Разложения типа Вольда и линейное оценивание для нестационарных процессов.

А.В.Павлов

Аннотация—**В статье приводятся тождества аналогичные тождеству Вольда и линейные оценки, основанные на этом тождестве, для произвольных нестационарных последовательностей (процессов) с ограниченной корреляционной функцией для случая, когда все линейное оценивание проводится по нецентрированным значениям проектированием на нецентрированные значения.**
Доказано существование обновляющейся последовательности и стремление сингулярной компоненты к математическому ожиданию при стремлении корреляционной функции K(t,s) центрированного процесса к нулю при стремлении t-s к бесконечности.

Ключевые слова— **Тождества Вольда , произвольные процессы, оптимальная линейная фильтрация**

I. Введение

В статье приводятся тождества аналогичные тождеству Вольда (Wold H.O.A),[1], и линейные оценки, основанные на этом тождестве, для случая произвольных нестационарных процессов с ограниченной корреляционной функцией.

Все ортонормированные обновляющиеся последовательности разложений произвольных процессов в теоремах 1,4 построены с помощью процессов ортогонализации Гильберта-Шмидта в гильбертовых пространствах линейного замыкания [2,3] нецентрированных случайных величин без участия известных или оцененных математических ожиданий. В теоремах 1,4 доказано существование сингулярной составляющей и обновляющейся последовательности ортонормированных случайных величин $\delta_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ для произвольной случайной последовательности $\xi_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$:

$$\xi_k = \sum_{m=-\infty}^{k} \delta_m c_{k-m}(k) + \xi_\sigma^k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

,и $c_m(k) \equiv c_m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ для случая стационарных в каком-либо смысле последовательностей. При этом обновляющаяся последовательность построена процессом ортогонализации исходной последовательности $\xi_i, i = k, k-1, \ldots,$ с использованием наборов $E\xi_i\xi_j, i, j = k, k-1, \ldots,$ без участия математических ожиданий.

Во всех результатах не предполагается гауссовость исходной последовательности.

Существенное внимание в статье (теоремы 1,3,4) уделено доказательству равенства сингулярной компоненты математическому ожиданию $\xi_\sigma^k = E_k = \xi_k$ при условии стремления к нулю в той или иной форме корреляционной функции центрированной последовательности $E\xi_i^0\xi_j^0 \to 0, |i-j| \to \infty$.

Все результаты данной статьи доказываются методами гильбертовых пространств фактически без использования традиционных вероятностных методов. Как следствие доказана интересная , по мнению автора, для теории гильбертовых пространств теорема 2.

Статья получена 18 июня 2015. А.В. Павлов – профессор МИРЭА (email: login11@umail.ru).

II. Тождества Вольда для нестационарных процессов

Обозначим $E\xi_k$ - математическое ожидание ξ_m, $\xi_m^0 = \xi_m - E\xi_m, E\xi_k^0\xi_m^0 = K(m,k),\ k, m \in \ldots, -1, 0, 1, 2\ldots,$ $\|\eta\|^2 = M\eta^2$.По определению $Pr_{\geq s, \leq r}\xi_k$ - оптимальная в среднеквадратическом смысле линейная оценка ξ_k, полученная проектированием случайной величины ξ_k на $H(s,r)$, $H(s,r)$ - линейное замыкание случайных величин $\xi_i, s \leq i \leq r,\ r, s \in \ldots, -1, 0, 1, 2\ldots, s < r.$ По определению, $Pr_{\geq -\infty, \leq r}\xi_k = Pr_{\leq r}\xi_k.\ H(r) = H(-\infty, r).$ Соответственно, $H^0(s,r)$ - линейное замыкание случайных величин $\xi_i^0, s \leq i \leq r,\ r, s \in \ldots, -1, 0, 1, 2\ldots, s \leq r.$ $H^0(r) = H^0(-\infty, r)$, и оптимальная в среднеквадратическом смысле линейная оценка центрированной случайной величины ξ_k^0, полученная проектированием на линейное замыкание центрированных случайных величин $H^0(s,r)$, обозначена через $Pr_{\geq s, \leq r}^0\xi_k^0,\ Pr_{\geq -\infty, \leq r}^0\xi_k^0 = Pr_{\leq r}^0\xi_k^0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только процессы, у которых $K(t) < \infty, t \in (-\infty, \infty)$.

Основная часть теоремы 1 состоит в доказательстве тождества, аналогичного тождеству Вольда для нестационарных последовательностей методами гильбертовых пространств, фактически, без использования методов теории вероятности. Данное доказательство по своей структуре повторяет традиционное доказательство тождество Вольда для стационарных последовательностей, но ввиду того, что все основные результаты статьи опираются на конкретные положения данного доказательства, мы приведем это доказательство в дополнительной части 3 данной статьи.

Теорема 1.

Для произвольной случайной последовательности $\xi_i, i \in \ldots,-1,0,1,2\ldots,$ такой, что $K(t,s) = E\xi_t^0\xi_s^0 < K_0 < \infty, E\xi_t < c_2 = const.,$ при любых целых $t,s,$ имеет место:

а) для всех $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots,$

$$\xi_k = \sum_{m=-\infty}^{k} \delta_m c_{k-m}(k) + \xi_\sigma^k,$$

$$E\xi_\sigma^k\delta_i = 0, i = 0,\pm1,\pm2,\ldots, E\delta_j^2 = 1, E\delta_i\delta_j = 0,$$

äëÿ âñåõ $i \neq j,$

$$\xi_\sigma^k \in \bigcap_{j=-\infty}^{k} H(k),$$

и в этой сумме

$$\xi_\sigma^k \equiv 0 \text{ при всех } k \in \ldots,-1,0,1,2\ldots,$$

если $E_k = E\xi_k = 0, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots;$

б) для стационарной в любом смысле последовательности $xi_i, i = 0\pm1,\pm2,\ldots,$ если $lim_{r\to\infty} \sup_{|t-s|>r} K(r) = 0, K(r) = K(t+r,t),$ и $K(r_1) \le K(r_2)$ при всех $r_1 < r_2,$ то для всех целых k имеет место :

$$\xi_k = \sum_{m=-\infty}^{k} \delta_m c_{k-m} + E,\ E = E\xi_i,$$

причем во всех этих равенствах ортонормированная последовательность $\{\delta_k\}$ построена специальным процессом ортогонализации нецентрированных векторов $\xi_i, i = 0,\pm1,\ldots.$

Доказательство приведено в дополнительной третьей части данной статьи.

Далее, нам понадобятся обозначения линейных оценок

$$\hat{\xi}_k(k-R) = Pr_{\le k-R}\xi_k, R > 1,$$

$$\hat{\xi}_k = Pr_{\le k-1}\xi_k, \hat{\xi}_k(k-R,k-S) =$$

$$= Pr_{\ge k-R,\le k-S}\xi_k, 0 \le R \le S \le \infty.$$

Теорема 2.

Пусть $\xi_i, i \in \ldots,-1,0,1,2\ldots,$ - произвольный процесс такой . что $sup_{r,s}K(r,s) < \infty$.

Если $K(r+t,s) = 0$ при всех r,s и $t > T = const., T \in 1,2,\ldots,$, то для произвольного целых k и $R > T,$

1.

$$\hat{\xi}_k(k-R) = E_k = E\xi_k,$$

2.

$$\hat{\xi}_k = E_k + c_T\delta_{k-T} + \ldots + c_0\delta_k,$$

$$\hat{\xi}_k = c_T\delta_{k-T} + \ldots + c_0\delta_k + \hat{\xi}_k(k-T,k-S) + 0(1),\ S \to \infty,$$

$$\hat{\xi}_k(k-T,k-S) = E_k + 0(1), S \to \infty\ ,$$

$$E\delta_{k-j} = 0, j = 1,\ldots,T.$$

Доказательство.

Так как $1 \in H(k)$ при произвольном целом m (это было отмечено при доказательстве пункта б) теоремы 1), то повторяя доказательство пункта б) теоремы 1, пользуясь соотношением (3) при произвольных $k > m = k-R,$ получаем равенство $Pr_{\le k-R}\xi_k^0 + E_k = Pr_{\le k-R}\xi_k, E_k = E,$ в котором $Pr_{\le k-R}\xi_k^0 = 0,$ при $R > T,$ так как в выражении этой проекции по формуле (3) все скалярные произведения равны нулю ввиду равенства нулю $K(r), r \ge R > T.$ Пункт 1 теоремы 2 доказан.

Для доказательства пункта 2 заметим что, обозначениях пункта а) теоремы 1, последовательность ортонормированных векторов

$$e_1(k-R+1) = \xi_{k-R}/\|\xi_{k-R}\|, e_2(k-R+1),\ldots,$$

полученная последовательной ортогонализацией векторов $\xi_{k-R},\xi_{k-R-1},\ldots,$ с добавленными к ней базисными ортами $\delta_{k-(R-1)},\ldots,\delta_k$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $H(k),$ при любом $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\ R = 1,2,\ldots,$ (данный факт вытекает из равенства (2)). Следовательно, при целом $R > T$ вектор ξ_k раскладывается по этому базису в виде

$$\xi_k = (\xi_k,\delta_{k-(R-1)})\delta_{k-(R-1)} + \ldots + (\xi_k,\delta_k)\delta_k +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k, e_j(k-R+1))e_j(k-R+1),$$

$$e_j(k-R+1) \in H(k-R), j = 1,2,\ldots,\ R > T.$$

Как это следует из пункта 1 данной теоремы бесконечная сумма здесь равна $E = E_k.$ Аналогично, бесконечная сумма плюс часть первых слагаемых $(\xi_k,\delta_{k-(R-1)})\delta_{k-(R-1)} + \ldots + (\xi_k,\delta_{k-(T+1)})\delta_{k-(T+1)}$ совпадает с проекцией $Pr_{\le k-(T+1)}\xi_k,$ которая равна $E = E_k$ по первому пункту данной теоремы.

Теорема 2 доказана. (Доказательство равенства нулю $E\delta_{k-j} = 0, j = 0,1,\ldots,T$ для более общего случая приведено при доказательстве аналогичной теоремы 4.)

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится лемма 1.

Лемма 1.

Если $Pr_{\geq k-T,\leq k}\xi_k^0$ - проекция вектора ξ_k^0 на $H(k-T,k)$ ($H(k-T,k)$ - подпространство порожденное, вообще говоря, нецентрированными векторами $\xi_{k-T},\ldots,\xi_k$), то

$$Pr_{\geq k-T,\leq k}\xi_k^0 \in H(\delta_{k-T},\ldots,\delta_k),$$

где $H(\delta_{k-T},\ldots,\delta_k)$ - подпространство порожденное векторами $\delta_{k-T},\ldots,\delta_k$.

Доказательство.

Отметим прежде всего, что ввиду $E\delta_j = 0, j = 0,\pm1,\pm2,\ldots,$ проекция ξ_k на $H(\delta_{k-T},\ldots,\delta_k)$ совпадает с проекцией ξ_k^0 на это подпространство.

Далее, проекция ξ_k^0 на $H(k)$ совпадает с суммой проекций на ортогональные подпространства $H(k-T,k)$ и его ортогональное дополнение в $H(k)$. (Существование ортогонального дополнения следует из определения гильбертова пространства.) Если b - проекция на такое ортогональное дополнение, то $b = d + \delta$, где d - проекция b на $H(k-T-1)$, и $\delta \perp H(k-T-1), d \in H(k-T-1)$.

Следовательно, b как проекция ξ_k^0 на ортогональное дополнение равна сумме проекций на ортогональные подпространства: одно порожденное δ второе совпадает с $H(k-T-1)$. (Так как проекция b лежит в гильбертовом пространстве порожденном $H(k-T-1)\bigcup\delta.$)

Проекция ξ_k^0 на $H(k-T-1)$ равна нулю , так как все скалярные произведения $(\xi_k^0,\xi_j) = 0, j = k-T-1, k-T-2,\ldots,$ в условиях теоремы 2, следовательно, $b = C_0\delta, C_0 = const.$

Так как $\delta \perp H(k-T-1)$, то $\delta \in H(\delta_{k-T-1},\ldots,\delta_k)$, (см. построение базиса в теореме 1.)

Мы доказали, что проекция ξ_k^0 на все подпространство $H(k)$, совпадающее по теореме 2 с $c_T\delta_{k-T} + \ldots + c_0\delta_k$, совпадает с проекцией этого вектора на подпространство порожденное $\xi_k,\ldots,\xi_{k-T}$ плюс проекция на вектор $\delta \in H(\delta_{k-T},\ldots,\delta_k)$.

Теорема 3.

В условиях теоремы 2

$$Pr_{\geq k-T,\leq k}\xi_k^0 = c_T\delta_{k-T} + \ldots + c_0\delta_k.$$

Доказательство.

При доказательстве леммы 1 мы проверили, что проекция ξ_k^0 на все подпространство $H(k)$ равно $Pr_{\geq k-T,\leq k}\xi_k^0 + b, b \perp H(k-T,k), b = c_0\delta,$ $\delta \in H(\delta_{k-T},\ldots,\delta_k)$. Это утверждение эквивалентно тому, что вектор b из ортогонального дополнения векторов порожденных $\xi_(k-T),\ldots,\xi_k$ совпадает с вектором $c_0\delta$ из ортогонального дополнения пространства порожденного $\xi_{k-T},\xi_{k-T-1},\ldots,$ то есть равен нулю [3], так как он ортогонален всем базисным ортам гильбертова пространства $H(k)$.

Теорема 3 доказана.

Приведем полезное для сравнения дискретных методов с методами основанными на интегрировании траекторий следствие 1.

Следствие 1.

В условиях пункта б) теоремы 1,если $S(N)$ - сумма коэффициентов оптимальной в средне-квадратическом оценки ξ_k по некоррелированным с ней наблюдениям $\xi_{k-T-1},\ldots,\xi_{k-T-R}$, то $S(N) \to 1.$

Доказательство.

По пункту б) теоремы 1 из сходимости оценки в средне-квадратическом к E следует сходимость математических ожиданий [2], что эквивалентно утверждению следствия 1.

III. Тождества Вольда и оптимальные линейные оценки для процессов с «нестационарным» математическим ожиданием

Из теоремы 1 непосредственно следует теорема 4, в которой рассмотрена корреляционная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности.

Теорема 4.

Пусть $\xi_i, i \in \ldots,-1,0,1,2\ldots,$ - произвольный процесс такой, что $E\xi_m = E_m < \infty, m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,$ $E\xi_{m+R}^0\xi_m^0 = K(R) < \infty, R = 0,1,\ldots,$ $\lim_{R\to\infty} K(R) = 0,$ то имеют место разложение и утверждение пункта а) теоремы 1, причем

1.
$$\lim_{R\to+\infty}\hat{\xi}_k(k-R) = E_k = E\xi_k,$$

2.
$$\hat{\xi}_k = \sum_{m=-\infty}^{k-1}\delta_m c_{k-m} + E_k,$$

где последовательность ортонормированных величин $\{\delta_i\}$ построена ортогонализацией нецентрированных величин $\{\xi_i\}$, без предварительной оценки математического ожидания E_k , и "обновляющая" последовательность $\delta_i, i = 0,1,\ldots,$ построена процессом ортогонализации нецентрированных векторов $\{\xi_i\}$ и одна и та же для разных k, (хотя $E\xi_{m+R}\xi_m$ зависит, вообще говоря, от двух переменных m и R).

Доказательство.

Заметим сначала, что для случая стационарной в любом смысле последовательности при условии

$\lim_{r\to\infty} K(r) = 0, K(r) = K(t+r,t)$

из теоремы 1 следует, что

$$\xi_k = \sum_{m=R}^{k} \delta_m c_{k-m} + Pr_{\le k-R}\xi_k,\ \|\delta_i\| = 1, \delta_i \perp \delta_j, \text{для всех } i \ne j,$$

$$\lim_{R\to+\infty} Pr_{\le k-R}\xi_k = E.$$

Данные утверждения эквивалентны утверждениям теоремы 3 для стационарного случая.

Нам понадобится лемма 2.

Лемма 2.

Если существует хотя бы одна предельная точка $E_* \ne 0$ множества математических ожиданий $E_i = E\xi_i, i \le k,$ то константа 1 принадлежит линейному замыканию $H(k)$ при любом целом k.

Доказательство следует из того, что в предположении ограниченности математических ожиданий $E_m = E\xi_m, m = 0, \pm1, \pm2, \dots,$ существует конечная предельная точка $E_* \ne 0,$ для некоторой подпоследовательности математических ожиданий $E_{i_j}, i_j \in 0, \pm1, \pm2, \dots.$

Для этой подпоследовательности $\sum_{j<N} \xi_{i_j} = \sum_{j<N} \xi^0_{i_j} + sum_{j<N} E_{i_j} \to E_*,$ так как в условиях равномерного по всем t, s стремления к нулю корреляционной функции $lim_{R\to\infty} K(t+R,s) = 0,$ сходимость к нулю в среднеквадратичном $l.i.m.\sum_{j<N} \xi^0_{i_j} = 0, N \to \infty,$ является известным легко проверяемым (например, прямым вычислением корреляционной функции среднего арифметического) фактом [1,4,5], сходимость $sum_{j<N} E_{i_j} \to E_*$ очевидна.

Лемма 2 доказана.

Для нестационарного случая последовательность ортонормированных случайных величин $\delta_i, i = 0, \pm1, \pm2, \dots$ строится так же как для случая стационарной последовательности в теореме 1, и для доказательства теоремы 3 надо проверить что проекции ξ_m на $\delta_{m-j}, j = 0,1,2,\dots,$ одни и те же для разных $m.$ Докажем это, сначала для δ_m.

Заметим, что из

$\xi^0_m = \Delta^0_m + Pr^0_{\le m-1}\xi^0_m, \Delta^0_m \perp \xi^0_{m-i}, i = 1,2,\dots,$

следует, что $E\Delta^0_m = E[\xi^0_m - Pr^0_{\le m-1}\xi^0_m] = 0,$ так как математическое ожидание проекции на центрированные величины равно нулю как предел нулевых математических ожиданий проекций на конечномерные пространства с центрированным базисом (из сходимости в средне-квадратическом следует сходимость моментов [2]). Следовательно, $\Delta^0_m \perp 1$ по лемме 2 $1 \in H(k-1),$ и $\Delta^0_m = \xi^0_m - Pr^0_{\le m-1}\xi^0_m \perp 1, \xi_{m-1}, \xi_{m-2}, \dots,$ (мы использовали то, что из ортогональности ξ^0_i и $E_i = const.$ следует ортогональность сумме $\xi^0_i + E_i = \xi_i, i = m-1, m-2, \dots$). Последнее соотношение эквивалентно соотношению $\Delta^0_m = \xi_m - [E_m + Pr^0_{\le m-1}\xi^0_m] \perp 1, \xi_{m-1}, \xi_{m-2}, \dots.$ Здесь вектор $d = [E_m + Pr^0_{\le m-1}\xi^0_m] \in H(m-1),$ как предел в средне-квадратическом векторов принадлежащих $H(k-1).$ Мы получили

$\Delta^0_m = \xi_m - d, d \in H(m-1), \Delta^0_m \perp H(m-1).$

По определению проекции $d = Pr_{\le m-1}\xi_m$ и $\Delta^0_m = \delta_m,$ из формулировки теоремы 4 при любом произвольном фиксированном m из набора $0, \pm1, \pm2, \dots,$ причем здесь d уже стала проекцией на соответствующие нецентрированные величины. Но вектор $\Delta^0_m,$ определялся как орт дополняющий проекцию центрированной случайной величины ξ^0_m на центрированные случайные величины $\xi^0_{m-1}, \xi^0_{m-2}, \dots, m = 0, \pm1, \pm2, \dots,$ со стационарной корреляционной функцией без участия произвольных математических ожиданий, следовательно, при любом m в его выражении все его числовые коэффициенты при центрированных случайных величинах одинаковы . Осталось заметить, что $(\xi^0_m, \Delta^0_{m-i}) = (\xi_m, \Delta^0_{m-i}) = c_i,$ $i = 0,1,\dots$ ввиду $E\Delta^0_{m-i} = 0, i = 0,1,\dots,$ и все коэффициенты разложения теоремы 4 определяются только через скалярные произведения, которые не зависят от сдвига времени (см. алгоритм построения разложения в теореме 1).

Теорема 4 доказана.

IV. Дополнительная часть

Доказательство теоремы 1.

Построим последовательность $\delta_j, j = 0, \pm1, \pm2, \dots,$ разложения пункта а) теоремы.

Фиксируем произвольное целое $k.$ Ортогонализируем вектора $\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots,$ начиная с вектора $\xi_{k-1} : e_1(k) = \xi_{k-1} / \|\xi_{k-1}\|, \dots;$ множество таких ортонормированных векторов обозначим через $e_j(k), j = 1,2,\dots.$

Существует предел по норме (в средне-квадратичном)

$$l.i.m.d_m(k) = l.i.m.\sum_{j=1}^{m}(\xi_k, e_j(k))e_j(k) = z_k,$$

$$m \to \infty, \qquad (1)$$

так как, при любом конечном m имеет место неравенство Беселя

$$\|\xi_k - \sum_{j=1}^{m}(\xi_k, e_j(k))e_j(k)\|^2 =$$

$$= \|\xi_k^2\| - \sum_{j=1}^{m}(\xi_k, e_j(k))^2 =$$

$$= \|\xi_k^2\| - \|d_m(k)\|^2 > 0,$$

[3,стр.150], и, следовательно, $\lim_{m\to\infty}\|d_m(k)\| = \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k, e_j(k))^2,$ как предел возрастающей, положительной, ограниченной последовательности существует.

Существование такого предела влечет фундаментальность последовательности $d_m(k), m = 1,2,\ldots,$:

$$\|d_s(k) - d_r(k)\| = \sum_r^s(\xi_k, e_j(k))^2 \to 0,$$

$$\min(s,r) \to \infty.$$

В полном гильбертовом пространстве $H(m)$ фундаментальность ограниченной последовательности $d_r(k), r = 1,2,\ldots,$ влечет существование предела по норме этой последовательности,[3].

Далее, разность $\xi_k - \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k, e_j(k))e_j(k)$ ортогональна любому вектору $e_j(k), \|e_j(k)\| = 1, i \in 1,\ldots,$ так как

$$(\xi_k - \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k, e_j(k))e_j(k), e_i(k)) =$$

$$(\xi_k, e_i(k)) - (\xi_k, e_i(k)) = 0, i = 1,2,\ldots,$$

(стремление к нулю остатка ряда в данном произведении вытекает из неравенства Коши-Буняковского.)

Обозначим

$$\delta_k = \xi_k - \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k, e_j(k))e_j(k) / \|\xi_k - \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k, e_j(k))e_j(k)\|,$$

$$e_j(k) \in H(k-1), j = 1,2,\ldots. \qquad (2)$$

Если норма знаменателя ноль, то стационарной последовательности величина $\xi_k \in H(k-1),$ при всех $k,$ что эквивалентно $\xi_k \in \bigcap_{j=-\infty}^{k} H(k),$ то есть $\xi_k = \xi_\sigma,$ и теорема доказана с нулевыми коэффициентами и произвольной последовательностью δ_j.

В общем случае мы добавляем к построенным для других $m \neq k$ единичным $\delta(m)$ новый единичный вектор $\delta(m),$ например, независимый от всей исходной последовательности $\xi_i, i = 0, \pm1, \pm2,\ldots,$ и уже построенных векторов δ_m (существование такой случайной величины очевидно вытекает из теоремы Колмогорова). В разложениях формулировки теоремы 1 коэффициент $c_0(m)$ около такого добавленного δ_m равен нулю по определению.

Повторяя построение для всех k мы построили последовательность ортонормированных векторов $\delta_k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$

Пусть, по определению,

$$\xi_\sigma(k) = \xi_k - \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k, \delta_j)\delta_j,$$

где $(\xi_k, \delta_j) = c_{k-j}(k), k = 0, \pm1, \pm2,\ldots,\ j = 0,1,\ldots.$ В данном равенстве существование предела частных сумм в среднеквадратическом смысле проверяется дословным повторением доказательства (1), с заменой $e_j(k)$ на δ_j.

Разложение пункта а) теоремы 1 доказано.

Равенство $\xi_\sigma = 0,$ для случая центрированной исходной последовательности следует из доказанного ниже пункта б) данной теоремы 1.

Проверим, что $\xi_\sigma^k \in \bigcap_{j=-\infty}^{k} H(k).$ Пусть это не так. Тогда существует $H(r)$ такое, что $\xi_\sigma^k \notin H(r).$ Данный факт эквивалентен тому, что $\xi_\sigma^k = g + f, g \in \overline{H(r)}.$ Так как вектора $\delta_k, \delta_{k-1},\ldots,\delta_{k-r}$ вместе с векторами $e_1(k-r) = \xi_{k-r-1}/\|\xi_{k-r-1}, e_2(k-r),\ldots,$ полученными последовательной ортогонализацией векторов $\xi_{k-r-1}, \xi_{k-r-2},\ldots,$ образуют базис в $H(k)$,то g раскладывается по базису $\overline{H(r)},$ а f можно считать без ограничения общности ортогональным $\overline{H(r)},$ то есть $g = s_{r+1}\delta_{r+1} + \ldots + s_k\delta_k \neq 0, f \in H(k-r).$ Этого не может быть, так как в этом случае $(g+f, g) = (g,g) \neq 0,$ что противоречит ортогональности $\xi_\sigma^k = g + f$ любому из векторов набора $\{\delta_i\}$.

Докажем пункт б) теоремы 1.

Отметим, что проекция вектора $\xi_k, k > m,$ на $H(m)$ (на линейное замыкание векторов $\xi_i, i \leq m$), по доказательству пункта а) теоремы 1 существует и совпадает с проекцией на вектора из $H(m)$ с добавленной к ним единицей, виду того, что единица по лемме 1 принадлежит $H(m)$.

Проекция ξ_k на $H(m), m \le k$, равна сумме проекций ξ_k^0 и E на $H(m)$. Ввиду только что отмеченного проекция E на $H(m) = H(m)\bigcup 1$ равна E, а проекция ξ_k^0 на $H(m) = H(m)\bigcup 1$ равна сумме

$$(\xi_k^0,1)1 + (\xi_k^0, l_m)l_m + (\xi_k^0, l_{m-1})l_{m-1} + \ldots = \\ = (\xi_k^0, l_m)l_m + (\xi_k^0, l_{m-1})l_{m-1} + \ldots, \tag{3}$$

где базис $1, l_m, l_{m-1}, l_{m-2}, \ldots,$ получен последовательной ортогонализацией векторов $1, \xi_m^0, \xi_{m-1}^0, \ldots,$ так как $1, \xi_m^0, \xi_{m-1}^0, \ldots,$ тоже базис пространства $H(m) = H(m)\bigcup 1.$ Из $1 \perp \xi_i^0, i = m, m-1, \ldots,$ следует, что $l_m, l_{m-1}, l_{m-2}, \ldots,$ получен последовательной ортогонализацией $\xi_m^0, \xi_{m-1}^0, \ldots.$

Мы доказали, что проекция ξ_k на $H(m), k > m,$ равна E плюс проекция центрированной величины ξ_k^0 на линейное замыкание $H^0(m)$,порожденное центрированными величинами $\xi_m^0, \xi_{m-1}^0, \ldots,$

Отметим далее, что проекция ξ_{k+1} на $H(k)$ совпадает с суммой проекций на ортогональные подпространства, первое порожденное векторами $\delta_{k-i}, i = 0,1\ldots, N,$, построенными в пункте а) данной теоремы 1, второе совпадает с проекцией на $H(k-N-1)$. Первая проекция равна $\sum_{i=k-N}^{k} \delta_i c_{k-i}$, вторая проекция, как мы только что проверили, равна $E + Pr_N$, где Pr_N равна проекции ξ_{m+1}^0 на центрированные случайные величины $\xi_{m-N-1}^0, \xi_{m-N-2}^0, \ldots.$

Стремление к нулю Pr_N при $N \to +\infty$ для случая монотонно убывающей к нулю корреляционной функции следует, во-первых, из стремления к нулю каждого слагаемого (3) при $m = k - N - 1$, во-вторых, из того, что скалярное произведение (ξ_k^0, l_{m-i}) каждого слагаемого в (3) как функция k не возрастает при любом фиксированном $m - i \le k - N - 1$.

Теорема 1 доказана.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами.Статистический подход. -М.: Наука Глав.ред.физ.-мат.лит., 1989.-304с.

[2] А.Д.Венцель. Курс теории случайных процессов. – М.:Наука. 1975. 320 с.

[3] *А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. –М.: Наука. 1976. 544 с.*

[4] Н.А.В.Павлов. Случайные рядя Фурье и их применение к теории фильтрации-прогноза. –Москва .Изд.МГУ им.Ломоносова, механ.-матем.ф-т., 2000, ISBN 5-93839-002-8. 64 с.

[5] А.В.Павлов. Теорема типа больших уклонений для критерия хи-квадрат. -М.:Успехи мат.наук. Т.51, 1(307),1996.

[6] А.В.Павлов. Достоверное прогнозирование функций, представимых в виде преобразований Лапласа или Фурье. М.: Вестник МГТУ МИРЭА.Эл.Фс. 77-57811 № 180414, 2014, 3, 2(июнь). с.78-85.

[7] A.V.Pavlov Prediction and filtering of random sequences with time-dependent expectation. –Moscow.: Scien.Bulletin of MIREA.2012, 1, v.12, p. 38-48.

Author

Professor Andrey Valerianovich Pavlov,

Russia, Moscow, 117454, pr. Vernadskogo, MIREA, higher mathematics-1, Member of Moscow Math. Soc. (at 1996-2000 ass. professor in department of Theory Probability at Lomonosov Moscow State University), e-mail: login11@umail.ru .

Home address: Russia, Moscow, 109444, Ferganskaia st.11-1,292.tel.: 8(499)7226574.

The Wold`s equalities and linear estimations for non-stationary processes.

Andrey V. Pavlov

Abstract— **In this article, the identities similar the Wold`s equalities are presented. We consider the linear estimations, based on this identity, for the arbitrary non-stationary sequences (processes) with the limited correlation function, when the linear estimation is conducted with help of the non-centered values by using of the non-centered values. The existence of the sequence brushing up is proved. We proved, that the singular component tends to the expected mean value, if the correlation function K(t,s) of the centered process tends to 0, when the t-s value tends to the infinity.**

The keywords — **the Wold`s identities, arbitrary processes, optimum linear filtration**