

Полиморфизм символьных троичных матриц и генетическое пространство кратчайших k -путей в n -кубе.

Г. Г. Рябов, В. А. Серов

Аннотация—На основании биективного представления k -граней n -куба как слов $D_i \in A_n^*$ над алфавитом $A = \{0, 1, 2\}$ и введения определения символьной троичной $(n - k + 1) \times n$ матрицы со строками-словами из A_n^* , как биекции кратчайшего k -мерного пути в n -кубе, в предлагаемой статье рассматриваются:

1. Представление строк символьной матрицы как состояний цепи Маркова и эргодические методы для изучения асимптотических геометрий (структур) кратчайших k -путей.
2. Представление символьной матрицы как рекурсивного объекта и построение счетного генетического пространства кратчайших k -путей на базе бесконечных групп и деревьев Кэли.

Ключевые слова— n -куб, конечный алфавит, k -грань, символьная матрица, k -мерный путь, инвариант-разбиение, цепь Маркова, рекурсия, генетическое пространство.

I. ВВЕДЕНИЕ

Для компактности и однозначности дальнейшего изложения дается перечень и краткое описание используемых сокращений, введенных в [1-2] на базе конструктивного мира Ю. И. Манина [3].

\mathbb{N} — множество натуральных чисел;

$A = \{0, 1, 2\}$ — троичный алфавит;

A_n^* — множество всех слов из n символов алфавита A ;

$D = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ — слово $D \in A_n^*$;

$A' = \{\emptyset, 0, 1, 2\}$ — расширение алфавита A (для операций над словами);

$\#(a)D$ — операция подсчета числа символов “ a ” в слове D ;

$D_i \times D_j$ — операция умножение (коммутативное).

Результат $D \in A_n^*$ ($d \times d = d$; $0 \times 1 = \emptyset$; $d \times 2 = d$; $d \in A$);

$\neg D$ — антиподальное слово к D (замена всех “0” на “1” и всех “1” на “0”);

$\rho_H(D_i, D_j)$ — расстояние Хэмминга между двоичными

словами (вершинами n -куба);

$\rho_{HH}(D_i, D_j)$ — расстояние Хаусдорфа-Хэмминга между словами, как биекциями k -граней;

MC/s — цепь Маркова с s состояниями (простая, однородная, с дискретным временем);

MTP — матрица переходных вероятностей для MC ;

$M = \{0, 1, 2, \dots, (k-1)\}$ — множество для k состояний MC ;

V, E — множество вершин и множество ребер, соответственно;

$\lambda | -n$ — разбиение числа n ; $P(n)$ — число всех разбиений n ;

$p(n_1, n_2, n)$ — число разбиений n на n_2 частей, каждая из которых $\leq n_1$;

a, p вершины — антиподальные вершины v_0 и v_p , для которых $\rho_H(v_0, v_p) = n$ (в тексте практически везде подразумевается, что $v_0 = \langle 00 \dots 0 \rangle$, $v_p = \langle 11 \dots 1 \rangle$);

$skap$ — кратчайший k -мерный путь между антиподальными вершинами n -куба;

$sbkd$ — символьная, биективная для $skap$ матрица диагонального вида (все символы “2” на позициях (i, j) , для которых $(j - i) \leq (k - 1)$, т.е. на диагональной полосе в k символов и под ней);

$T_d(n, k)$ — $sbkd$ -матрица для заданных n, k , для которой выполняются условия:

$$\#(2)(D_i \times D_{i+1}) = k - 1$$

$$\#(2)(D_i) = k \quad (1)$$

$T_d(n, k) \searrow v$ — действие рекурсивной декомпозиции: слияние (приклейка) нижней, $(n - k + 2)$ -ой строки и правого, $(n + 1)$ -ого столбца. $T_d(n + 1, k) = T_d(n, k) \searrow v$ (v — номер позиции в строке, где “2” заменяется “1”);

$T_d(n, k) \swarrow g$ — действие рекурсивной деструкции: отсечение последней строки и правого столбца g раз.

$T_d(n - g, k) = T_d(n, k) \swarrow g$ (без изменения других символов);

Отображение символьной (троичной) матрицы в композицию общего числа символов “2” (в матрице) на части, равные числу “2” по столбцам и представление этой композиции в виде *разбиения* и составляет сущность вычисления λ -инварианта, который определяет классы изоморфных кратчайших k -мерных путей в n -кубе [4]. Можно назвать это “сверткой” матрицы по столбцам или просто *вертикальной*

Статья получена 25 мая 2015.

Г. Г. Рябов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия (e-mail: gen-ryabov@yandex.ru).

В. А. Серов, НИВЦ, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

сверткой троичной матрицы. В предлагаемой статье, по аналогии с вертикальной сверткой, рассматривается горизонтальная свертка троичной матрицы k -диагонального вида $T_d(n, k)$, введенной в [5]. Такая свертка состоит в отображении взаимного расположения символов “1” и “2” в i -ой строке матрицы $T_d(n, k)$ в номер состояния дискретной, простой, однородной Марковской цепи, отнесенный к моменту времени t_i (раздел II).

Как отражаются эргодические свойства такой цепи Маркова на поведении локальной характеристики структуры скар-пути (степеней вершин этого пути) при $n \rightarrow \infty$ рассматривается в разделе III.

В разделе IV представлены геометрические особенности скар-путей, связанные с кривизной и кручением. В [5] рассматривались некоторые свойства $T_d(n, k)$ как рекурсивного объекта. Теперь, следуя классической схеме, будут определены база, параметры рекурсии и декомпозиция на базе некоторого действия, а развертка этой рекурсии определена как генетическое метрическое пространство троичных матриц, биективных скар-путям n -куба (раздел V).

II. ОТОБРАЖЕНИЕ СТРОК МАТРИЦЫ $T_d(n, k)$ В СОСТОЯНИЯ ЦЕПИ МАРКОВА (μ -ОТОБРАЖЕНИЕ)

Для матриц $T_d(n, k)$ и а.п. вершин $v_0 = \langle 00 \dots 0 \rangle$ и $v_p = \langle 11 \dots 1 \rangle$ по определению первая строка всегда имеет вид $D_1 = \langle |2|2|\dots|2| \rangle$ (вертикальными линиями отделены позиции символов в слове).

Ниже приведен общий вид строки D_s для матрицы при $(n - k + 1) > s > 1$, как слова из алфавита $A = \{0, 1, 2\}$:

$$D_s = \langle \dots |1|2|1|1|\dots|1|2|1|1|\dots|1|2|2|\dots|2|2|0|0|\dots|0| \rangle$$

$$| \leftarrow \text{-----} R_{12} \text{-----} \rightarrow | \leftarrow \text{---} R_2 \text{---} \rightarrow | \leftarrow R_0 \rightarrow |$$

R_{12} — интервал позиций в D_s для размещения только символов “1” и “2”, R_2 — интервал позиций только для символа “2”, R_0 — интервал позиций только для символа “0”.

Общий вид последней строки D_{n-k+1} :

$$D_{n-k+1} = \langle \dots |1|2|1|1|\dots|1|2|1|1|\dots|1|2|2|\dots|2|2| \rangle$$

$$| \leftarrow \text{-----} R_{12} \text{-----} \rightarrow | \leftarrow \text{---} R_2 \text{---} \rightarrow |$$

В [5] было показано существенное различие структур (в частности, степеней вершин в гранях, образующих скар-путь) в зависимости от взаимного соотношения интервалов R_{12} и R_2 в skbd-матрицах. Эти соотношения и легли в основу рассматриваемого отображения.

Определение отображения μD_s : s -ой строки матрицы $T_d(n, k)$ в состояние MC в момент дискретного времени t_s .

Для строки общего вида D_s будем обозначать через μD_s отображение строки в номер состояния цепи Маркова $\mu_s \in M = \{0, 1, 2, \dots, (k-1)\}$. Будем считать, что $\mu_s = \#(2)R_{12}$ (число символов “2” в строке D_s в интервале позиций R_{12}).

Для первой строки D_1 : $\mu D_1 = \mu_1 = 0$ (в этой строке вообще нет интервала R_{12}).

Для последней строки D_{n-k+1} : $\mu_{n-k+1} = k - \#(2)R_2$ (общее число символов “2” в слове (k) минус число символов “2” в интервале позиций R_2).

Поскольку в D_{n-k+1} правая крайняя позиция всегда по определению $d_{n-k+1, n} = “2”$, максимальное $\mu_s = k - 1$ (когда $d_{n-k+1, n-1} = “1”$). Таким образом, для двух видов представлений символьной матрицы используются алфавит A и множество последовательностей (конечных или счетных) чисел из M , как номеров состояний простой однородной цепи Маркова с дискретным временем и пока не определенным семейством матриц переходных вероятностей (MTP). Прежде всего, заметим, что основные свойства (1) матрицы, необходимые для соблюдения закона сохранения регулярного примыкания k -граней, образующих скар-путь, накладывают ограничения на структуру графа связей между состояниями MC .

1. Так, в последовательности номеров состояний MC не может быть двух последовательных номеров (μ_i, μ_{i+1}) таких, что $(\mu_i - \mu_{i+1}) \geq 2$ поскольку тогда нарушается условие регулярного примыкания k -граней, образующих скар-путь: $\#(2)(D_i \times D_{i+1}) = (k-1)$. Отсюда следует, что в семействе матриц переходных вероятностей MTP для рассматриваемых MC элементы ниже и левее +1 от главной диагонали равны 0.

2. В связи с “равноправностью” (симметричностью) базисных векторов в образовании k -граней в n -кубе, общий вид r -ой строки MTP (кроме первой и последней) имеет вид:

$$|0|0|\dots|q_r|p_{rr}|q_{r,r+1}|q_{r,r+2}|\dots|q_{rk}|$$

$$| \leftarrow (r-1) \rightarrow | \leftarrow (k-r) \rightarrow |$$

Где $p_{rr} + q_r + \sum_{i=1}^k q_{r,r+i} = 1$ и для любых $r \leq s$:

$$p_{rr} = p, q_{rs} = (1-p)/(k-1).$$

Отсюда, общий вид семейства MTP :

$$MTP = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & \dots & p_{2k} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \dots & \dots & p_{3k} \\ 0 & 0 & p_{43} & \dots & \dots & p_{4k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{k,k-1} & p_{kk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p & q^* & q^* & q^* & \dots & \dots & q^* \\ q^* & p & q^* & q^* & \dots & \dots & q^* \\ 0 & 2q^* & p & q^* & \dots & \dots & q^* \\ 0 & 0 & 3q^* & p & q^* & \dots & q^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & (k-1)q^* & p \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $p + q = 1, q^* = q/(k-1)$.

Все MTP вида (2) являются эргодическими, поскольку все k состояний достижимы. Более того, они имеют совпадающие стационарные распределения, не зависящие от p и зависящие только от k , т.е. можно

считать, что эти матрицы эргодически эквивалентны. Стационарные распределения для этого семейства:

$$p_s(k, s-1) = \frac{(k-1)!(k-s+1)}{(s-1)!k^{k-s+1}} \quad (3)$$

$$P(k) = (p_1(k,0), p_2(k,1), \dots, p_s(k, s-1), \dots, p_k(k, k-1)),$$

где $\sum_{s=1}^k p_s(k, s-1) = 1$, и

| | Строки P(k) - стационарные распределения для k=3,4,...10; | | | | | | | | | |
|-------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| P(3) | 0.2222 | 0.4444 | 0.3333 | | | | | | | |
| P(4) | 0.0938 | 0.2813 | 0.3750 | 0.2500 | | | | | | |
| P(5) | 0.0384 | 0.1536 | 0.2880 | 0.3200 | 0.2000 | | | | | |
| P(6) | 0.0154 | 0.0772 | 0.1852 | 0.2778 | 0.2778 | 0.1667 | | | | |
| P(7) | 0.0061 | 0.0367 | 0.1071 | 0.1999 | 0.2624 | 0.2449 | 0.1429 | | | |
| P(8) | 0.0024 | 0.0168 | 0.0577 | 0.1282 | 0.2051 | 0.2461 | 0.2188 | 0.1250 | | |
| P(9) | 0.0009 | 0.0075 | 0.0295 | 0.0759 | 0.1423 | 0.2048 | 0.2305 | 0.1975 | 0.1111 | |
| P(10) | 0.0004 | 0.0033 | 0.0145 | 0.0423 | 0.0907 | 0.1512 | 0.2016 | 0.2160 | 0.1800 | 0.1000 |

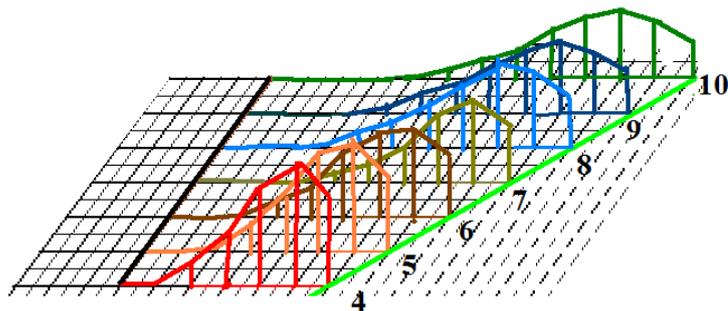


Рис.1 Стационарные распределения для семейства матриц переходных вероятностей (MTP) цепей Маркова в соответствии с (2) (дискретные аналоги распределений Трейси-Уидома).

Итак, μ -отображение каждой строки $T_d(n, k)$ при фиксированном k и $n \rightarrow \infty$ приводит к последовательности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i, \dots$, где μ_i принимает значения из $M = \{0, 1, 2, \dots, (k-1)\}$. В этой последовательности, которую можно считать счетным словом с символами из алфавита M , символы имеют стационарное распределение вследствие эргодичности MC . Однако, каждый символ при μ -отображении, в общем случае, может соответствовать различным вариантам строки матрицы $T_d(n, k)$, т.е. такое μ -отображение—гомоморфизм. Другими словами, если представить M как алфавит и M_m^* как множество всех слов длины m : $\langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \rangle$ над этим алфавитом, то тогда, при $m = n - k + 1$, можно считать, что:

$$M_{n-k+1}^* / \forall(\mu_i, \mu_{i+1}): (\mu_i - \mu_{i+1}) < 2 \quad (4)$$

, т.е. множество всех слов длины $n - k + 1$ над M с условием, что два последовательных символа всегда удовлетворяют условию (4), есть множество Марковских гомоморфизмов для всех $скар-путей$ в n -кубе между а.п. вершинами $v_0 = \langle 00 \dots 0 \rangle$ и $v_p = \langle 11 \dots 1 \rangle$.

Пусть задано слово $G \in M_{n-k+1}^*$ с выполнением (4). В основе алгоритма перечисления всех матриц $T_d(n, k)$, соответствующих данному слову, лежат условия (1) и несколько специфических свойств:

1. В слове G первый символ всегда “0”, поскольку по определению первая строка $T_d(n, k)$ имеет вид

$D_1 = \langle 2 | 2 | \dots | 2 | 0 | 0 | \dots | 0 \rangle$ (k символов “2” и, далее, $(n-k)$ символов “0”).

2. В случаях, когда в G $\mu_{i+1} \geq \mu_i$ строка D_{i+1} однозначно восстанавливается по строке D_i по аналогии со следующими примерами при $k=4$ и $D_i = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | \dots | 0 \rangle$:

$$D_i = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | \dots | 0 \rangle, \mu_i = 1$$

$$\mu_{i+1} = \mu_i: D_{i+1} = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 1 | \underline{1} | 2 | 2 | 2 | 0 | \dots | 0 \rangle, \mu_{i+1} = 1$$

$$D_i = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | \dots | 0 \rangle, \mu_i = 1$$

$$\mu_{i+1} > \mu_i: D_{i+1} = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | \underline{1} | 2 | 0 | \dots | 0 \rangle, \mu_{i+1} = 3$$

3. В случаях, когда $\mu_{i+1} < \mu_i$, в соответствии с (4) всегда $\mu_i - \mu_{i+1} = 1$. Отсюда варианты строки D_{i+1} , следующей за D_i , при $k=4$, $\mu_i = 3$, $\mu_{i+1} = 2$ и $D_i = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | \dots | 0 \rangle$. Число таких вариантов равно $\mu_i = 3$:

$$D_i = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | \dots | 0 \rangle$$

$$D_{i+1,1} = \langle \dots | 1 | \underline{1} | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | \underline{2} | 2 | 0 | \dots | 0 \rangle$$

$$D_{i+1,2} = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | \underline{1} | 2 | 1 | 1 | \underline{2} | 2 | 0 | \dots | 0 \rangle$$

$$D_{i+1,3} = \langle \dots | 1 | 2 | 1 | 2 | \underline{1} | 1 | 1 | \underline{2} | 2 | 0 | \dots | 0 \rangle$$

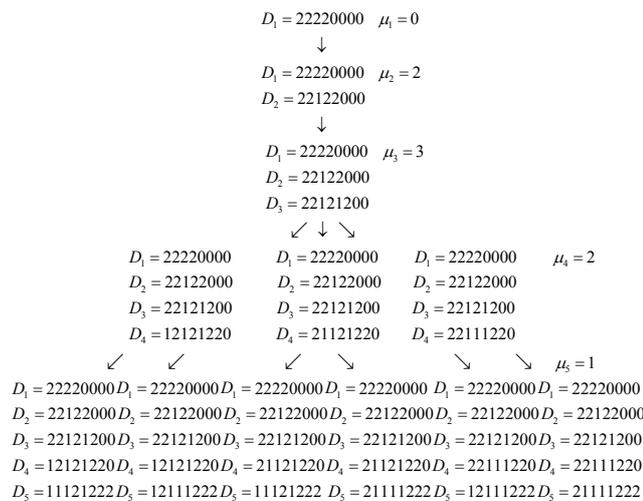
Таким образом, рассматривая процесс перечисления матриц $T_d(n, k)$, последовательно следуя от μ_i к μ_{i+1} в случаях, аналогичных вышеизложенному ($\mu_i - \mu_{i+1} = 1$), будет иметь место ветвление нашего процесса на μ_i

ветвей. В результате такой развертки слова G образуется древовидная структура роста всех матриц $T_d(n, k)$ и, соответственно, всех скар-путей для заданной в G реализации Марковской цепи с семейством MTP согласно (2). Обобщая, можно сказать, что *цепь Маркова с семейством матриц переходных вероятностей MTP (2) является генератором всех скар-путей в n -кубе.*

Возвращаясь к эргодическим свойствам таких MC и стационарным распределениям для различных значений k , отметим, что при $n \rightarrow \infty$ вероятность появления следующей строки счетной матрицы $T_d(n, k)$ равна $p(s, k)$.

Пример:

$n = 8, k = 4, G = \langle 0, 2, 3, 2, 1 \rangle$.



III. ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ СКАР-ПУТЕЙ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Прежде всего, о вычислении степени заданной в виде двоичного слова D вершины из скар-пути, т.е. выборе из $T_d(n, k)$ таких строк D_i , для которых $D \times D_i \neq \emptyset$.

Это множество граней, чьи ребра участвуют в формировании степени вершины. Для каждой такой грани вычисляется список ребер, инцидентных заданной вершине. В общем списке ребер по всем таким граням удаляются повторяющиеся слова и число оставшихся слов (ребер) и есть искомая степень. Поскольку чаще интересует динамика изменения степеней вершин в скар-пути от грани к грани, можно поставить в соответствие всей матрице $T_d(n, k)$ множество

$$Q(T_d(n, k)) = \{(q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1,2^k}), (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2,2^k}), \dots, (q_{n-k+1,1}, \dots, q_{n-k+1,2^k})\} \quad (5), \text{ где}$$

q_{ij} — степень j -ой вершины в грани D_i . Упорядочение вершин в каждой грани — лексикографическое.

Следует отметить, что в формировании степени вершин принимает участие разное число граней. Так, для общего случая вершин грани (строки D_i) в формировании степеней вершин принимают участие грани (строки D_s) с номерами строк $s = \{(i - k + 1), (i - k + 2), \dots, i, (i + 1), (i + 2), \dots, (i + k - 1)\}$, т.е. $|s| = 2k - 1$. Естественно, это справедливо там, где

существуют строки матрицы с такими номерами. Для строк D_i при $i < k$ и $i > (n - 2k + 2)$ число $|s| < (2k - 1)$. При увеличении n , когда $n \gg k$ можно считать, что вершины почти всех граней “равноправны” по значению $|s|$. Тогда различие в степенях вершин зависит только от последовательности конкретных $(k - 1)$ строк перед D_i и $(k - 1)$ строк после D_i .

Здесь, среди классов $T_d(n, k)$ следует выделить множество $H_s(n, k)$ однородных классов, которые соответствуют гомоморфизмам вида $G = \langle 0, s, s, \dots, s \rangle$ или классам с λ -разбиениями вида:

$$\lambda \in \{((n - k + 1)^{k-1}, 1^{n-k+1}), ((n - k + 1)^{k-2}, 2^{n-k}, 1^2), \dots, (k^{n-2k+2}, (k-1)^2, (k-2)^2, \dots, 2^2, 1^2)\}$$

Очевидно, что при фиксированном n число таких классов $|H_s(n, k)| = k$.

Каждый из этих классов будет характеризоваться своим множеством $Q_s(H(n, k))$ по аналогии с (5), которое в связи с однородностью (все k -грани идентичны) будет состоять из одной последовательности $(q_{s,1}, q_{s,2}, \dots, q_{s,2^k})$, которую мы представим в виде разбиения общей суммы степеней вершин “типовой” грани по частям, соответствующим спектру значений степеней. В дальнейшем будем считать однородные классы с индексами, равными $r = k - s$.

Так, например, для всех однородных классов при $k = 3$ и $s = 2, 1, 0$: $H_1(n, 3), H_2(n, 3), H_3(n, 3)$ и, следовательно, для их “типовых” 3-граней, такие представления после вычислений степеней вершин имеют вид:

$$Q(H_1(n, 3)) = 4^8, Q(H_2(n, 3)) = (5^6, 3^2), Q(H_3(n, 3)) = (6^4, 4^2, 3^2) \quad (6)$$

Отметим, что общие суммы степеней различны и для H_1 все 8 вершин 3-грани имеют равную степень 4. Более детальная геометрическая интерпретация будет рассмотрена в разделе IV.

Теперь дадим эскиз вывода общей зависимости и, следовательно, алгоритм вычисления $Q(H_r(k))$. Здесь “ n ” опущено, т.к. мы рассматриваем однородные классы для стационарного распределения эргодической цепи Маркова согласно (3).

Предположим на основании прямых вычислений для $k = 3$ и $k = 4$, что общий вид представления (здесь символ “ \wedge ” означает степень как в нотации разбиения):

$$Q(H_r(k) / 2k) = (2k \wedge x_{11}, (2k - 2) \wedge x_{21}, (2k - 3) \wedge x_{31}, \dots, (k + 1) \wedge x_{r-1,1}, k \wedge x_{r,1})$$

с выполнением условия, что $\sum_{r=1}^k x_{r,1} = 2^k$ (как число вершин k -грани) и максимальной степенью (старшей частью разбиения) равной $2k$. При максимальной степени $(2k - 1)$ общий вид такой:

$$Q(H_r(k) / (2k - 1)) = ((2k - 1) \wedge x_{12}, (2k - 3) \wedge x_{22}, (2k - 4) \wedge x_{32}, \dots, k \wedge x_{r,2}),$$

при условии $\sum_{r=1}^k x_{r,2} = 2^k$.

И так далее, вплоть до максимальной степени k , которая является и минимально возможной в k -грани, как вершина k -куба, инцидентная только ребрам этой грани. Именно с этого случая (k —максимальная степень среди вершин грани) и далее, рассматривая последовательно случаи максимальной степени как $k+1, k+2, \dots$ до $2k$, будем строить рекуррентно наши представления в виде разбиений.

Итак, $Q(H_r(k)/k) = \emptyset$, т.к. в этом случае k -грань изолирована и не входит ни в какой скар-путь.

Далее, $Q(H_1(k)/(k+1)) = ((k+1) \wedge 2^k)$ — все вершины k -грани (их число 2^k) равной степени $k+1$.

Для $Q(H_2(k)/(k+2)) = ((k+2) \wedge x_1, k \wedge x_2)$ при $x_1 + x_2 = 2^k$ и $x_1 - x_2 = 2^{k-1}$ получаем:

$$Q(H_2(k)/(k+2)) = ((k+2) \wedge 3 \cdot 2^{k-2}, k \wedge 2^{k-2}).$$

Продолжая этот процесс до $Q(H_k(k)/2k)$, получаем следующий результат:

$$Q(H_1(k)/(k+1)) = ((k+1) \wedge 2^k),$$

$$Q(H_2(k)/(k+2)) = ((k+2) \wedge 3 \cdot 2^{k-2}, k \wedge 2^{k-2}),$$

$$Q(H_3(k)/(k+3)) = ((k+3) \wedge 2^{k-1}, (k+1) \wedge 2^{k-2}, k \wedge 2^{k-2}),$$

$$Q(H_4(k)/(k+4)) = ((k+4) \wedge 5 \cdot 2^{k-4}, (k+2) \wedge 3 \cdot 2^{k-4}, (k+1) \wedge 2^{k-2}, k \wedge 2^{k-2}),$$

$$Q(H_k(k)/2k) = ((2k) \wedge (k+1), (2k-2) \wedge (k-1), \dots, (k+1) \wedge 2^{k-2}, k \wedge 2^{k-2}).$$

Для $k=3 \div 6$ распределения степеней приведены ниже. Каждая строка $(q_1 / v_1, q_2 / v_2, \dots, q / v_s)$: q_1 — максимальная степень вершин для k -грани, v_i — число вершин в этой грани с такой степенью.

$$q_i > q_{i+1}, \sum_{i=1}^s v_i = 2^k.$$

| | | |
|-------------|-----------------|----------------------|
| $k=3$ | $k=4$ | $k=5$ |
| 4/8 | 5/16 | 6/32 |
| 5/6 3/2 | 6/12 4/4 | 7/24 5/8 |
| 6/4 4/2 3/2 | 7/8 5/4 4/4 | 8/16 6/8 5/8 |
| | 8/5 6/3 5/4 4/4 | 9/10 7/6 6/8 5/8 |
| | | 10/6 8/4 7/6 6/8 5/8 |

| |
|------------------------------|
| $k=6$ |
| 7/64 |
| 8/48 6/16 |
| 9/32 7/16 6/16 |
| 10/20 8/12 7/16 6/16 |
| 11/12 9/8 8/12 7/16 6/16 |
| 12/7 10/5 9/8 8/12 7/16 6/16 |

IV. КОНИЧЕСКИ-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ N-КУБА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СТРУКТУРЫ СКАР-ПУТЕЙ

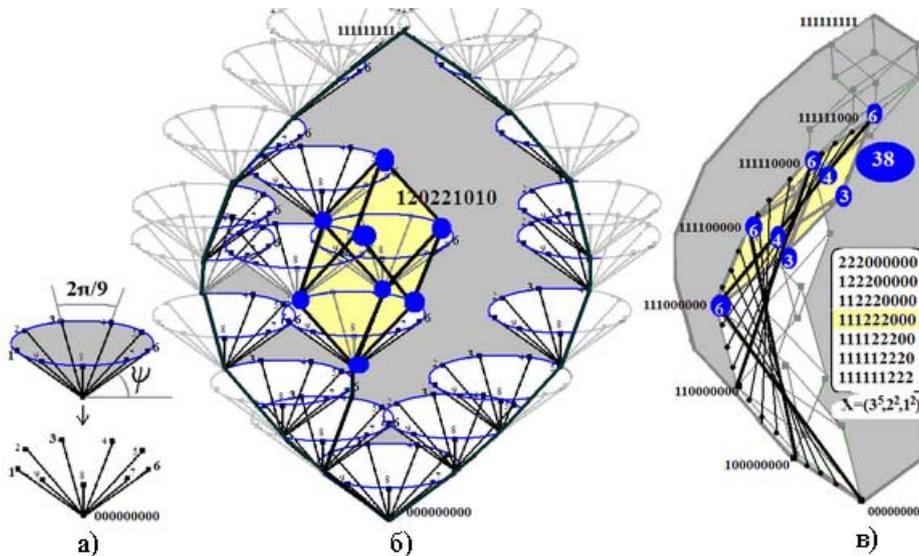
Для более наглядного восприятия структуры скар-путей (прежде всего однородных классов) мы рассмотрим отображение n -куба (более точно, его биективной формы как множества всех слов длиной n — A_n^* над конечным алфавитом $A = \{0,1,2\}$) в так называемую конически-ориентированную проекцию в \mathbb{R}^3 . Основой такой проекции является отображение ортонормированного базиса $\{0, e_1, e_2, \dots, e_s, \dots, e_n\}$ на поверхность трехмерного конуса, для которого: $x(0) = 0, \varphi_s = 2\pi(s-1)/n, 0 < \psi < \pi/2$ (наиболее подходящее для зрительного восприятия $\pi/6 < \psi < \pi/4$).

$x(e_s) = \cos \psi \cos \varphi_s, y(e_s) = \cos \psi \sin \varphi_s, z(e_s) = \sin \psi$. Отсюда, для примера, при $n=9$ вершины 3-грани (120221010) имеют следующие координаты в \mathbb{R}^3 (рис.2):

$$100001010: x = x(e_1) + x(e_6) + x(e_8);$$

$$y = y(e_1) + y(e_6) + y(e_8); z = z(e_1) + z(e_6) + z(e_8);$$

$$100011010: x = x(e_1) + x(e_5) + x(e_6) + x(e_8); \dots$$



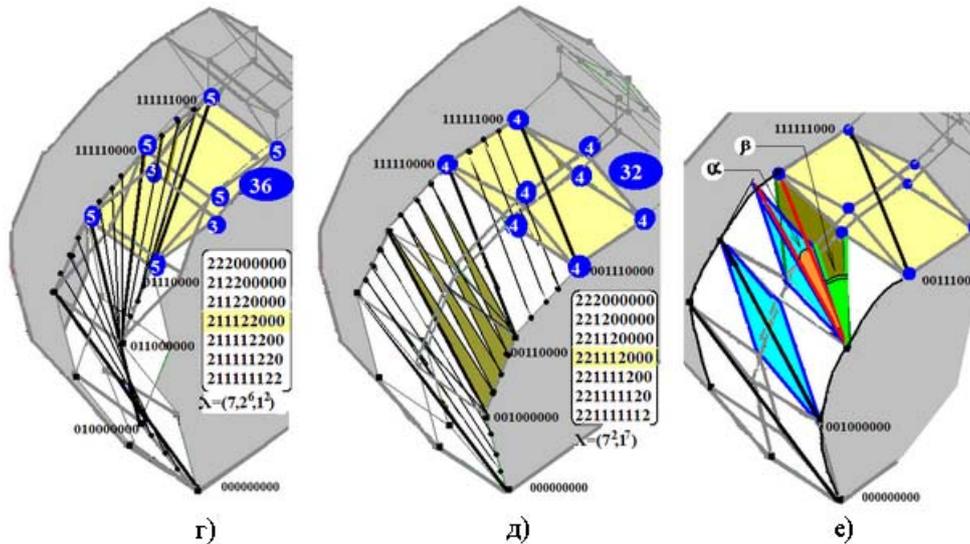


Рис.2 а) Коническая проекция $\{0, e_1, e_2, \dots, e_9\}$ для 9-куба. б) Принцип отображения 9-куба. в) skarp-путь из класса с $\lambda = (3^5, 2^2, 1^2)$. г) skarp-путь из класса с $\lambda = (7, 2^6, 1^2)$. д) skarp-путь из класса с $\lambda = (7^2, 1^7)$. Величина степени каждой вершины показана в малом овале, сумма степеней всех вершин одной 3-грани — в большом овале. е) Углы α, β как показатели кривизны skarp-пути.

Мы используем здесь визуализацию конической проекции, чтобы рассмотреть пример $n=9, k=3$ с позиции поведения двух соседних 3-граней (примыкающих друг к другу 2-гранями), связывая эти позиции с положением их главных диагоналей. Главную диагональ определим как соединяющую вершину v_1 в каждой грани, для которой $\rho_H(v_1, (00\dots)) = \min$ среди вершин этой грани, с антиподальной в этой грани вершиной v_2 . Предположим, что главная диагональ одной 3-грани перемещается в положение главной диагонали соседней 3-грани, соблюдая следующие условия:

1. Диагональ сохраняет свою длину (в нашем случае $\sqrt{3}$).
2. Концы диагонали движутся по кратчайшему пути, то есть вдоль ребер, как направляющих.

На рис.2 линии условно показывают такие промежуточные позиции. Однако отметим, что эти направляющие ребра принадлежат скрещивающимся прямым и поэтому две последовательные позиции не могут образовать плоскую фигуру. Для геометрической корректности нужно рассматривать комбинацию двух движений: параллельного переноса и вращения относительно общих ребер, чтобы совместить главные диагонали (рис.2е)). Таким образом, диагональ совершает путь, кривизна которого может быть аргументирована:

1. Размерность кривизны skarp-пути равна 2.
2. Прямые расчеты через скалярные произведения показывают, что углы кривизны зависят только от k и не зависят от n , и равны:

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \arccos((k-1)/k), \\ \beta(k) &= \arccos((k-2)/(k-1)). \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что недавние результаты по вычислению дискретной кривизны [6], где развиваются методы

Бакри-Эмери с привлечением потока Риччи для слайсов n -куба, дают подобный результат.

Теперь о различии степеней вершин в skarp-путях. Существенное различие в степенях вершин для разных классов skarp-путей, отмеченное в предыдущем разделе, можно рассматривать, как отражение действия вовлечения большего числа ребер из соприкасающихся k -граней в skarp-пути в образование степени вершин пути. Действия, которое можно идентифицировать как кручение. Ниже на двух фрагментах skbd-матриц из разных классов это будет показано на примере вершины $\langle 11100 \rangle$. Пусть эти фрагменты:

```
...22200...  ...22200...
...12220...  ...22120...
...11222...  ...22112...
```

Ниже приведены множества биекций-ребер для граней каждого фрагмента, где курсивом отмечены ребра, инцидентные вершине $\langle 11100 \rangle$, а символом * отмечены повторяющиеся ребра:

| | | | | | |
|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|-------|
| 20000 | 12000 | 11200* | 20000 | 20100 | 20110 |
| 20100 | 12010 | 11201 | 20100 | 20110 | 20111 |
| 21000 | 12100* | 11210 | 21000 | 21100* | 21110 |
| 21100 | 12110 | 11211 | 21100 | 21110 | 21111 |

| | | | | | |
|--------------|---------------|--------------|--------------|-------|-------|
| 02000 | 10200 | 11020 | 02000 | 02100 | 02110 |
| 02100 | 10210 | 11021 | 02100 | 02110 | 02111 |
| 12000 | 11200* | 11120 | 12000 | 12010 | 12110 |
| 12100 | 11210 | 11121 | 12100 | 12110 | 12111 |

| | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------|
| 00200 | 10020 | 11002 | 00200 | 00120 | 00112 |
| 01200 | 10120 | 11012 | 01200 | 01120 | 01112 |
| 10200 | 11020 | 11102 | 10200 | 10120 | 10112 |
| 11200 | 11120 | 11112 | 11200 | 11120 | 11112 |

$q_1(11100) = 9 - 3 = 6$ $q_2(111000) = 5 - 1 = 4$

Приведенный пример показывает прямую зависимость степени вершины от числа символов "2" в зоне позиций R_2 (см. Раздел II). Будем считать это число показателем квази-кручения и обозначать как ω . Очевидно, что ω для однородных классов $const$ и сами однородные

классы можно характеризовать как множества скар-путей с постоянным квази-кручением.

V. $T_d(n, k)$ КАК ОБЪЕКТ БЕСКОНЕЧНОЙ РЕКУРСИИ И ГЕНЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО С БАЗОЙ k

Итак, за базу рекурсии принимается $1 \times k$ матрица (т.е. из одной строки с k символами "2") $T_d(k, k) = \langle 222..2 \rangle$. Другими словами, это представление k -куба, который по определению является кратчайшим k -мерным путем для любой пары своих антиподальных вершин. Эта база является исходной для образования любых матриц $T_d(n, k)$ при $n \rightarrow \infty$.

Как основное действие декомпозиции вводится операция слияния (приклейки) к матрице $T_d(n, k)$ правого $(n+1)$ -го столбца (D_{n+1}^*) и нижней строки

D_{n-k+2} . Обозначение действия декомпозиции: $T_d(n, k) \searrow v$. Столбец D_{n+1}^* состоит из $(n-k+1)$ символов "0" и символа "2" на $(n-k+2)$ месте.

Строка D_{n-k+2} дублирует строку D_{n-k+1} , заменяя один из символов "2" (на месте v) на "1" (рис.3). Всего имеется k вариантов такой замены по числу "2" в строке D_{n-k+1} .

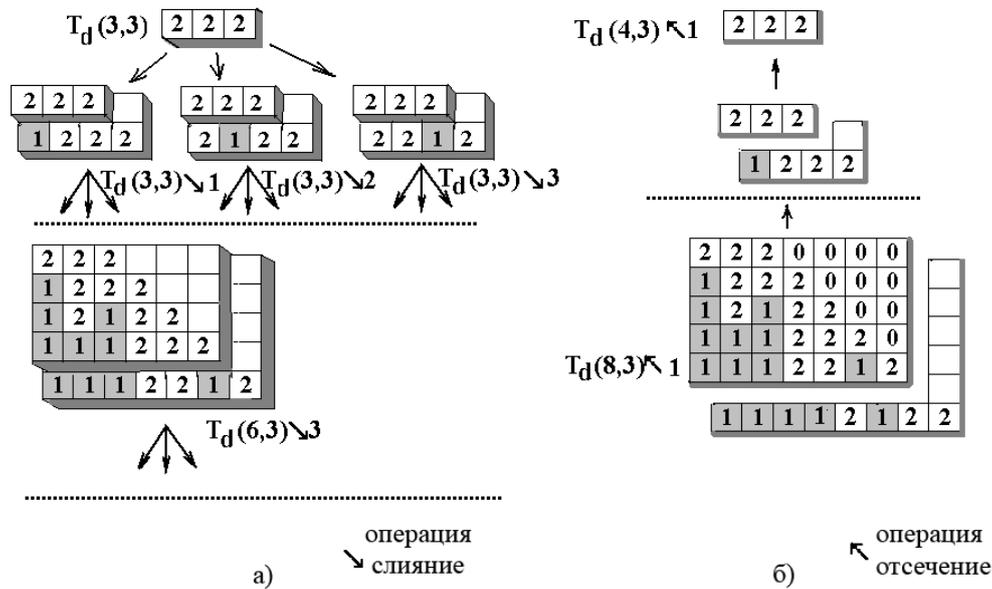


Рис. 3 а) Действие декомпозиции рекурсии (начальный этап для $k = 3$) б) Действие деструкции ($k = 3$).

Получаемая в результате такого действия декомпозиции матрица:

$$T_d(n+1, k) = T_d(n, k) \searrow v \tag{8}$$

обладает всеми свойствами биективности для скар-пути в $(n+1)$ -кубе по определению [4].

Также вводится обратная к декомпозиции операция—определение "прародителя" $T_d(n, k)$ как $T_d(n-g, k)$ в результате действия деструкции (отсечение нижней строки и правого столбца от $T_d(n, k)$, дополнительный параметр g (целое) указывает сколько раз подряд применена операция):

$$T_d(n-g, k) = T_d(n, k) \nwarrow g.$$

Естественно, что $g \leq n-k$. При $g = n-k$ возвращаемся к базе $T_d(k, k)$ —прародителю всех скар-путей для размерности k . По существу, основой рекурсии является закон сохранения регулярного примыкания k -граней (своими гипергранями размерности $k-1$) в скар-путях, который для строк $skbd$ -матрицы выражается как (1).

Введенное действие декомпозиции (8) позволяет представить все матрицы $T_d(n, k)$ в виде вершин k -дерева Кэли, как генетического пространства $\mathbf{T}(k)$ всех кратчайших k -мерных путей в структуре n -куба при $n \rightarrow \infty$.

Рассматривая $(n-k+1)$ как параметр дискретного времени, при фиксированном n , можно говорить о множестве $\mathbf{T}^*(n, k) = \{T_d(n, k)\}$, как $(n-k+1)$ -ом шаге генетической эволюции. При этом $|\mathbf{T}^*(n, k)| = k^{(n-k+1)}$.

Введем обозначение: $\mathbf{T}(k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} \mathbf{T}^*(n, k)$ как k -дерево

Кэли.

Естественной метрикой в этом пространстве — счетном k -дерево Кэли—является метрика (однозначная) кратчайших путей по ребрам дерева. Алгоритм вычисления такой метрики для $T_d(n_1, k)$ и $T_d(n_2, k)$ состоит в нахождении таких минимальных g_1 и g_2 , при которых:

$$T_d(n_1, k) \nwarrow g_1 = T_d(n_2, k) \nwarrow g_2 \tag{9}$$

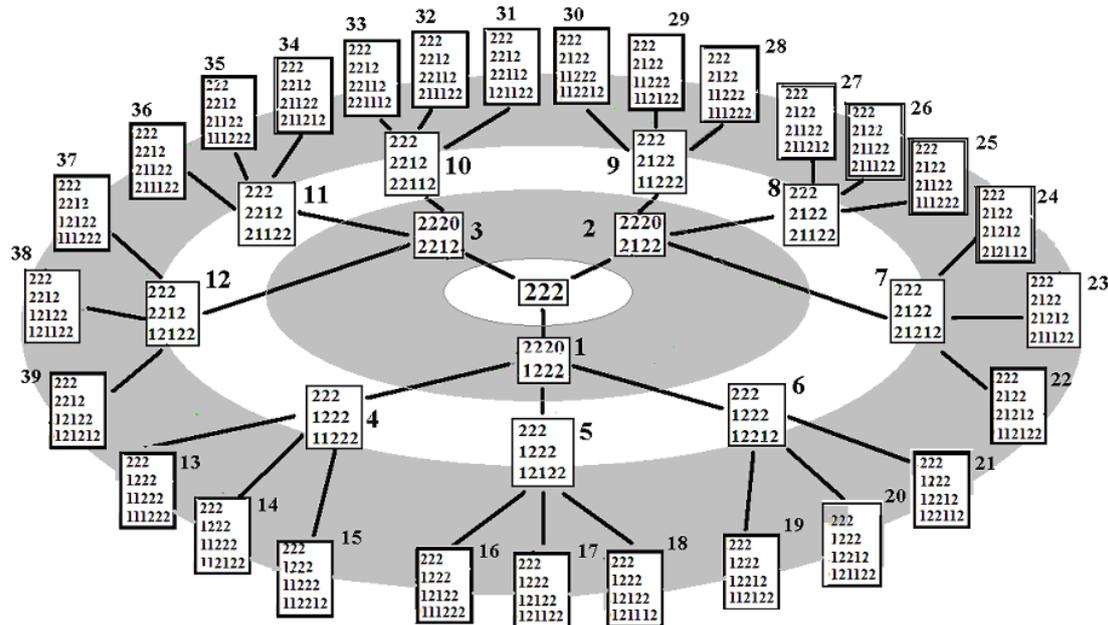
Это равенство всегда возможно, поскольку у этих вершин всегда есть общий корень $T_d(k, k)$ — общий прародитель. При нахождении g_1 и g_2 , согласно (9), будем считать и записывать:

$$\rho_{Gen}(T_d(n_1, k), T_d(n_2, k)) = g = g_1 + g_2.$$

Генетическое расстояние при заданных $T_d(n_1, k)$ и $T_d(n_2, k)$ при $n_2 > n_1$ считается как сумма разрушений до первых совпадающих строк этих матриц.

$\rho(T(k_1), T(k_2)) = |k_1 - k_2|$ (рис 5). На рис.4-5 отражены структуры генетических подпространств 3-х поколений $T(3,3)$ и $T(4,3)$ в пространствах $T(3)$ и $T(4)$, вместе с отображением на подмножества целых из \mathbb{N} . Более детально на свойствах отображения $T(k) \leftrightarrow \mathbb{N}$ здесь мы останавливаться не будем.

Следующий уровень развития конструкции — объединение плоских k-деревьев Кэли, как метрических генетических пространств в единое мета-дерево Кэли \mathfrak{K} со стволом ($k=1 \div \infty$) и разветвлениями на метрические генетические пространства $T(k=1)$, $T(k=2), \dots$ с естественной метрикой между ними



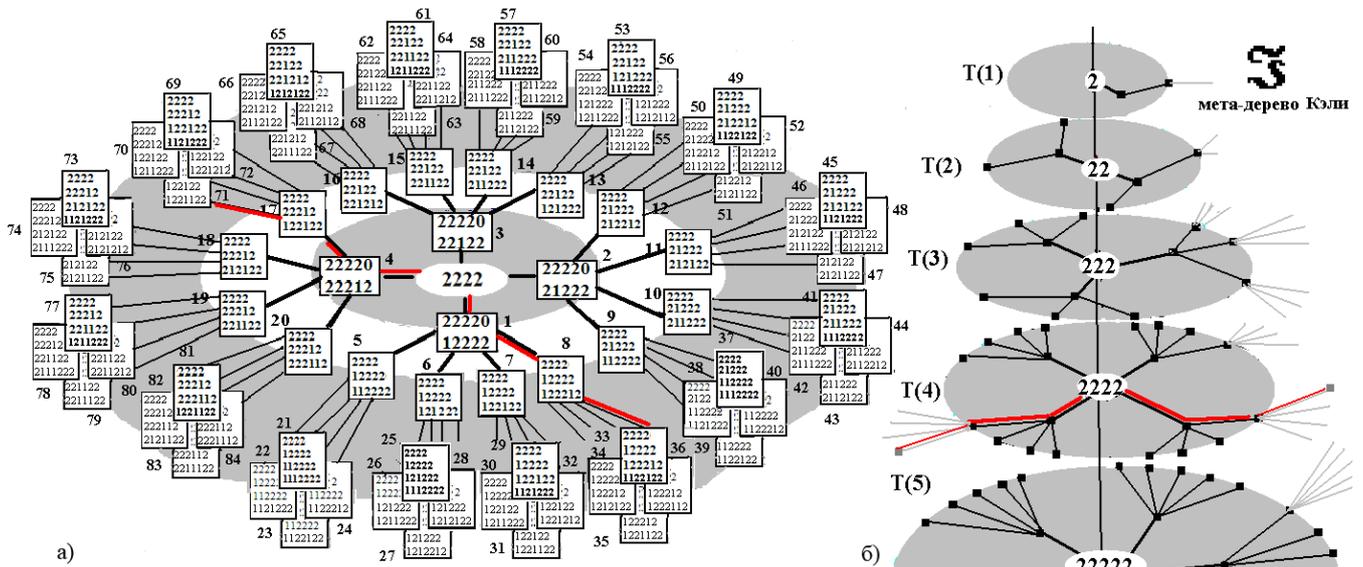
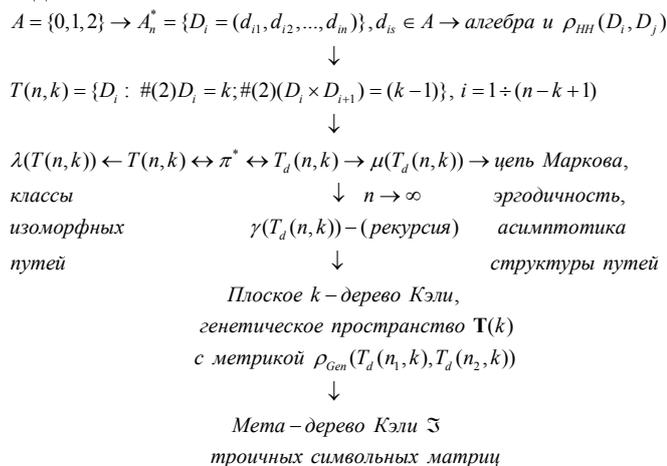


Рис.5 а). Генетическое подпространство $T(4,3) \subset T(k=4)$ (3 поколения в 4-дереве Кэли), помечено расстояние между *skar*-путями (в метрике дерева ρ_{Gen}), рядом с матрицами указаны их номера - реализация $\{T_d(n,k)\} \leftrightarrow \mathbb{N}$. б) Вершина Мета-дерева Кэли.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ДИСКУССИЯ

Общую идеологию изложения свойств *skar*-путей можно представить в следующем сжатом схематичном виде:



Можно рассматривать структуру этой схемы с более широкой позиции. Символьная матрица диагонального вида над алфавитом $A = \{0,1,2\}$ может рассматриваться, как одна из *боксовых форм над конечным алфавитом с рекурсивной слайсовой композицией*. Насколько опыт разностороннего представления таких форм при использовании их для эргодических методов и исследовании асимптотических кубических структур может повлиять на наше представление об облике структуры компьютеров следующего поколения? Некоторые тенденции здесь можно усмотреть в широком применении словных структур над конечными алфавитами и отображений между ними на базе действия групп и группоидов. При этом используются посимвольные операции, свертки-развертки (отображений) для инвариантов, представленных в форме, адекватной фундаментальным понятиям

алгебраической комбинаторики (разбиения, диаграммы Юнга, таблоиды заданной формы и т.п.), теории случайных матриц и классу распределений Трейси-Уидома [7-9]. В настоящее время машинные реализации подобных процедур осуществляются программными интерпретациями и специальными программными методами сегментирования и управления памятью, прежде всего с целью интерпретации одновременного выполнения многих посимвольных операций. Насколько выполнение в таком интерпретационном режиме на универсальных компьютерах может существенно тормозить расширение фронта решаемых задач в этой области, без дополнительной аппаратной поддержки, покажет время. Однако, разносторонность применения такого компьютерного инструментария говорит в пользу его развития. Здесь могут быть намечены некоторые конкретные шаги:

1. Операции над словами: подсчет определенных символов в словах (боксах), вычисление позиции символа в определенном диапазоне позиций или символов, гомоморфные отображения последовательностей натуральных в структуры Марковских процессов и т.п.
 2. Операции для генерации позиционных систем представления множеств объектов как множества слов (боксов) над конечным алфавитом, где символы или их сочетания представляют *действия над базисом* (в более широком плане, чем только декартово произведение и трансляция над ортонормированным базисом), элементы которого привязаны к позициям символов в слове.
 3. Набор операций для реализации действия симметрической группы S_n на заданном множестве символов или позиций символов в словах (боксах) и слайсовых рекурсий в боксах.
- Шаги подобного типа могут быть положительно оценены математическим сообществом, поскольку на Всемирном математическом конгрессе 2014 года в Сеуле принято решение о создании международной программы GMDL (Global Mathematic Digital Library),

где значительное внимание уделяется роли компьютера как инструмента самой фундаментальной математики, прежде всего в области генерации и верификации математических доказательств [8-12].

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Г. Г. Рябов, “О четверичном кодировании кубических структур”// Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, №2. с.340-347. Электронный ресурс: http://num-meth.srcr.msu.ru/zhurnal/tom_2009/pdf/v10r138.pdf
- [2] Г. Г. Рябов, “Хаусдорфова метрика на гранях n-куба”// Фундаментальная и прикладная математика. 2010. **16**, №1. с.151-155. Электронный ресурс: <http://mech.math.msu.su/~fpm/ps/k10/k101/k10112.pdf>
- [3] Yuri I. Manin, “Classical computing, quantum computing, and Shor’s factoring algorithm,” 1999. Available: <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/9903008.pdf>
- [4] G. G. Ryabov, V. A. Serov, “On classification of k-dimension paths in n-cube,” Applied Mathematics, vol. 5, no. 4, pp. 723-727, 2014. Available: <http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.54069>
- [5] G. G. Ryabov, V. A. Serov, ““Multidimensional metro” and symbol matrices,” International Journal of Open Information Technologies, vol. 2, no. 11, pp. 10-18, 2014. Available: <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/157/116>
- [6] B. Klartag, G. Kozma, P. Ralli, P. Tetali, “Discrete curvature and abelian groups,” arXiv:1501.00516v2 [math.CO], 6 Apr 2015. Available: <http://arxiv.org/pdf/1501.00516v2.pdf>
- [7] P. Deift, “Universality for mathematical and physical systems,” arXiv:math-ph/0603038v2, 19 May 2006. Available: <http://arxiv.org/pdf/math-ph/0603038.pdf>
- [8] R. P. Stanley, “Enumerative combinatorics,” Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Available: <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511609589>
- [9] R. P. Stanley, “Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More,” UTM (Undergraduate Texts in Mathematics). Springer, 2013.
- [10] B. Buchberger, “Symbolic Computation: A Personal View on the Future of Mathematics,” General Mathematics Seminar of the St. Petersburg Division of Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Science, 2015. Available: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=eng&presentid=10826
- [11] V. Voevodsky, “Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics,” The Univalent Foundations Program, Inst. for Advanced Study (Princeton), 2013. Available: <https://hottheory.files.wordpress.com/2013/03/hott-online-611-gala258c.pdf>
- [12] А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, “Новый подход к теории представлений симметрических групп. II,” Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. X, Зап. научн. сем. ПОМИ, **307**, ПОМИ, СПб., 2004, с. 57-98. Электронный ресурс: <http://www.mathnet.ru/links/4035276e356cc01fea05e94ea682825b/zns1840.pdf>

Polymorphism of symbolic ternary matrices and genetic space of the shortest k-paths in the n-cube.

G. G. Ryabov, V. A. Serov

Abstract— The article discusses:

1. Representation of ternary symbolic matrix, as States of the Markov chains and ergodic methods to study the asymptotic geometry of the shortest k-path.
2. The representation of symbolic matrix in the form of recursive object and the construction of genetic space for the shortest k-paths based on Cayley trees.
3. The influence of symbolic computation on the architecture of future computers.

Keywords—n-cube, a finite alphabet, the shortest k-path symbolic ternary matrix, Markov chain, asymptotic structure, recursion, the Cayley tree, genetic space.