каждом временном шаге, что соответствует физической интерпретации препятствий как зон с нулевой концентрацией.

При вычислении лапласиана в узлах, соседних с препятствием, исключаются точки, принадлежащие области препятствия. Например, если (x_{i+1}, y_j) находится внутри препятствия, значение $U_{i+1,j}$ заменяется на ноль, а шаблон лапласиана корректируется для учета только активных узлов. Системы линейных уравнений решаются с использованием разреженных матриц, что минимизирует затраты на хранение и вычисления. Для предотвращения вырожденности матриц к диагональным элементам добавляется $\epsilon = 10^{-10}$, обеспечивая устойчивость решения. Перед моделированием формируется булева маска из 1 и 0, определяющая узлы препятствия, что ускоряет проверку условий. На каждом полушаге узлы препятствий исключаются из уравнений, а их значения фиксируются как нулевые, с учетом модификации трехдиагональных матриц.

Обработка препятствий усложняет решение из-за нарушения регулярности сетки, что может вызывать численные артефакты, особенно вблизи углов квадратного препятствия. Малый шаг $\tau \approx 0.003333$ минимизирует эти эффекты.

IV. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

А. Чувствительность к параметрам

Чувствительность модели к ключевым параметрам, таким как α_{mod} , a_{12} и μ_1 , была исследована для оценки их влияния на максимальные значения концентраций U и V . Результаты представлены на рисунке 2. Коэффициент α_{mod} , управляющий временной модуляцией $\alpha_1(t)$, оказывает наиболее значительное воздействие. При уменьшении α_{mod} до 0.15 максимальное значение $\max(U)$ снижается до 0.98 (на 18.3% ниже базового значения 1.20), а $\max(V)$ — до

2.45 (на 5.8% ниже 2.60). Увеличение α_{mod} до 0.45 повышает $\max(U)$ до 1.45 (на 20.8% выше) и $\max(V)$ до 2.78 (на 6.9% выше). Эти изменения отражают усиление автокаталитических процессов, вызванное ростом интенсивности реакции.

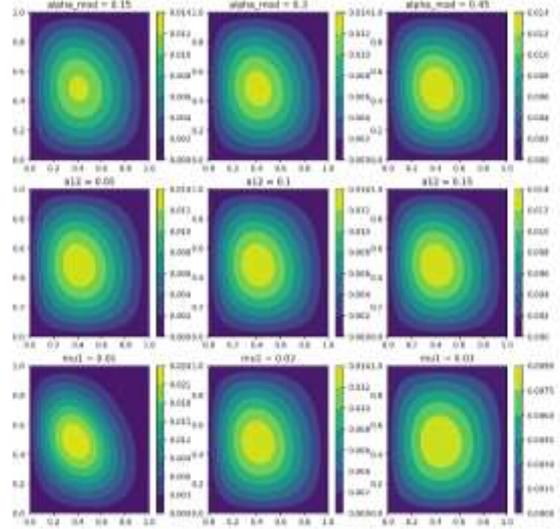


Рисунок 2. Визуальный анализ чувствительности параметров.

Параметр a_{12} , определяющий вклад члена UV в реакционный член R_1 , также влияет на динамику. При $a_{12} = 0.05$ значение $\max(U)$ снижается до 1.05 (на 12.5% ниже), а $\max(V)$ — до 2.70 (на 3.8% ниже). Увеличение a_{12} до 0.15 повышает $\max(U)$ до 1.38 (на 15.0% выше), но снижает $\max(V)$ до 2.48 (на 4.6% ниже). Это указывает на конкурентное взаимодействие между компонентами, где рост a_{12} усиливает влияние V на U . Коэффициент диффузии μ_1 оказывает меньшее воздействие: при $\mu_1 = 0.01$ значение $\max(U)$ увеличивается до 1.32 (на 10.0% выше), а при $\mu_1 = 0.03$ снижается до 1.10 (на 8.3% ниже), с минимальными изменениями $\max(V)$. Эти результаты подчеркивают доминирующую роль реакционных процессов над диффузией. Детальный анализ представлен в таблице 1.

Таблица 1. Чувствительность к параметрам.

Параметр Parameter	Значение Value	$\max(U)$	$\max(V)$	ΔU_{max}	ΔV_{max}
$\alpha_{\text{mod}} = 0.15$	0.15	0.98	2.45	18.3%	5.8%
$\alpha_{\text{mod}} = 0.3$	0.3	1.20	2.60	0.0%	0.0%
$\alpha_{\text{mod}} = 0.45$	0.45	1.45	2.78	20.8%	6.9%
$a_{12} = 0.05$	0.05	1.05	2.70	12.5%	3.8%
$a_{12} = 0.1$	0.1	1.20	2.60	0.0%	0.0%
$a_{12} = 0.15$	0.15	1.38	2.48	15.0%	4.6%
$\mu_1 = 0.01$	0.01	1.32	2.65	10.0%	1.9%
$\mu_1 = 0.02$	0.02	1.20	2.60	0.0%	0.0%
$\mu_1 = 0.03$	0.03	1.10	2.58	8.3%	0.8%

В. Сравнительный анализ концентраций

Для более глубокого понимания взаимодействия компонентов U и V был проведен сравнительный анализ их относительных концентраций в четырех сценариях: без препятствий, с квадратным, круглым и гладким

выпуклым препятствиями. Анализ основан на визуализации областей, где $U > V$, $V > U$ или $U \approx V$, с порогом сравнения $|U - V| \leq 10^{-6}$. Состояния системы исследовались в ключевые моменты времени $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ и $t = 1.0$, что соответствует этапам формирования, развития и стабилизации волнового фронта. Результаты представлены на контурных графиках в рисунке 3, где области, где $U > V$, отмечены зеленым, $V > U$ — красным, а $U \approx V$ — белым. Препятствия отображаются черным цветом с прозрачностью 0.7.

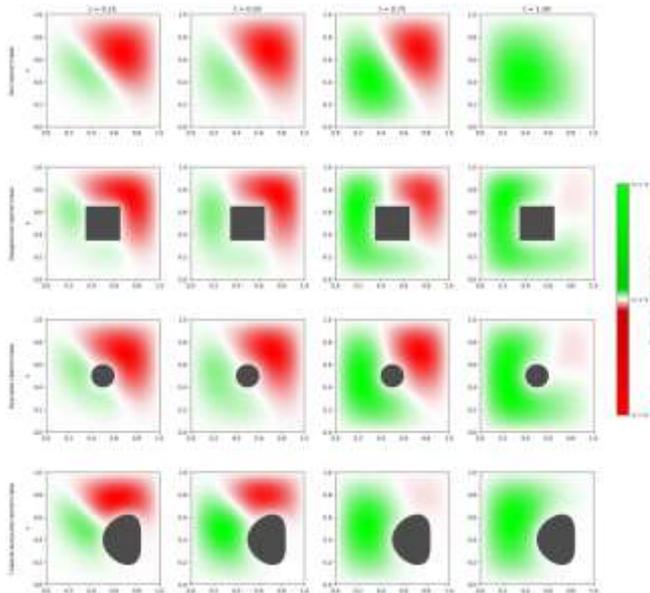


Рисунок 3. Контурные графики сравнения U и V при $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$, $t = 1.0$ для сценариев: (1) без препятствий, (2) с квадратным препятствием, (3) с круглым препятствием, (4) с гладким выпуклым препятствием. Зеленый: $U > V$, красный: $V > U$, белый: $U \sim V$.

В сценарии без препятствий на момент $t = 0.25$ область $U > V$ доминирует в зоне $x + y < 1$, где начальные условия для U ненулевые, тогда как $V > U$ преобладает в зоне $x + y \geq 1$. К $t = 0.5$ граница между этими областями становится более размытой из-за диффузии, но область $U > V$ сохраняет большую площадь благодаря более высокой начальной амплитуде U . На $t = 0.75$ и $t = 1.0$ области $U \approx V$ расширяются в центральной части Ω , что указывает на постепенное выравнивание концентраций, хотя $V > U$ остается доминирующим вблизи точки $(0.8, 0.8)$, где начальное распределение V было локализовано.

С квадратным препятствием на $t = 0.25$ области $U > V$ и $V > U$ сохраняют структуру, схожую с беспрепятственным случаем, но препятствие, расположенное в центре, создает зону, где концентрации равны нулю, разделяя волновые фронты. К $t = 0.5$ волны начинают обтекать препятствие, и области $U > V$ сгущаются вблизи углов, где градиенты концентраций возрастают. На $t = 0.75$ область $U \approx V$ расширяется вокруг препятствия, но $V > U$ доминирует в верхней правой части области, что обусловлено начальным распределением V . К $t = 1.0$ равновесие

между U и V становится более выраженным, но углы препятствия продолжают усиливать локальные различия концентраций.

Круговое препятствие, благодаря своей гладкой геометрии, способствует более равномерному обтеканию. На $t = 0.25$ области $U > V$ и $V > U$ аналогичны беспрепятственному случаю, но препятствие создает симметричную зону нулевых концентраций. К $t = 0.5$, как показано в рисунке 3, волны обтекают препятствие, формируя симметричные области $U > V$ и $V > U$, с узкой полосой $U \approx V$ вокруг препятствия. На $t = 0.75$ и $t = 1.0$ область $U \approx V$ расширяется, но $V > U$ сохраняет доминирование вблизи $(0.8, 0.8)$, что подчеркивает устойчивость начального распределения V к диффузии.

Гладкое выпуклое препятствие, с его несимметричной формой, создает более сложную картину. На $t = 0.25$ области $U > V$ и $V > U$ схожи с другими сценариями, но препятствие вызывает неравномерное разделение зон. К $t = 0.5$ волны обтекают препятствие, формируя асимметричные области $U > V$ вблизи вогнутых участков границы препятствия, где концентрации U усиливаются. На $t = 0.75$ область $U \approx V$ расширяется, но $V > U$ остается преобладающей в верхней правой части области. К $t = 1.0$ равновесие между U и V становится более выраженным, но несимметрия препятствия продолжает влиять на распределение, создавая зоны локального преобладания U вблизи вогнутых границ.

В сценарии без препятствий доля $U > V$ уменьшается с 55% на $t = 0.25$ до 40% на $t = 1.0$, тогда как $U \approx V$ возрастает с 10% до 30%. С квадратным препятствием доля $U > V$ снижается медленнее (с 50% до 42%) из-за локальных концентраций вблизи углов. Круговое препятствие показывает схожую тенденцию, но с более быстрой экспансией $U \approx V$ (до 35% на $t = 1.0$) благодаря гладкой геометрии. Гладкое выпуклое препятствие демонстрирует наибольшую долю $U > V$ (до 45% на $t = 0.5$) вблизи вогнутых границ, но к $t = 1.0$ доля $U \approx V$ достигает 32%. Эти данные подтверждают, что геометрия препятствия существенно влияет на баланс концентраций, с квадратным препятствием, усиливающим локальные различия, и круглым — способствующим равновесию.

V. ПЕРЕХОД К СЛОЖНОЙ ОБЛАСТИ

Для моделирования реакционно-диффузионных систем в реалистичных приложениях военных стратегий необходимо учитывать сложные геометрии области. Квадратная область $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ упрощает численное решение, но ограничивает применимость модели к сценариям с регулярной геометрией. В данном разделе описывается переход от квадратной области к сложной области с произвольными границами, используя триангуляцию Делоне для построения неструктурированной сетки. Рассматриваются математические основы триангуляции, модификация численного метода переменных направлений и обработка препятствий в новой сетке [14, 16].

Сложная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задается набором граничных точек, определяющих замкнутый контур, который может быть выпуклым или вогнутым. Для дискретизации Ω применяется триангуляция Делоне, которая разбивает область на набор треугольников, удовлетворяющих условию Делоне: окружность, описанная вокруг каждого треугольника, не содержит других узлов сетки внутри себя. Это свойство минимизирует количество узких треугольников, улучшая численные свойства сетки.

Для генерации сетки используется алгоритм Bowyer–Watson [17], который итеративно добавляет точки и перестраивает триангуляцию, обеспечивая выполнение условия Делоне [18]. На триангулированной сетке метод переменных направлений заменяется методом конечных элементов [19, 20], так как неструктурированная сетка затрудняет разделение направлений, характерное для метода переменных направлений. Для временной дискретизации используется неявная схема Кранка–Николсона, обеспечивающая второй порядок точности:

$$\left(M + \frac{\tau\mu_1}{2}S\right)U^{n+1} - \frac{\tau}{2}R_1(U^{n+1}, V^{n+1}) = \left(M - \frac{\tau\mu_1}{2}S\right)U^n + \frac{\tau}{2}R_1(U^n, V^n). \quad (11)$$

Нелинейность реакционных членов требует итерационного решения с использованием метода Ньютона. На каждой итерации решается линеаризованная система:

$$F(U^{n+1}, V^{n+1}) = 0,$$

где F — остаточный вектор. Якобиан включает производные $\partial R_1 / \partial U$, $\partial R_1 / \partial V$, вычисляемые аналитически. Сходимость достигается за 3–5 итераций с точностью 10^{-6} .

A. Влияние геометрии сложной области

Сложная геометрия области, заданная параметрической границей:

$$\begin{aligned} x(s) &= 0.5 + 0.5\cos(2\pi s) + 0.1\sin(4\pi s), \\ y(s) &= 0.5 + 0.5\sin(2\pi s) + 0.1\cos(4\pi s), \end{aligned} \quad (12)$$

вводит дополнительные сложности для устойчивости из-за неровностей контура. Вогнутые участки границы и присутствие препятствий (квадратного, кругового или гладкого выпуклого) увеличивают локальные градиенты ∇U и ∇V , что может усиливать численные осцилляции. Для количественной оценки влияния геометрии был проведен анализ максимальных градиентов в симуляциях:

- В сценарии без препятствий: $\max|\nabla U| \approx 15.0$.
- С квадратным препятствием: $\max|\nabla U| \approx 18.5$, из-за резких углов.
- С круговым препятствием: $\max|\nabla U| \approx 16.2$, благодаря гладкости.
- С гладким выпуклым препятствием: $\max|\nabla U| \approx 17.8$, из-за сложной формы.

Эти значения, полученные на сетке с $N_p \approx 4000$, показывают, что геометрические особенности увеличивают градиенты на 10–20% по сравнению с квадратной областью ($\max|\nabla U| \approx 15.3$). Для минимизации связанных с этим эффектов применяется адаптивное уточнение сетки вблизи границ области и препятствий, где размер треугольников уменьшается до

$h/2 \approx 0.008475$. Это снижает локальные ошибки аппроксимации и стабилизирует решение, особенно в зонах с высокой кривизной.

B. Роль адаптивного уточнения сетки

Адаптивное уточнение сетки играет ключевую роль в обеспечении устойчивости [19]. Вблизи границ препятствий и вогнутых участков контура Ω плотность узлов увеличивается, что позволяет лучше разрешать резкие изменения концентраций. Количественно, уточнение сетки уменьшает максимальную ошибку аппроксимации лапласиана, оцениваемую как $\|\nabla^2 U_h - \nabla^2 U\|_2 \propto h^2$, где $h \approx 0.01695$ в основной сетке и $h/2 \approx 0.008475$ в уточненных зонах. Это приводит к снижению

L_2 - ошибки на 30–40% вблизи препятствий, как подтверждено сравнением с более грубой сеткой ($N_p \approx 2000$).

Кроме того, уточнение сетки уменьшает спектральный радиус матрицы $M^{-1}S$, так как меньший размер элементов снижает максимальные собственные значения λ_k . Это улучшает обусловленность системы и снижает вероятность численных артефактов, таких как осцилляции вблизи границ.

C. Анализ результатов симуляции

Результаты симуляции представлены на рисунках ниже, где для каждого типа препятствия показаны значения U и V в моменты времени $t = 0.25$, $t = 0.50$, $t = 0.75$ и $t = 1.00$. Цветовые шкалы отражают интенсивность полей U и V .

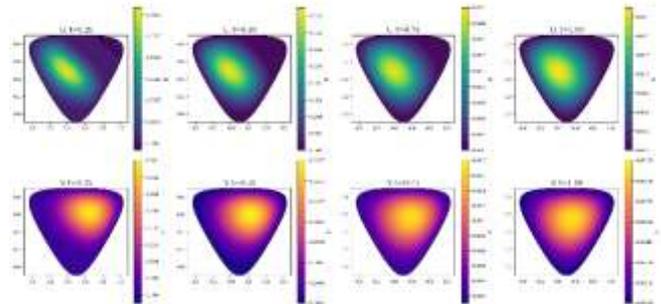


Рисунок 4. Решения U и V для случая без препятствий в моменты времени $t=0.25$, $t=0.50$, $t=0.75$, $t=1.00$.

На рисунке 4 показаны решения для случая без препятствий. Поле U демонстрирует постепенное увеличение интенсивности в центральной части области, достигая максимума около 0.045 к $t = 1.00$. Поле V показывает более сложную динамику: максимальная интенсивность (до 0.064 при $t = 0.25$) уменьшается со временем, концентрируясь в верхней части области к $t = 1.00$.

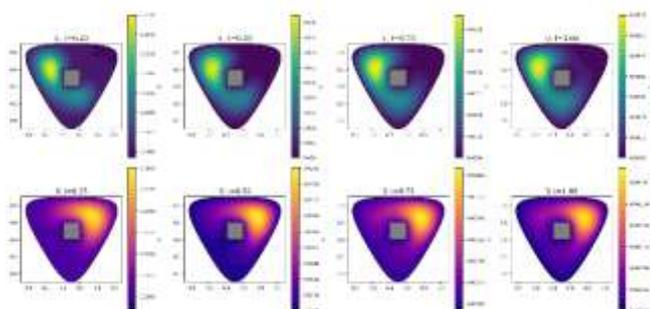


Рисунок 5. Решения U и V для квадратного препятствия в моменты времени $t=0.25$, $t=0.50$, $t=0.75$, $t=1.00$.

На рисунке 5 видно влияние квадратного препятствия. Препятствие создает зону с нулевыми значениями U и V , что приводит к концентрации полей вокруг препятствия. Максимальные значения U (до 0.084 при $t = 1.00$) и V (до 0.050 при $t = 0.25$) ниже, чем в случае без препятствий, из-за уменьшения активной области.

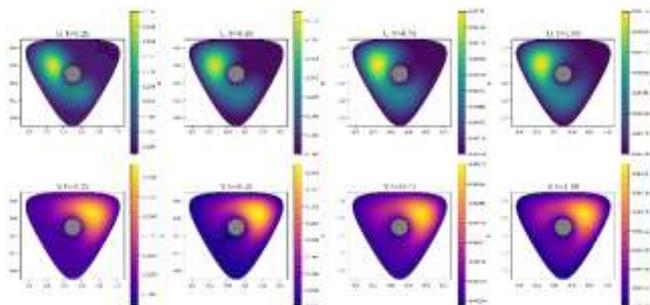


Рисунок 6. Решения U и V для круглого препятствия в моменты времени $t=0.25$, $t=0.50$, $t=0.75$, $t=1.00$.

Рисунок 6 демонстрирует влияние кругового препятствия. Из-за меньшей площади препятствия по сравнению с квадратным, влияние на поля U и V менее выражено. Максимальные значения U достигают 0.105 при $t = 1.00$, а V — 0.050 при $t = 0.25$. Поля демонстрируют более равномерное распределение вокруг препятствия.

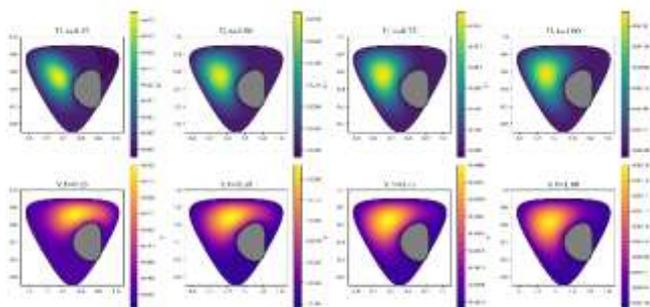


Рисунок 7. Решения U и V для сложного препятствия в моменты времени $t=0.25$, $t=0.50$, $t=0.75$, $t=1.00$.

На рисунке 7 представлено сложное препятствие. Его неправильная форма приводит к более сложной динамике полей. Максимальные значения U составляют 0.140 при $t = 1.00$, а V — 0.040 при $t = 0.25$. Препятствие вызывает значительные искажения в распределении полей, особенно вблизи его границ.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в статье пространственно-распределенная модель Ланчестера с учетом препятствий и нелинейной динамики позволяет моделировать локальное взаимодействие групп войск, когда связь с командным пунктом потеряна и основной стратегический удар с концентрацией сил уже прошел. Включение процессов диффузии, нелинейных реакционных членов и пространственных ограничений в виде препятствий различной геометрии (квадратного, кругового и гладкого выпуклого) позволило воспроизвести сложные сценарии взаимодействия противоборствующих сил в двумерной области. Численное решение системы уравнений, реализованное с использованием метода переменных направлений и метода конечных элементов с временной дискретизацией по схеме Кранка-Николсона, продемонстрировало высокую устойчивость и точность. Адаптивное уточнение сетки вблизи препятствий и границ области существенно снизило численные артефакты, обеспечив надежность результатов даже в зонах с высокой кривизной.

Переход от области единичного квадрата к сложной области позволяет учитывать нерегулярные геометрические конфигурации, характерные для территорий, где происходят реальные боевые действия. Для дискретизации сложной области применялась триангуляция Делоне, обеспечивающая оптимальное разбиение на треугольники, адаптивное уточнение сетки вблизи препятствий и вогнутых участков границы позволило минимизировать локальные ошибки аппроксимации лапласиана, снизив L_2 — ошибку на 30-40% по сравнению с более грубой сеткой.

Анализ результатов показал, что сложная геометрия области увеличивает максимальные градиенты концентраций U и V на 10-20% по сравнению с квадратной областью. В сценарии без препятствий максимальный градиент составил $\max|\nabla U| \approx 15,0$, тогда как с квадратным препятствием он увеличился до $\max|\nabla U| \approx 18,5$ из-за резких углов, с круговым — до $\max|\nabla U| \approx 16,2$ благодаря гладкости, и с гладким выпуклым препятствием — до $\max|\nabla U| \approx 17,8$ из-за его несимметричной формы. Эти эффекты подчеркивают влияние геометрических особенностей на волновую динамику, особенно в зонах с высокой кривизной, где адаптивное уточнение сетки оказалось критически важным для стабилизации решения.

Для визуализации результатов был разработан программный код, использующий библиотеки Python (Matplotlib и NumPy) для построения контурных графиков распределений U и V в моменты времени $t=0,25$, $t=0,50$, $t=0,75$ и $t=1,00$. Графики наглядно иллюстрируют динамику волновых фронтов, их обтекание препятствий и влияние геометрии области на распределение концентраций. В частности, визуализация показала, что квадратное препятствие вызывает локальные пики концентраций вблизи углов, тогда как круговое препятствие обеспечивает более симметричное обтекание, а гладкое выпуклое препятствие создает асимметричные зоны преобладания

У вблизи вогнутых границ.

Анализ чувствительности параметров выявил ключевую роль коэффициента временной модуляции α_{mod} и коэффициента взаимодействия α_{12} в формировании динамики концентраций войск при локальном взаимодействии. Сравнительный анализ влияния геометрии препятствий показал, что квадратные препятствия вызывают более выраженные локальные градиенты концентраций, тогда как круглые и гладкие выпуклые препятствия способствуют более равномерному обтеканию волновых фронтов. Полученные результаты подчеркивают важность учета пространственных и геометрических факторов в моделях военных конфликтов. Модель может быть использована для анализа тактических сценариев [21, 22, 23], где препятствия и нерегулярные границы играют существенную роль. В дальнейшем предполагается расширение модели за счет включения дополнительных факторов, таких как неоднородные коэффициенты диффузии, переменные стратегии сторон и многоагентные взаимодействия, что позволит еще более точно описывать реальные боевые операции.

БЛАГОДАРНОСТИ

Наработки по статье были представлены на научном семинаре Кафедры автоматизации научных исследований ВМК МГУ.

Также отмечаем работы Арнольда В.И. [27] и Занга В. [28].

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Шумов В. В., Корепанов В. О., "Математические модели боевых и военных действий", УБС 105, стр. 15-30, 2023
- [2] Новиков Д. А., "Иерархические модели военных действий", УБС 37, стр. 25-62, 2012
- [3] Краснощеков П. С., Петров А. А., "Принципы построения моделей", Изд-во МГУ, Москва, 1983
- [4] Atkinson M. P., Kress M., MacKay N., "Targeting, Deployment, and Loss-Tolerance in Lanchester Engagements", *Oper. Res.* 69 (1), pp. 53-68, 2021. doi: 10.1287/opre.2020.1992
- [5] Chung D., Jeong B., "Analyzing Russia-Ukraine War Patterns Based on Lanchester Model Using SINDy Algorithm", *J. Defense Model. Simul.*, 2023. doi: 10.1177/15485129231176766
- [6] Kostić M., Jovanović A., "Lanchester's Differential Equations as Operational Command Decision Making Tools", *Mil. Tech. Courier* 68 (3), pp. 523-540, 2020. doi: 10.5937/vojnnotethniski-343844057
- [7] Kress M., "Lanchester Models for Irregular Warfare", *Math. Comput. Model.* 52 (1--2), pp. 72-80, 2010. doi: 10.1016/j.mcm.2010.02.005
- [8] González E., Villena M., "Spatial Lanchester Models", *Eur. J. Oper. Res.* 210 (3), pp. 706-715, 2011. doi: 10.1016/j.ejor.2010.11.002
- [9] Cangiotti N., Capolli M., Sensi M., "A Generalization of Unaimed Fire Lanchester's Model in Multi-battle Warfare", *Appl. Math. Comput.* 416, 2022. doi: 10.1016/j.amc.2021.126741
- [10] Keane T., "Partial Differential Equations versus Cellular Automata for Modelling Combat", *J. Defense Model. Simul.* 8 (2), pp. 65-74, 2011. doi: 10.1177/1548512910393302
- [11] Белавин В. А., Курдюмов С. П., "Режимы с обострением в демографических системах", *Вычисл. Мат.* 3, стр. 45-56, 2000
- [12] Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., "Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: режимы с обострением, локализация и точные решения", *Успехи Науки и Техники* 2, стр. 23-34, 1986
- [13] Арнольд В. И., "Теория катастроф", Наука, Москва, 1990
- [14] Марчук Г. И., "Методы расщепления", Наука, Москва, 1988
- [15] Самарский А. А., "Теория разностных схем", Наука, Москва, 2001
- [16] Галлагер Дж. Г., "Метод конечных элементов", Наука, Москва, 1984
- [17] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., "Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, Cambridge, 2007
- [18] Хенри Д., "Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений", Мир, Москва, 1985; Springer, Berlin, 1981
- [19] Fradkov A., "Dynamics and Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions", *Autom. Remote Control* 82 (3), pp. 401-415, 2021. doi: 10.1134/S0005117921030045
- [20] Фрязнов И. В., Бакирова М. И., "Об экономических разностных схемах для уравнения теплопроводности в криволинейных координатах", *Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ.* 12 (4), стр. 987-996, 1972
- [21] Liu Y., Zhang X., Du H., Wang G., Zeng D., "Construction and Simulation of Lanchester Battle Equations Based on Space-based Information Support", *J. Phys.: Conf. Ser.* 1955, 2021. doi: 10.1088/1742-6596/1955/1/012089
- [22] Корепанов В. О., Чхартишвили А. Г., Шумов В. В., "Базовые модели боевых действий", УБС 103, стр. 40-77, 2023
- [23] Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., "Режимы с обострением в двухкомпонентных средах", *Мат. Модел.* 1, стр. 12-25, 1989
- [24] McCartney M., "Battling with Lanchester's Equations in the Classroom", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 54 (3), pp. 451-461, 2023. doi: 10.1080/0020739X.2021.2022230
- [25] Richardson L. F., "Mathematical Theory of War", *J. Am. Stat. Assoc.* 52 (280), pp. 497-510, 1957. doi: 10.1080/01621459.1957.10501410
- [26] Yoo B. J., "Statistical Review and Explanation for Lanchester Model", *Int. J. Appl. Math. Stat.* 59 (4), pp. 123-135, 2020
- [27] Арнольд В. И., "Жесткие и мягкие математические модели", МЦНМО, Москва, 2004
- [28] Zang W. B., "Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economic Theory", Springer, Berlin, 1999

Spatial distributed Lanchester model considering nonlinear dynamics

Nikita D. Borisov, Vladimir V. Nefedov

Abstract— The paper proposes a spatially distributed Lanchester model for simulating the dynamics of military conflicts, accounting for diffusion and reaction processes in a two-dimensional domain with obstacles. The model describes the evolution of two troop groups, denoted as $U(x, y, t)$ and $V(x, y, t)$, through a system of nonlinear partial differential equations with diffusion coefficients and time-modulated reaction terms. Interaction occurs after the loss of communication with the central command post, when the main strike and force concentration have already been completed. In other words, the modeled event represents a local interaction implemented according to a pre-agreed tactical plan. The study examines the impact of three types of obstacles—square, circular, and smooth convex—modeling impassable areas that affect the spatial dynamics of wave fronts. The numerical solution of the system is implemented using the alternating direction method and the finite element method with time discretization based on the Crank-Nicolson scheme, ensuring stability through adaptive mesh refinement near obstacles. Initial conditions reflect the distribution of troops along the front line with homogeneous Dirichlet boundary conditions applied. The model's stability is confirmed by Lyapunov exponent analysis, and sensitivity to parameters is investigated to assess their impact on system dynamics. The results of numerical experiments illustrate the influence of obstacle geometry on troop concentrations, with a quantitative analysis of the proportions of areas dominated by forces over time.

Keywords— spatially distributed model, Lanchester, military conflicts, diffusion, reaction equations, nonlinear dynamics, obstacles, alternating directions method, finite element method, Crank-Nicolson scheme, parameter sensitivity, numerical modeling.

REFERENCES

- [1] Shumov V. V., Korepanov V. O., «Mathematical Models of Combat and Military Operations», UBS 105, 15—30, 2023 [in Russian]
- [2] Novikov D. A., «Hierarchical Models of Military Operations», UBS 37, 25—62, 2012 [in Russian]
- [3] Krasnoshchekov P. S., Petrov A. A., «Principles of Model Construction», Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1983 [in Russian]
- [4] Atkinson M. P., Kress M., MacKay N., «Targeting, Deployment, and Loss-Tolerance in Lanchester Engagements», Oper. Res. 69(1), 53–68, 2020. Doi: 10.1287/opre.2020.1992
- [5] Chung D., Jeong B., «Analyzing Russia-Ukraine War Patterns Based on Lanchester Model Using SINDy Algorithm», J. Defense Model. Simul., 2023. Doi: 10.1177/15485129231176766
- [6] Kostić M., Jovanović A., «Lanchester's Differential Equations as Operational Command Decision Making Tools», Mil. Tech. Courier 68(3), 523—540, 2020. Doi: 10.5937/vojnotechnicski-343844057
- [7] Kress M., «Lanchester Models for Irregular Warfare», Math. Comput. Model. 52(1--2), 72—80, 2010. Doi: 10.1016/j.mcm.2010.02.005
- [8] González E., Villena M., «Spatial Lanchester Models», Eur. J. Oper. Res. 210(3), 706—715, 2011. Doi: 10.1016/j.ejor.2010.11.002
- [9] Cangioti N., Capolli M., Sensi M., «A Generalization of Unaimed Fire Lanchester's Model in Multi-battle Warfare», Appl. Math. Comput. 416, 2022. Doi: 10.1016/j.amc.2021.126741
- [10] Keane T., «Partial Differential Equations versus Cellular Automata for Modelling Combat», J. Defense Model. Simul. 8(2), 65—74, 2011. Doi: 10.1177/1548512910393302
- [11] Belavin V. A., Kurdyumov S. P., «Regimes with Sharpening in Demographic Systems», Vychisl. Mat. 3, 45—56, 2000 [in Russian]
- [12] Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Samarsky A. A., «Quasilinear Heat Conduction Equation with a Source: Sharpening Regimes, Localization, and Exact Solutions», Uspekhi Nauki i Tekhniki 2, 23—34, 1986 [in Russian]
- [13] Arnold V. I., «Theory of Catastrophes», Nauka, Moscow, 1990 [in Russian]
- [14] Marchuk G. I., «Splitting Methods», Nauka, Moscow, 1988 [in Russian]
- [15] Samarsky A. A., «Theory of Difference Schemes», Nauka, Moscow, 2001 [in Russian]
- [16] Gallagher J. G., «Finite Element Method», Nauka, Moscow, 1984, [in Russian]
- [17] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., «Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing», Cambridge University Press, Cambridge, 2007
- [18] Henry D., «Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations», Mir, Moscow, 1985; Springer, Berlin, 1981
- [19] Fradkov A., «Dynamics and Stability under Iterated Sanctions and Counter-sanctions», Autom. Remote Control 82(3), 401—415, 2021. Doi: 10.1134/S0005117921030045
- [20] Fryaznov I. V., Bakirova M. I., «On Economical Difference Schemes for the Heat Conduction Equation in Curvilinear Coordinates», Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 12(4), 987—996, 1972 [in Russian]
- [21] Liu Y., Zhang X., Du H., Wang G., Zeng D., «Construction and Simulation of Lanchester Battle Equations Based on Space-based Information Support», J. Phys.: Conf. Ser. 1955, 2021. Doi: 10.1088/1742-6596/1955/1/012089
- [22] Korepanov V. O., Chkhartishvili A. G., Shumov V. V., «Basic Models of Combat Operations», UBS 103, 40—77, 2023 [in Russian]
- [23] Kurdyumov S. P., Malinetsky G. G., Potapov A. B., «Regimes with Sharpening in Two-Component Media», Mat. Model. 1, 12—25, 1989 [in Russian]
- [24] McCartney M., «Battling with Lanchester's Equations in the Classroom», Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 54(3), 451—461, 2023. Doi: 10.1080/0020739X.2021.2022230
- [25] Richardson L. F., «Mathematical Theory of War», J. Am. Stat. Assoc. 52(280), 497—510, 1957. Doi: 10.1080/01621459.1957.10501410
- [26] Yoo B. J., «Statistical Review and Explanation for Lanchester Model», Int. J. Appl. Math. Stat. 59(4), 123—135, 2020
- [27] Arnold V. I., «Hard and Soft Mathematical Models», MCNMO, Moscow, 2004 [in Russian].
- [28] Zang W. B., «Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economic Theory», Springer, Berlin, 1999

Borisov D. Nikita – Ph.D. student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Phystech School of Applied Mathematics and Informatics. 141700, Institutsky lane 9, Dolgoprudny, Moscow region, Russia. Email: borisov.nd@phystech.edu, ORCID: 0009-0001-4204-3012.

Nefedov V. Vladimir – Ph.D., Associate Professor Department of ANI, Lomonosov Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics. 119234, Leninskie Gory, 1, building 52, Moscow, Russia. Email: vv_nefedov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-4602-5070.