

# Орбитальные знакопеременные ускорения искусственных спутников Земли (приложение алгоритма *D-SELF*)

А.Г. Иванов-Ростовцев, Л.Г. Колотило

**Аннотация** - Исследуется нестационарное движение искусственных спутников Земли в границах между апогеем и перигеем. Применяется алгоритм *D-SELF* для функционального анализа нелинейности скорости спутника. Типовая модель орбитального движения рассматривается в контексте составного движения (подход *D-SELF*) в виде равномерного (линейного) перемещения с постоянной скоростью, и колебания спутника с тангенциальными знакопеременными (как в маятнике) ускорениями вдоль траектории орбиты. Определяются экстремумы тангенциального знакопеременного ускорения орбитального движения в зависимости от времени и от углов истинной, эксцентрической и средней аномалии. Предлагается оценивать управляемость и устойчивость орбитального движения спутника в модели совместной динамики тангенциальных и центростремительных ускорений на основе решения подобной задачи при движении автомобиля в случаях разгона и торможения на поворотах.

**Ключевые слова** - искусственные спутники Земли, алгоритм *D-SELF*, знакопеременные ускорения, орбитальное движение

## 1. ДВА ФАКТОРА, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ОРБИТАЛЬНУЮ ТРАЕКТОРИЮ СПУТНИКОВ

*Фактор регулярного движения.* В орбитальном движении спутников наблюдаются регулярные участки траектории, связанные с периодическим прохождением точек с максимальной (в перигее) и минимальной (в апогее) скоростью [1].

Регулярное движение наиболее наглядно проявляется на длительных горизонтах наблюдений в случае большого количества оборотов спутника вокруг гравитирующего тела. Период оборота при этом является одной из главных констант регулярного движения.

Статья получена 20 ноября 2024.  
к.г.н. А.Г. Иванов – Ростовцев (agrstv@mail.ru)  
к.г.н. Л.Г. Колотило (kolotilo@bk.ru)

Лаборатория проблем моделирования сложных систем,  
Русское географическое общество, Санкт-Петербург

*Фактор нестационарного движения.* Между точками перигея и апогея движение спутников описывается сложными функциями, которые играют важное значение, особенно при расчете траекторий и управлении движением искусственных спутников Земли (ИСЗ).

Нестационарное движение на локальных участках орбиты связано прежде всего с нелинейностью во времени параметров скорости и ускорения. Уравнения орбитального движения относительно времени не решаются аналитически и требуют использования специальных математических методов [1,2].

В этой связи, важным оказывается применение моделей, качественно описывающих нестационарные участки движения в «регулярных» границах перигея и апогея.

Одна из таких моделей, разработанная на основе алгоритма *D-SELF* [3], используется в настоящей работе. Основа алгоритма - общая закономерность пространственно-временной симметрии при нестационарном движении открытой динамической системы [4]. Алгоритм *D-SELF* содержит пакет аналитического описания нестационарного движения в виде двух составляющих – движения с постоянной (средней) скоростью, и колебательного движения со знакопеременными ускорениями [3].

Из представленных ниже результатов следует, что на орбитальной траектории спутников, кроме особых точек перигея и апогея, наблюдаются две дополнительные критические точки, в окрестности которых тангенциальные знакопеременные ускорения спутника принимают максимальное и минимальное значения. В области этих критических точек движение спутника максимально неустойчиво, что может быть использовано при управлении работой

спутников или при их утилизации [5] после выхода из строя.

## II. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА

В классической постановке [2], движение ИСЗ под действием гравитационной силы Земли описывается из геометрии эллипса радиус-вектором  $r$  и скоростью  $V$  (Рис.1):

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

$$V(r) = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (2)$$

где:  $p$  – фокальный параметр;  $e$  – эксцентриситет эллипса;  $\mu = 398600,44 \text{ км}^3/\text{м}^2$  – гравитационный параметр Земли;  $a$  – большая полуось;  $\vartheta$  – угол истинной аномалии [2].

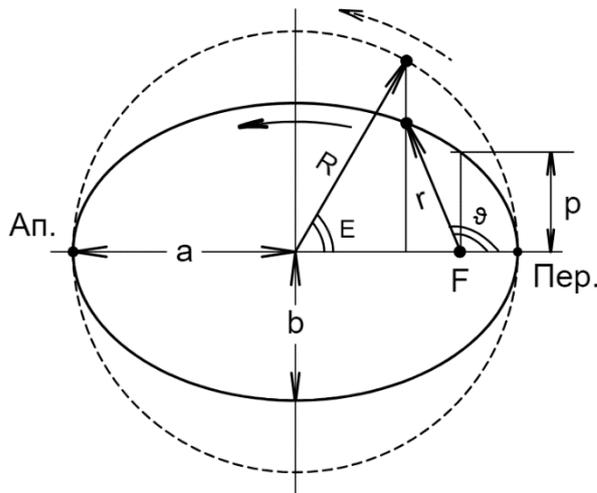


Рис.1. Движение ИСЗ по эллиптической орбите (сплошная линия) с текущими координатами:  $r$  – радиус-вектор с началом в фокусе эллипса  $F$ , совпадающего с центром Земли;  $\vartheta$  – угол (истинная аномалия) между  $r$  и большой осью эллипса. Параметры эллипса:  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси;  $p$  – фокальный параметр;  $Ап.$  и  $Пер.$  – апогей и перигей – наиболее удаленная и ближайшая точки орбиты относительно центра  $F$ . Для расчетов временных координат представлена круговая орбита (пунктирная линия) мнимого спутника, который двигался бы равномерно с тем же периодом, что и действительный спутник на эллиптической орбите [2]. Параметры круга:  $R$  –

радиус-вектор с началом в центре круга и равный большой полуоси  $a$ ;  $E$  – угол (эксцентрическая аномалия) между  $R$  и большой осью эллипса.

Подставляя (1) в (2), получаем функцию скорости, зависящую от переменной  $\vartheta$  при константах  $\mu$ ,  $p$  и  $e$ :

$$V(\theta) = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \theta)} \quad (3)$$

Выражение (3) позволяет вычислить значение скорости ИСЗ в любой точке орбиты, например, в перигее при  $\vartheta = 0^\circ$  и апогее при  $\vartheta = 180^\circ$  (Рис.1):

$$V_{Пер.} = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + e)}, \quad V_{Ап.} = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 - e)} \quad (4)$$

Нелинейная динамика скорости проявляется при анализе тангенциального ускорения, то есть производной скорости (3) по углу истинной аномалии  $\vartheta$ , вычисляемой при помощи [6]:

$$q(\theta) = -\frac{\sqrt{\frac{\mu}{p} \left( \frac{2\pi e}{T} \right) \sin \theta}}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}} \quad (5)$$

Соотношения (1) - (5) определяют параметры движения ИСЗ без учета временной координаты. Для связи параметров эллиптической орбиты со временем, в расчетах используется вспомогательная круговая система координат (Рис.1), где роль переменной  $\vartheta$  выполняет переменная  $E$ . Главным отличием круговой орбиты от эллиптической является постоянство радиус-вектора  $R$  и угловой скорости  $\omega$ , в то время как эллиптический радиус-вектор  $r$  изменяется вдоль орбиты, а главное сходство обеих орбит – общий период обращения  $T$ .

Из геометрии эллипса и круга следует связь углов  $\vartheta$  и  $E$  (Рис.1):

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 + e \cos E}, \quad \cos E = \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta} \quad (6)$$

Угол  $E$  круговой орбиты на Рис.1 связан с временной координатой  $t$  уравнением Кеплера [2]:

$$E - \sin E = M \quad (7)$$

где:  $M$  – угол (средняя аномалия), определяющий поворот радиус-вектора ИСЗ при

движении с постоянной угловой скоростью, равный :

$$M = \omega t = \frac{2\pi}{T}t \quad (8)$$

Трансцендентное уравнение (7) не имеет аналитического решения и требует использования численных методов. Для вычисления криволинейного пути, пройденного спутником, также применяются приближенные методы эллиптического интегрирования.

Сложности аналитического описания затрудняют анализ динамики нестационарного движения ИСЗ [7]. Перед тем, как решать громоздкую математическую задачу, например, в среде *Mathcad* [8] целесообразно иметь качественную картину динамики орбитальных скорости и ускорения, описываемых (4) и (5). С этой целью проведем анализ корреляции параметров  $V$  и  $q$  на предмет поиска особых точек на орбитальной траектории, которые соответствуют экстремумам не только скоростей, но и ускорений движения спутника.

Далее, в типовой расчет параметров орбитального движения ИСЗ будет включен алгоритм D-SELF [3], который позволяет, как минимум на качественном уровне, описать динамику знакопеременных ускорений, вызываемых периодически устойчивым градиентом скоростей орбиты в точках перигея и апогея на Рис.1.

### III АЛГОРИТМ D-SELF КАК МЕТОД АНАЛИЗА ОРБИТАЛЬНЫХ УСКОРЕНИЙ

Представим вращение спутника по эллиптической орбите (Рис.1) в виде модели составного движения, включающей:

- равномерное (линейное) перемещение с постоянной скоростью  $V_0$ ,
- колебание ИСЗ вдоль траектории орбиты, подобное маятнику с периодом  $T$  и амплитудой  $L_m$ .

Линейное движение соответствует режиму со средней скоростью между апогеем и перигеем  $V_{An} < V_0 < V_{Пер}$ . Согласно (4), средняя скорость определяется как:

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \quad (9)$$

Колебательное движение соответствует периодическому возрастанию и убыванию скорости движения между точками апогея и перигея на Рис.1. В алгоритме D-SELF [3] используется характер изменения скорости по закону синуса или косинуса, хотя реальное

изменение скорости имеет более сложную нелинейность. Ниже, в разделе IV будет что синусоидальное приближение выступает в роли базовой функции, позволяющей анализировать орбиты с различными параметрами.

Модель составного движения описывалась алгоритмом D-SELF [3], где функционал для прямолинейного пути  $L(t)$  (без учета высокочастотной составляющей) представлялся в виде:

$$L(t) = V_{лин} t - L_m \sin \omega t \quad (10)$$

где:  $V_{лин} = 2\pi a/T$  – линейная скорость движения спутника по окружности (Рис.1);  $t$  – текущее время.

При переходе от прямолинейного движения к вращению спутника по эллиптической орбите в выражении (10) произведем замену переменной  $t$  на переменную  $\vartheta$ , которые связаны:

$$\omega t = \theta = \frac{2\pi}{T}t, \quad t = \frac{T}{2\pi}\theta \quad (11)$$

Преобразуя (10) в отношении переменной  $\vartheta$ , используя связи (11), получим уравнение движения спутника в «синусоидальном» приближении алгоритма D-SELF:

$$L(\theta) = a\theta - L_m \sin \theta \quad (12)$$

Первая и вторая производные функционала (12) представляют угловую динамику скорости  $V(\vartheta)$  и ускорения  $q(\vartheta)$  (Рис.2):

$$V(\theta) = \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = a\omega + V_m \cos \theta \quad (13)$$

$$q(\theta) = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} = -q_m \sin \theta \quad (14)$$

где максимальные значения амплитуд синусоид и косинусоид в (12)-(14) связаны между собой как:

$$q_m = \omega V_m = \omega^2 L_m \quad (15)$$

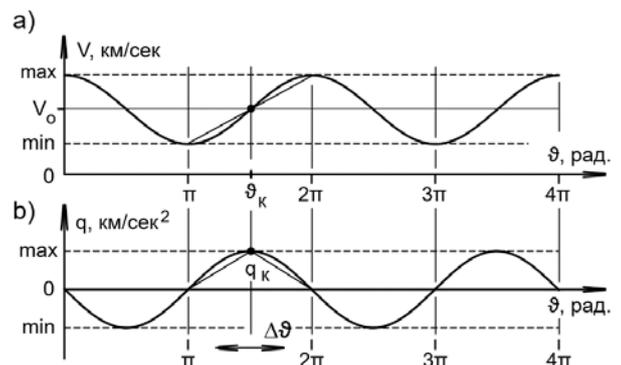


Рис.2. Угловая динамика скорости  $V(\vartheta)$  и ускорения  $q(\vartheta)$  нестационарного движения спутника по эллиптической орбите в соответствии с (13) и (14). Показано два оборота спутника. Угловые координаты  $\vartheta$ , на основе связей (10), выполняют роль времени  $t$ . Точки с координатами  $\vartheta_k$  и  $q_k$  определяют максимум знакопеременного ускорения. Отрезки прямых линий в диапазоне  $\pi \leq \vartheta \leq 2\pi$ , разделенные на равные части точками  $\vartheta_k$  и  $q_k$ , соответствуют линейным изменением скорости  $V(\vartheta)$  и ускорения  $q(\vartheta)$ . Изменение характера нелинейности определяет смещение  $\Delta \vartheta$  точки  $q_k$  вдоль оси  $\vartheta$ .

Моделирование *D-SELF* на Рис.2 отражает характер описанного выше составного движения спутника. Линейная часть движения - это вращение с постоянной скоростью  $V_{лин.}$ , которая выполняет функцию средней скорости  $V_0$  в случае окружности при  $e = 0$ . Нестационарная (нелинейная) часть движения - это *знакопостоянные* (Рис.2, **a**) колебания скорости относительно  $V_{лин.}$  со *знакопеременными* (Рис.2, **b**) колебаниями ускорения относительно  $q = 0$ . Из графиков видно, что в точках пересечения при  $V_k(\vartheta) = V_0$  (Рис.2, **a**) ускорение принимает максимальные значения  $q_k(\vartheta)$  (Рис.2, **b**). Указанные точки повторяются периодичностью  $\vartheta = (\pi/2)(1 + 2n)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , причем максимумы ускорения носят знакопеременный характер, то есть равны  $+q_m$  при  $\vartheta = 3\pi/2, 7\pi/2, \dots$ , и  $-q_m$  при  $\vartheta = \pi/2, 5\pi/2, \dots$ , согласно (14).

Следует отметить, что отрезок, соединяющий точки с максимальной (в перигее) и минимальной (в апогее) скоростью, пересечет среднюю скорость  $V_0$  и косинусоиду  $V(\vartheta)$  в точке  $V_k$  на Рис.2, **a**). Данный факт играет важное значение при анализе реального орбитального движения со сложным аналитическим описанием. В частности, в алгоритме *D-SELF* [3] нелинейность скорости описывается «простой» косинусоидой согласно (13), а на реальной орбите скорость изменяется по более сложному закону (3). Кроме того, пересечение отрезка между апогеем и перигеем с графиком  $V(\vartheta)$  в точке  $V_k$  позволяет «снять» неоднозначность для корректного определения

средней скорости нелинейного движения при расчетах  $V_0$  из (9) и  $V_{лин.}$  из (10).

При анализе орбитального движения по эллиптической орбите традиционно анализируют особые точки с максимальной и минимальной скоростью в перигее и апогее. Из Рис.2 следует, что кроме двух указанных точек на траектории орбиты наблюдается дополнительная пара значимых точек - с максимальным и минимальным тангенциальным ускорением.

Выше показано, что параметры особых точек с максимальными знакопеременными ускорениями описываются тригонометрическими функциями при использовании алгоритма *D-SELF*. При анализе реальных орбит, зависимости (12)-(15), вытекающие из алгоритма *D-SELF*, должны быть скорректированы с учетом уравнений (1)-(7) для типовых орбитальных расчетов спутников. Параметром корректировки  $\Delta \vartheta$  (Рис.1) выступает смещение точек максимальных ускорений вследствие «усложнения» нелинейности скорости нестационарного движения по сравнению с синусом и косинусом.

Далее, на реальном примере будет представлен анализ орбитальных знакопеременных ускорений и практические возможности определения их параметров.

#### IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ УСКОРЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ОРБИТЫ BOREALIS

Рассмотрим эллиптическую орбиту типа *MEO (Medium Earth orbit) – «BOREALIS»* [9], входящую в систему спутниковой связи *Ellipso* [10].

Параметры орбиты «*BOREALIS*» [9]:

- высота апогея  $h_{an} = 7840$  км;
- высота перигея  $h_{nep} = 520$  км;
- период обращения  $t = 3$  час;
- эксцентриситет  $e = 0.3466$ ;
- средний радиус Земли  $R_3 = 6371$  км,

определяют параметры эллипса:

- большая полуось  $a = 0.5 (h_{an} + h_{nep} + 2R_3) = 10551$  км;
- фокальный параметр  $p = a(1 - e^2) = 9284$  км.

Подставляя реальные значения параметров орбиты «*BOREALIS*» в (3) и (5), при помощи ресурса [11] построим графические зависимости

$V(\vartheta)$  и  $q(\vartheta)$  в диапазоне  $180^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$  (Рис.3).

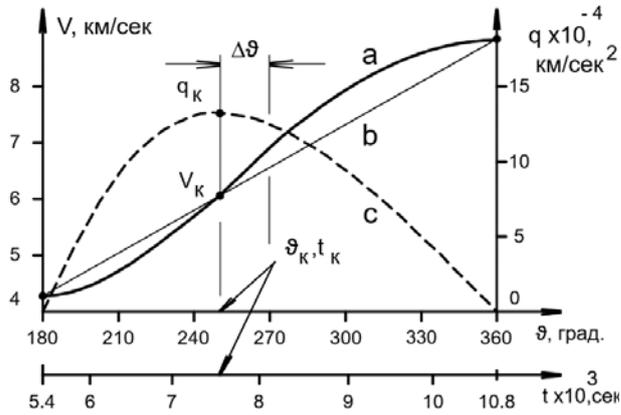


Рис.3. Зависимости скорости  $V$  (a) и ускорения  $q$  (c) от угла  $\vartheta$  (истинная аномалия), и от времени  $t$  между точками апогея ( $\vartheta = 180^\circ$ ) и перигея ( $\vartheta = 360^\circ$ ) при нестационарном движении ИСЗ по орбите «BOREALIS». Отрезок b), определяет линейное изменение скорости  $V$  между апогеем и перигеем при постоянном ускорении. Обозначение параметров  $\Delta\vartheta$ ,  $\vartheta_k$ ,  $q_k$ ,  $t_k$ ,  $V_k$  (аналогично Рис.2) соответствует смещению и координатам точки максимального ускорения.

Из нелинейных графиков Рис.3 следует, что на эллиптической орбите ИСЗ наблюдаются характерные точки с максимальными знакопеременными ускорениями  $\pm q_m$ . Каждая из таких точек с координатами  $\Delta\vartheta$ ,  $\vartheta_k$ ,  $q_k$ ,  $t_k$  (с периодичностью  $2\pi$ ) соответствует точке перегиба  $V_k$  при нелинейном изменении скорости между апогеем и перигеем (Рис.3). В данной точке изменяется знак кривизны при переходе нелинейной функции скорости из выпуклой формы в вогнутую при максимальном ускорении, и наоборот, при минимальном ускорении ИСЗ.

Для анализа временной динамики скорости  $V$  и ускорения  $q$  на Рис.3 добавлена ось  $t$ , временные значения на которой рассчитаны по формулам (6)-(8). Переход от переменной  $\vartheta$  к переменной  $t$  представляет нетривиальную математическую задачу, включающую решение иррационального уравнения Кеплера (7). Решение данной задачи проводилось при помощи вычислительного ресурса [11].

В итоге, практический расчет параметров орбитальных знакопеременных ускорений ИСЗ состоит из трех последовательных этапов.

Во-первых, определяются параметры эллиптической орбиты:  $e$  и  $p$ .

Во-вторых, рассчитываются угловые зависимости скорости  $V(\vartheta)$  и ускорения  $q(\vartheta)$  по формулам (3) и (5) в границах апогея и перигея.

В-третьих, на графике  $V(\vartheta)$  проводится прямая линия, соединяющая граничные точки апогея  $V_{ап}$  и перигея  $V_{пер}$ , и пересекающая график  $V(\vartheta)$  в точке максимального (или минимального) знакопеременного ускорения. В итоге, фиксируются координаты  $\Delta\vartheta$ ,  $\vartheta_k$ ,  $q_k$ ,  $t_k$ ,  $V_k$  данной точки, которые используются в различных практических задачах.

Для примера, на Рис.3 представлены результаты расчетных значений параметров точки  $q_k$  максимума знакопеременных ускорений для орбиты «BOREALIS»:  $\Delta\vartheta = 20^\circ$ ,  $\vartheta_k = 250^\circ$ ,  $q_k = 13.27$  км/сек<sup>2</sup>,  $t_k = 7548$  сек,  $V_k = 6.16$  км/сек.

#### V. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ УСКОРЕНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Из результатов работы следует, что все эллиптические орбиты ИСЗ, помимо точек, с максимальной (перигей) и минимальной скоростью (апогей), содержат две подобные по значимости точки, в которых ускорение движения спутника соответственно максимально и минимально. Иначе говоря, на орбитах наблюдается две пары особых точек:  $\pm V_m$  - апогей и перигей по скорости, и  $\pm q_m$  апогей и перигей по знакопеременному ускорению (Рис.4).

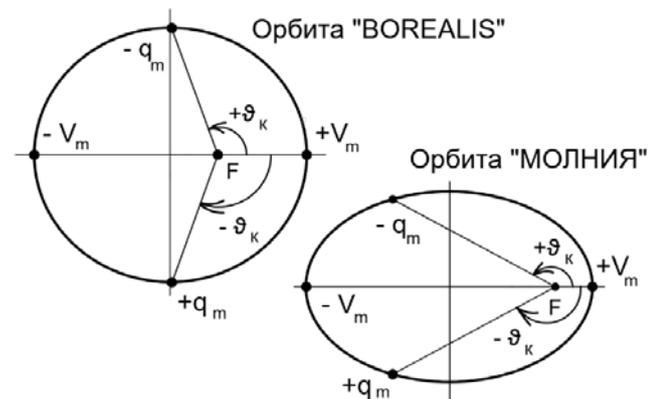


Рис.4. Расчеты знакопеременных ускорений на различных орбитах ИСЗ : «BOREALIS» ( $e = 0.3466$ ) и «МОЛНИЯ» ( $e = 0.743$ ) [9].  $\pm q_m$  – максимумы тангенциальных знакопеременных ускорений, определяемые углами истинной

аномалии  $\pm \mathcal{G}_k \cdot \pm V_m$  – максимумы и минимумы *знакопостоянной* скорости в точках перигея ( $+V_m$ ) и апогея ( $-V_m$ ). Точка  $F$  соответствует центру Земли.

Для орбит с различным эксцентриситетом  $e$ , угловое расположение точек знакопеременных ускорений может значительно различаться. Например, расчеты параметров особых точек (Рис.4) по формулам (12)-(15) показывают, что :

1) на орбите «*BOREALIS*» ( $e = 0.3466$ ) :  $\mathcal{G}_k = 110^\circ$  при  $q_m = -13.27 \times 10^{-4}$  км/сек<sup>2</sup> и  $\mathcal{G}_k = 250^\circ$  при  $q_m = +13.27 \times 10^{-4}$  км/сек<sup>2</sup> ;

2) на орбите «*МОЛНИЯ*» ( $e = 0.743$ ):  $\mathcal{G}_k = 152^\circ$  при  $q_m = -4.6 \times 10^{-4}$  км/сек<sup>2</sup> и  $\mathcal{G}_k = 208^\circ$  при  $q_m = +4.6 \times 10^{-4}$  км/сек<sup>2</sup>.

Координаты пар особых точек указывают на экстремумы скорости и ускорения нестационарного движения ИСЗ. Эти орбитальные точки выполняют роль граничных условий для нелинейных законов пути, скорости и ускорения спутника, и, по сути, управляют его движением.

При изменении координат экстремумов скорости и ускорения, изменяются параметры орбиты. Иначе говоря, эти точки выполняют роль «стабилизаторов» орбиты, подобно рельсам для поезда. В этом случае устойчивость полного орбитального движения будет определяться прохождением объекта через эти критические точки.

В представленной работе проведен анализ тангенциального ускорения ИСЗ. Как известно [1,2], полное ускорение космического объекта определяется векторной суммой тангенциального и центростремительного ускорений.

Для оценки устойчивости орбитального движения в особых точках  $\pm q_m$  (Рис.4) в дальнейшем предполагается исследовать эффект знакопеременного тангенциального ускорения как на фоне полного ускорения, так и в сравнении с центростремительным ускорением.

Оба ускорения имеют различную природу. Тангенциальное вызывается инерционными силами, а центростремительное – силами гравитации. Вследствие этого, оказывается сложным исследовать (сравнивать) оба ускорения с точки зрения их влияния на угловую устойчивость траектории движения ИСЗ. Например, в решении задачи стабилизации спутника на орбите, ляпуновская неустойчивость при численном интегрировании, неизбежно

приводит к значительным ошибкам [7], что требует искусственной коррекции вычисляемых переменных.

Обозначенные проблемы связаны с общей задачей динамики, включающей криволинейное и прямолинейное движения. В этом случае, составляющая кругового (эллиптического, криволинейного) движения «генерируется» центростремительным ускорением, а составляющая прямолинейного движения – тангенциальным ускорением. Для оценки или расчета степени влияния (вклада) каждого из ускорений в орбитальную устойчивость ИСЗ требуются экспериментальные данные, так как аналитические методы не приводят к желаемым результатам [7].

В силу технической сложности, детальные исследования совместной динамики тангенциальных и центростремительных ускорений, затруднены для орбитальных движений. Однако, здесь можно воспользоваться результатами решения подобной задачи при движении автомобиля [12,13] в случаях разгона и торможения на поворотах.

В этом случае оцениваются управляемость и устойчивость автомобиля как под воздействием *продольных сил* в тяговом (разгон) режиме или при торможении, так и под влиянием *сил криволинейного движения* на поворотах различного радиуса. При изменении скорости автомобиля продольные (инерционные) силы вызывают линейные ускорения, подобные тангенциальным на орбите ИСЗ, а радиальные силы при поворотах вызывают центростремительные ускорения круговой природы.

Экспериментальные измерения знакопеременных ускорений при движении автомобиля по криволинейной траектории могут использоваться для разработки *модели динамики ускорений* орбитального движения ИСЗ в целях управления устойчивостью космического аппарата на орбите.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Белецкий В.В. *Очерки о движении космических тел.* - М.: Изд-во ЛКИ, 2009. - 432 с.
- [2] Соловьев Г.М. *Уравнения движения искусственных спутников Земли.* - М.: НИИ космических систем им. А.А. Максимова, 2007. - 224 с.
- [3] Иванов-Ростовцев А.Г., Колотило Л.Г. *Моделирование дискретно-непрерывного движения системным алгоритмом D-SELF*// Международный журнал открытых информационных технологий (INJOIT). – 2022. – Т. 10, № 12. - С. 35-44.
- [4] Дегтярев Г.М., Иванов-Ростовцев А.Г., Колотило Л.Г.,

- Любченко О.А. *Пространственно-временная симметрия в открытых динамических системах (Модель D-SELF)*// Доклады РАН. – 1990. - Т. 315, № 5. - С. 1108-1111.
- [5] Donald J. Kessler et. *The Kessler syndrome: implications to future space operations*// 33rd Annual American Astronautical Society Guidance and Control Conference, 2010, preprint 10 – 016.[Online]. Available: <https://newspaceconomy.ca/wp-content/uploads/2022/09/the-kessler-syndrome-2010.pdf>
- [6] *Пошаговый калькулятор производных онлайн.*[Online] Available: <https://mathdf.com/der/>
- [7] Бордовицына Т.В., Авдошев В.А. *Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: Учеб. пособие.* — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. — 178 с. Available: [https://iaaras.ru/mdia/library/isz\\_2.pdf](https://iaaras.ru/mdia/library/isz_2.pdf)
- [8] Алексеева Е.Р., Чеснокова О.В. *Mathcad 12.М.*: НТ Пресс, 2005, 352с.
- [9] Дмитриев, С.Н. *Системы спутниковой связи: лабораторный практикум.* — Екатеринбург : Изд-во Уральск. ун-та, 2019.— 76 с.
- [10] *Ellipso системы спутниковой связи.* [Online]. Available: <https://kunegin.com/ref1/sput/meanorb.htm>
- [11] *Графический калькулятор онлайн.* [Online]. Available: <https://www.desmos.com/calculator?lang=ru>
- [12] Повзнер Я.М. *Теория устойчивости автомобиля.* М.: Машгиз. 1947, 154 с.
- [13] Литвинов А.С. *Управляемость и устойчивость автомобиля.* М.: Машиностроение.1971, 416 с.

# Orbital sign variable accelerations of artificial Earth satellites (application of the *D-SELF* algorithm)

A.G. Ivanov-Rostovtsev, L.G. Kolotilo

**Abstract** - The unsteady motion of artificial Earth satellites in the boundaries between apogee and perigee is investigated. The *D-SELF* algorithm is used for the functional analysis of the nonlinearity of the satellite velocity. A typical model of orbital motion is considered in the context of composite motion (the *D-SELF* approach) in the form of uniform (linear) motion with constant velocity, and satellite oscillations with tangential sign variable accelerations along the trajectory of the orbit, like a pendulum. The extremes of the tangential sign variable acceleration of the orbital motion are determined depending on time and on the angles of the True, Eccentric and Mean anomalies. It is proposed to evaluate the controllability and stability of the satellite's orbital motion in a model of joint dynamics of tangential and centripetal accelerations based on solving a similar problem when driving a car in cases of acceleration and braking on turns.

**Keyword** - artificial Earth satellites, *D-SELF* algorithm, variable sign accelerations, orbital motion

## REFERENCES

- [1] Beletsky V.V. *Essays on the motion of cosmic bodies*. - M.: LKI Publishing House, 2009. -432 p.
- [2] Solovyov G.M. *Equations of motion of artificial Earth satellites*. -M.: A.A.Maksimov Research Institute of Space Systems, 2007.- 224 p.
- [3] Ivanov-Rostovtsev A.G., Kolotilo L.G. *Modeling of discrete-continuous motion using the D-SELF system algorithm*// International Journal of Open Information Technologies (INJOIT). – 2022.- vol. 10, No. 12. - pp. 35-44.
- [4] Degtyarev G.M., Ivanov-Rostovtsev A.G., Kolotilo L.G., Lyubchenko O.A. *Space-time symmetry in open dynamical systems (D-SELF model)*// Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1990. - Vol. 315, No. 5. - pp. 1108-1111.
- [5] Donald J. Kessler et. *The Kessler syndrome: implications to future space operations*// 33rd Annual American Astronautical Society Guidance and Control Conference, 2010, preprint 10-016. [Online]. Available: <https://newspaceconomy.ca/wp-content/uploads/2022/09/the-kessler-syndrome-2010.pdf>
- [6] *Step-by-step derivative calculator online*. [Online]. Available: <https://mathdf.com/dex/>
- [7] Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A. *Theory of motion of artificial Earth satellites. Analytical and numerical methods: Textbook*. Tomsk: Publishing House Vol. Unita, 2007. — 178 p. [Online]. Available: [https://iaaras.ru/media/library/isz\\_2.pdf](https://iaaras.ru/media/library/isz_2.pdf)
- [8] Alekseeva E.R., Chesnokova O.V. *Mathcad 12*. Moscow: NT Press, 2005, 352 p.
- [9] Dmitriev, C.N. *Satellite communication systems : a laboratory workshop*. — Yekaterinburg : Uralsk Publishing House, 2019.— 76 p. [Online]. Available: [https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/71152/1/978-5-7996-2597-9\\_2019.pdf](https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/71152/1/978-5-7996-2597-9_2019.pdf)
- [10] *Elipso satellite communication systems*. [Online]. Available: <https://kunegin.com/ref1/sput/meanorb.htm>
- [11] *DESMOS - graphical calculator online*. [Online]. Available: <https://www.desmos.com/calculator?lang=ru>
- [12] Pevsner Ya.M. *The theory of stability of the car*. M.: Mashgiz. 1947, 154 p.
- [13] Litvinov A.S. *Controllability and stability of the car*. M.: Mechanical engineering.1971, 416 p.