

Динамический анализ двухзвенной связанной системы

Д.В. Афонин, А.С. Печурин, С.Ф. Яцун

Аннотация— В исследовании представлен динамический анализ двухзвенной связанной системы, используя в качестве примера систему колесных тел: буксирующее и буксируемое, соединенные упругим элементом. Анализ динамики многозвенных механических и подвижных систем представляет собой сложный и комплексный процесс, который включает в себя как взаимодействие с реальным объектом, так и с его математической или имитационной моделью. Методы имитационного моделирования существенно сокращают время, необходимое для создания моделей, по сравнению с традиционными подходами, и обеспечивают большее удобство при работе над крупными проектами. Разнообразные методы были применены, включая численное, имитационное и симуляционное моделирование. Проведено моделирование динамики двухзвенной колесной системы с помощью специальных программ компьютерной симуляции. Результаты моделирования были проанализированы с целью выявления сильных и слабых сторон каждого из представленных подходов. Исследованы вопросы, связанные со структурой и управлением динамически связанной системой. Полученные выводы могут оказать значительное влияние на понимание и оптимизацию подобных систем в различных областях применения, включая автомобильную промышленность, робототехнику и многие другие.

Ключевые слова— связанные тела, динамический анализ, численное моделирование, имитационное моделирование.

I. ВВЕДЕНИЕ

Нас окружает обширное количество взаимосвязанных динамических систем. С каждым годом они все более активно автоматизируются и роботизируются [1]. Отработка алгоритмов работы таких систем происходит на моделях. Динамический анализ играет ключевую роль, позволяя выявить проблемы ещё на этапе проектирования.

Подобный анализ также позволяет оптимизировать или улучшить работу уже существующих систем. Однако, анализ динамики многозвенных механических и подвижных систем представляет собой сложный и

комплексный процесс [2]. Он включает в себя как взаимодействие с реальным объектом, так и с его математической или имитационной моделью.

Эффективное использование динамического анализа требует не только глубоких знаний в области теории управления и механики, но и умения оперировать современными методами моделирования и анализа данных. Тем не менее, применение этого инструмента существенно улучшает процесс разработки и управления сложными системами.

В целом, динамический анализ является неотъемлемой частью современной инженерной практики, способствуя развитию новых технологий и улучшению существующих. Он играет ключевую роль в области автоматизации, роботизации и оптимизации различных систем, что делает его важным инструментом для науки и промышленности.

II. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА УПРАВЛЯЕМОЙ ДВУХЗВЕННОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМОЙ

В качестве примера динамически связанной системы рассмотрим роботизированный мобильный буксировщик (РМБ), оснащённый целым рядом датчиков, управляющих инструкций для буксировки воздушных судов, и непосредственно само воздушное судно (ВС). Подобная связанная система представляет собой сложную структуру, влияние на которую оказывают не только конструктивные элементы обоих тел, но и другие внешние факторы, влияющие на работу системы. Учитывать эти факторы необходимо для понимания полной картины функционирования системы и оптимизации ее работы. Структурная схема роботизированной буксировочной системы представлена на рис. 1.

Подсистема РМБ (см. рис. 2) - роботизированная колёсная платформа с дифференциальным приводом, управляемая двумя ведущими колесами. Датчики, такие как оптронная матрица, одометр, дальнометры, система технического зрения, GPS и лидар, определяют координаты и направление РМБ. Эта информация используется для управления ее движением. Интегрированная человеко-машинная система обеспечивает согласованность работы оператора, РМБ, сцепного устройства и ВС для максимальной эффективности.

Статья получена 10 марта 2024.

Д.В. Афонин, Воронежская Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина (teormeh@inbox.ru).

А.С. Печурин, аспирант, Юго-Западный государственный университет, г. Курск (alexander.pechurin@yandex.ru)

С.Ф. Яцун, Юго-западный государственный университет, Курск, Россия (e-mail: teormeh@inbox.ru).

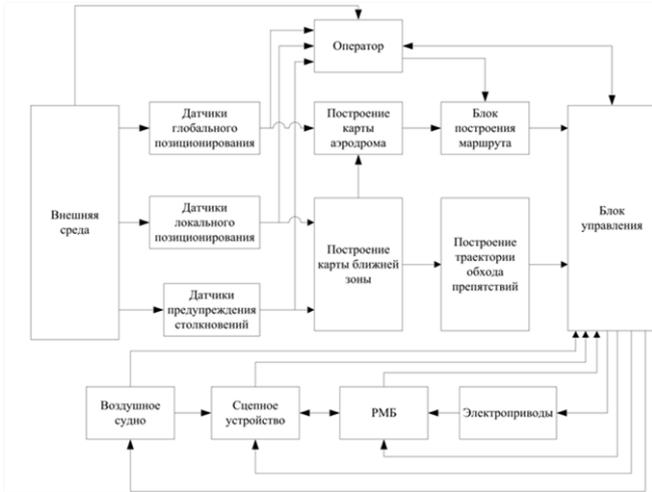


Рис. 1. Структурная схема роботизированной буксировочной системы

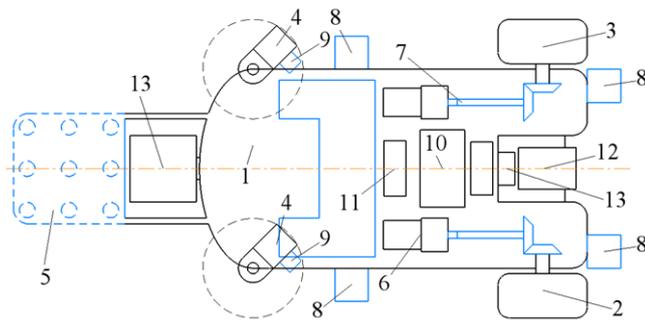


Рис. 2. Структурная схема подсистемы РМБ: корпус 1, левое приводное колесо 2, правое приводное колесо 3, рояльное колесо 4, оптронная матрица 5, электроприводы 6,7, дальномеры 8, одометр 9, бортовой вычислитель 10, GPS-модуль 11, модуль захвата переднего колеса самолёта 12, система технического зрения 13

III. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДВУХЗВЕННОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

Роботизированная колесная система, описанная в [3-5] и представленная на схеме (рис. 3), представляет собой упруго связанную систему, в которой ведущая колесная платформа (ВКП), обозначенная на схеме границами $I_1A_1B_1$, соединена упругой силой с последующей колесной платформой (СКП) с границами $A_2B_2D_2$. Эти платформы совершают движение по горизонтальной плоскости на неровной поверхности.

Главной особенностью этой системы является применение упругой силы, связывающей ВКП – колесного робота с дифференциальным приводом, и СКП – трехколесную платформу без приводов.

Исходя из предположения об отсутствии проскальзывания колес, основанных на уравнениях связи [6,7], были выведены кинематические уравнения движения для системы двух колесных платформ в матричной форме (1):

$$\dot{\mathbf{q}}_{10 \times 1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/R_1 & L_1/R_1 & 0 & 0 \\ 1/R_1 & -L_1/R_1 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/R_2 & L_2/R_2 & 0 & 0 \\ 1/R_2 & -L_2/R_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{\pi}}_{4 \times 1}, \quad (1)$$

где: в качестве компонентов вектора псевдоскоростей $\dot{\mathbf{\pi}} = (V_1 \ \Omega_1 \ V_2 \ \Omega_2)^T$ удобно выбрать величины V_1 и V_2 скорости точек O_1 и O_2 соответственно, а также угловые скорости платформ $\Omega_1 = \dot{\varphi}_1$ и $\Omega_2 = \dot{\varphi}_2$.

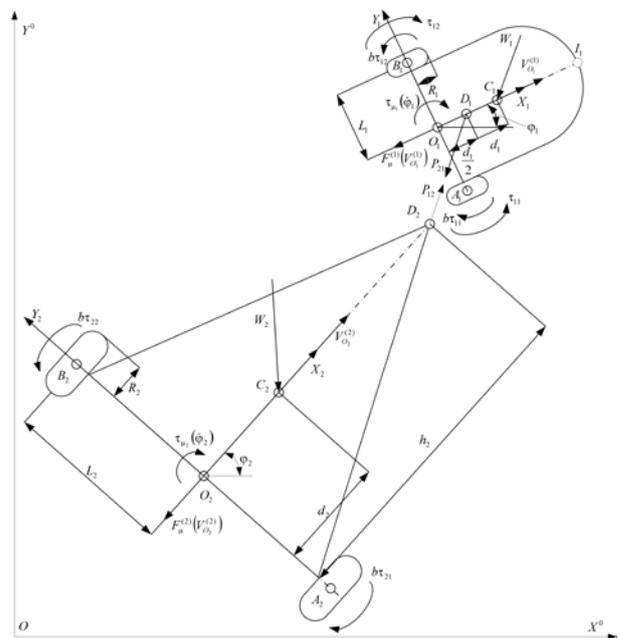


Рис. 3. Расчётная схема связанной системы

Упругой силой, связывающей тела, является $\bar{P}_{21|12}$, модуль, и направление которой зависят от взаимного удаления точек D_1 и D_2 друг от друга (2):

$$\bar{P}_{21|12} = \begin{pmatrix} C_X & 0 \\ 0 & C_Y \end{pmatrix} \bar{D}_{12} + \begin{pmatrix} \mu_X & 0 \\ 0 & \mu_Y \end{pmatrix} \dot{\bar{D}}_{12}, \quad (2)$$

где: C_X, C_Y - коэффициенты упругости; μ_X, μ_Y - коэффициенты вязкости; $\bar{D}_{12} = \bar{D}_1 - \bar{D}_2$.

Формирование системы дифференциальных уравнений движения для связанной системы основано на описании динамики с помощью подхода Лагранжа для неголономных систем и соответствующих тождеств, изложенных в [8]. В работе также рассмотрены уравнения Маджи и исследования, посвященные описанию движения цепочки твердых тел, связанных между собой [9-15]. В представленных системах координат $(1,2)$ уравнения движения двухзвенной связанной системы имеют вид (уравнение 3):

$$\dot{\bar{X}} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_{V_1}}{a_0} & \frac{a_1}{a_0} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_2} & -\frac{\mu_{\omega_1}}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_{V_2}}{a_5} & \frac{a_6}{a_5} \\ 0 & 0 & -\frac{a_6}{a_7} & -\frac{\mu_{\omega_2}}{a_7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \Omega_1 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_3}{a_0}(\tau_{11} + \tau_{12}) \\ \frac{a_4}{a_2}(\tau_{11} - \tau_{12}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_0} P_{21x} \\ -\frac{d_1}{2a_2} P_{21y} \\ \frac{1}{a_5} P_{12x} \\ \frac{h_2}{a_7} P_{12y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_b a_0} (b\tau_{11} + b\tau_{12}) \\ -\frac{L_1}{R_b a_2} (b\tau_{11} - b\tau_{12}) \\ -\frac{1}{R_b a_5} (b\tau_{21} + b\tau_{22}) \\ -\frac{L_2}{R_b a_7} (b\tau_{21} - b\tau_{22}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_0} W_{1x} \\ -\frac{d_1}{a_2} W_{1y} \\ -\frac{1}{a_5} W_{2x} \\ -\frac{d_2}{a_7} W_{2y} \end{pmatrix},$$

где $a_0 = m_1 + 2 \cdot I_{w_1} / R_1^2$; $a_1 = d_1 \cdot m_{C_1} \cdot \omega_1$;
 $a_2 = I_1 + (2 \cdot L_1^2 / R_1^2) \cdot I_{w_1}$; $a_3 = 1 / R_1$; $a_4 = L_1 / R_1$;
 $a_5 = m_2 + 2 \cdot I_{w_2} / R_2^2$; $a_6 = d_2 \cdot m_{C_2} \cdot \omega_2$;
 $a_7 = I_2 + (2 \cdot L_2^2 / R_2^2) \cdot I_{w_2}$.

В векторно-матричной форме уравнение (3) имеет вид (4, 5):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}} &= A(\bar{X}) + B\bar{U} + \bar{W}, \\ \bar{X} &= (V_1, \Omega_1, V_2, \Omega_2)^T. \end{aligned} \quad (4, 5)$$

Система дифференциальных уравнений, как представитель «классического» подхода (5) обеспечивает возможность всестороннего анализа управляемого движения динамической системы с учётом упругой связи между ВКП и СКП, а также воздействие внешних возмущений \bar{W}_1 и \bar{W}_2 .

IV. СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ

Типичной для связанной колёсной системы является задача траекторного управления. Для его реализации была разработана система управления (рис. 4), включающую в себя: эталонную модель (блока рассчитывающего управляющие воздействия для идеальных условий), элементы глобального позиционирования (управление по сигналам GPS-модуля) и оптронной матрицы (модуля мгновенного реагирования на отклонения от контрастной линии).

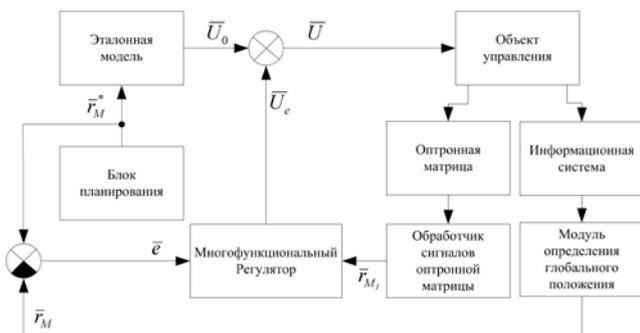


Рис. 4. Структурная схема системы управления движением связанных тел

Координатное управление реализуется с помощью управления скоростью вспомогательной точки, принадлежащей буксировщику (6, 7):

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \Omega_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{X_{I_1}^{(0)}} \cdot \begin{pmatrix} X_{I_1}^{(0)} \cdot \cos(\varphi) - Y_{I_1}^{(0)} \cdot \sin(\varphi) & X_{I_1}^{(0)} \cdot \sin(\varphi) - Y_{I_1}^{(0)} \cdot \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_p \cdot (X_{I_1}^{*(0)} - X_{I_1}^{(0)}) \\ k_p \cdot (Y_{I_1}^{*(0)} - Y_{I_1}^{(0)}) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\bar{I}^{*(0)} = \begin{pmatrix} X_{I_1}^{*(0)} = \sum_{i=0}^{n=5} a_i \cdot t^i & Y_{I_1}^{*(0)} = \sum_{i=0}^{n=6} b_i \cdot t^i \end{pmatrix}.$$

Требуемые угловые скорости колёс находятся из:

$$\begin{pmatrix} \omega_R \\ \omega_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_1 + \Omega_1 \cdot d_1}{R_1} \\ \frac{V_1 - \Omega_1 \cdot d_1}{R_1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Расчёт эталонных управляющих воздействий путём решения обратной задачи динамики для колёсной платформы и генерация вспомогательных управляющих воздействий после обработки сигналов оптронной матрицы более подробно рассмотрены в [16].

V. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ «КЛАССИЧЕСКОМ» ПОДХОДЕ

В основе «классического» подхода лежит численное моделирование - процесс автоматизации вычислений наборов дифференциальных уравнений, например, путём написания программного кода.

На основе изложенных выше уравнений была разработана математическая модель прямолинейного и криволинейного управляемого движения двухзвенной колёсной системы, связанной упругим элементом, с использованием языка MATLAB. Для удобства результаты численного моделирования были приведены в качестве графиков, представленных на рисунках 5, 6.

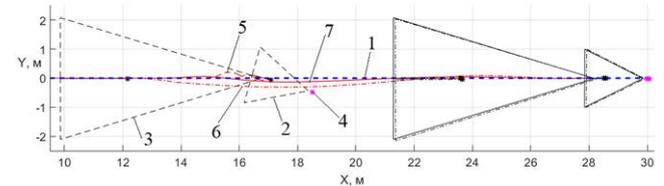


Рис. 5. Конечные положения ВКП и СКП при различных типах управления: 1 – желаемая траектория движения; 2 – ВКП; 3 – СКП; 4 – точка I_1 ; траектория движения точки O_1 при: 5 – эталонном, 6 – корректируемом, 7 – комбинированном типе управления

С помощью численного моделирования возможно реализовать динамику связанных систем тел не только с углубленным подходом к описанию законов физического взаимодействия, но и оснащением датчиками, работа которых основана на различных физических принципах.

К примеру, на рисунках 7, 8 приведены результаты моделирования движения ВКП и СКП по

криволинейной траектории по показаниям оптронной матрицы.

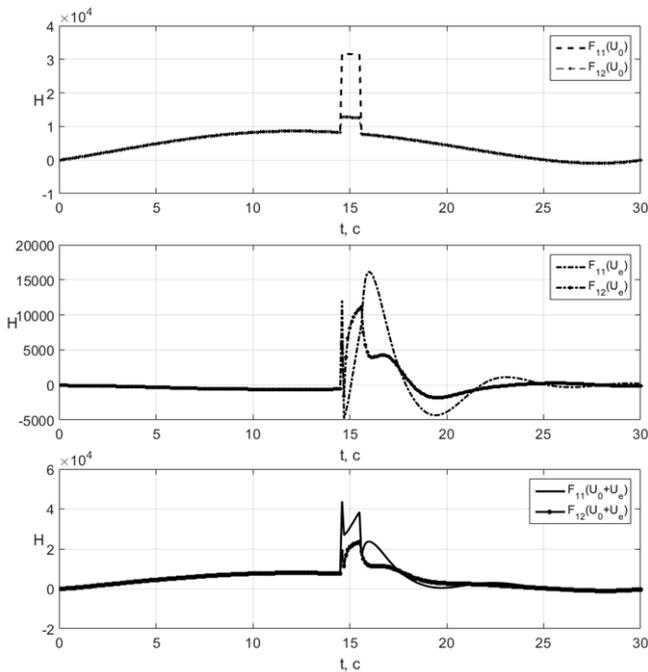


Рис. 6. Графики изменения тяговых сил колёс ВКП при различных типах управления

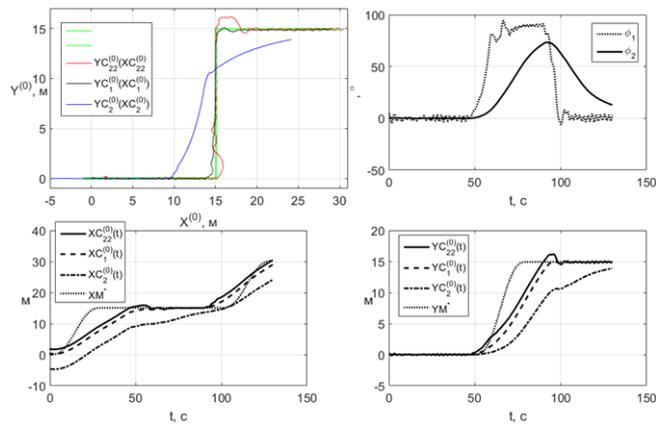


Рис. 7. Результаты управляемого движения ВКП и СКП по сигналам оптронной матрицы

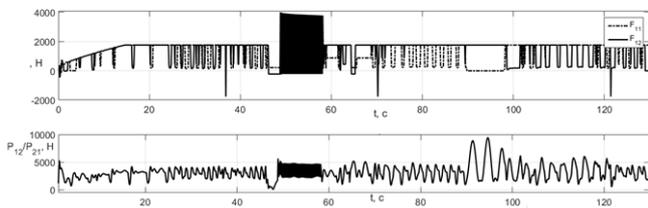


Рис. 8. Графики изменения тяговых сил колёс ВКП при дискретном характере их генерации

Численное моделирование динамики связанных систем, физические процессы в котором описываются с помощью приведения дифференциальных уравнений к программному коду, направлено на всестороннее изучение свойств таких систем. Однако не всегда модели сложных систем можно привести к виду, допускающему численное решение, либо это является сложным процессом, требующим больших затрат

времени и квалификации исследователя, особенно в крупных исследованиях.

VI. МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРОГРАММ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИМУЛЯЦИИ

Другим подходом к динамическому анализу связанных систем является моделирование с использованием специализированных программ компьютерной симуляции. Например, программный симулятор роботов CoppeliaSim, который применяется для тестирования и проверки сложных робототехнических систем, включая прототипирование алгоритмов, кинематическое проектирование и создание цифровых двойников [17]. Несмотря на то, что данный пакет больше ориентирован на промышленность и образование, программа включает в себя пять физических движков (MuJoCo, Bullet Physics, ODE, Newton и Vortex Dynamics) для быстрых и настраиваемых динамических расчетов, моделирования реальной физики и взаимодействий объектов (реакция на столкновение, захват, мягкие тела, веревки, ткани и др.).

В качестве примера рассмотрим динамическую модель связанной системы в программе CoppeliaSim на примере ВКП и СКП из предыдущих разделов. На рисунке 9 представлено окно программы симуляции динамики связанной колёсной системы. Задачей исследования является определить возможность движения по заданной траектории и крутящие моменты ведущих колёс ВКП для обеспечения движения.

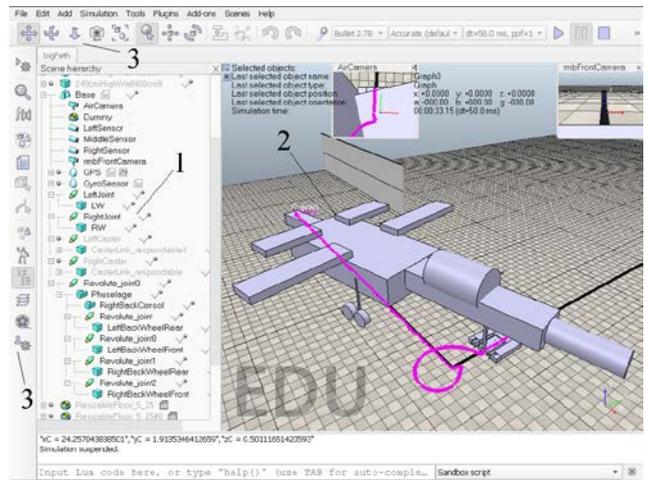
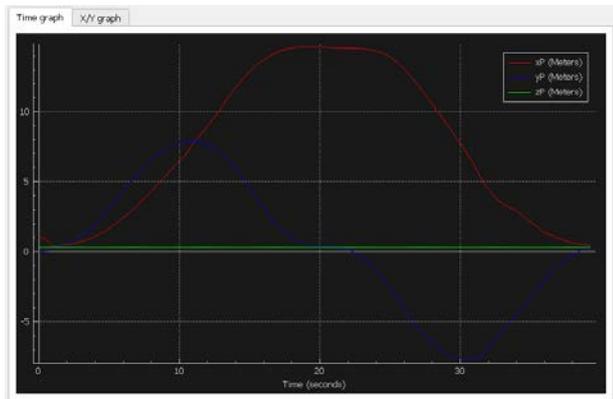


Рис. 9. Окно программы симуляции динамики связанной колёсной системы: 1 – иерархия сцены, определяющая структуру модели и взаимосвязь физических и других объектов; 2 – сцена с моделируемыми объектами; 3 – панели инструментов

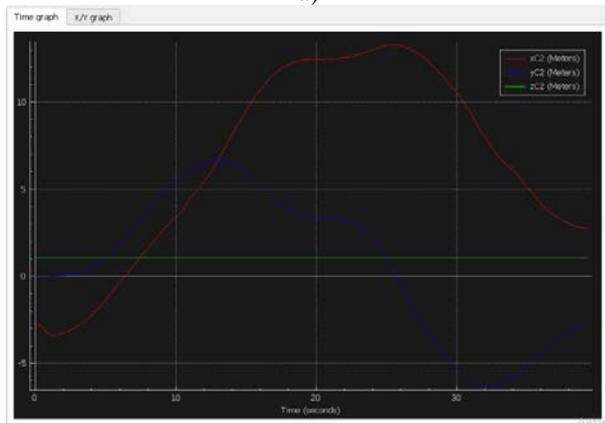
Результаты моделирования управляемого движения ВКП и СКП, по закону управления (6,7), представлены на рис. 10, 11.

Проведение динамического анализа связанных систем с помощью программных пакетов симуляционного моделирования представляет собой более простой и наглядный подход по сравнению с «классическим». Зачастую вывод дифференциальных уравнений может даже не потребоваться, что существенно ускоряет процессы исследования, разработки или прототипирования.

Среди недостатков подобного подхода следует отметить ограничения в возможных комбинациях динамических подвижных систем, ограниченное количество инструментов для генерации внешних и внутренних воздействий на объект, а также необходимость полагаться на физические законы, реализованные в физических движках программы.



а)



б)

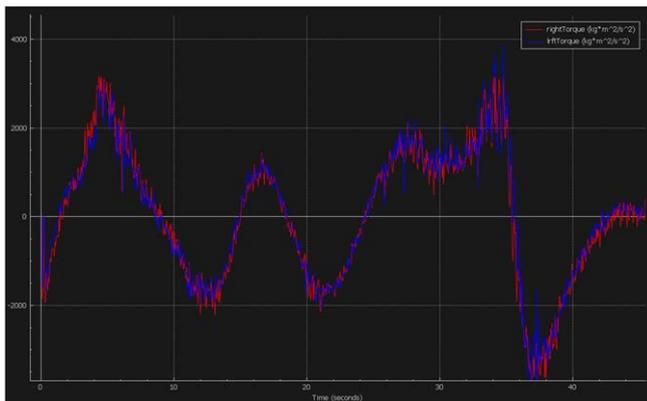
Рис. 10. Графики изменения точек: а) - I_1 , б) - C_2 

Рис. 11. Графики изменения крутящих моментов правого и левого колеса ВКП

Несмотря на описанные недостатки подобных приложений, в них можно проводить фундаментальные исследования, хотя они больше подходят для прикладных исследований в промышленности, робототехнике и т.д.

VII. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ SIMSCAPE MULTIBODY

Программный пакет MATLAB/Simulink является инструментом, позволяющим проводить как прикладные, так и фундаментальные исследования, объединяя в себе преимущества как численного, так и имитационного моделирования. Simulink является мощным инструментом для моделирования сложных технических систем и поддерживает междисциплинарное моделирование. Он широко применяется в модельно-ориентированном проектировании и обладает графическим интерфейсом для создания блок-схем и настройки библиотек блоков. Simulink также тесно интегрирован с средой MATLAB, что позволяет ему взаимодействовать с ней, управлять ею или создавать сценарии. Simscape Multibody - это подмодуль Simulink, который формулирует и решает уравнения движения для всей механической системы [18-20].

Рассмотрим имитационную модель для исследования динамики ВКП и СКП (рис. 12), учитывающую силы контактного взаимодействия колёс с поверхностью, силы трения и силы контактного взаимодействия. Визуальное представление модели тел с демонстрацией ключевых фреймов приведено на рисунке 13.

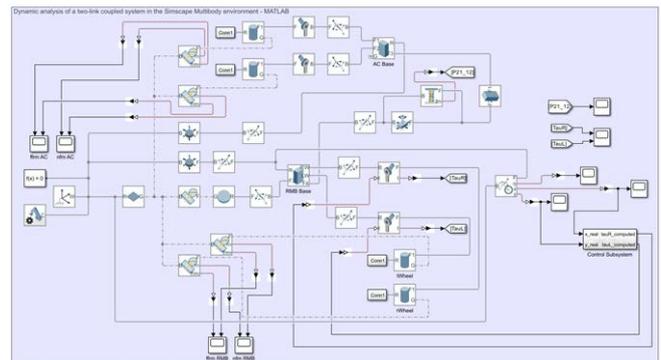


Рис. 12. Блок-схема имитационной модели динамики двухзвенной колёсной системы, связанной упругим элементом в среде Simscape Multibody

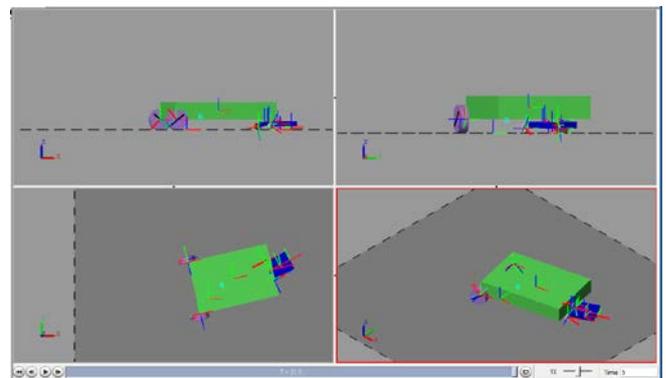


Рис. 13. Кадр из анимации движения ВКП и СКП с отображением ключевых фреймов

Для рассматриваемой связанной колёсной системы было проведено моделирование динамики управляемого движения вдоль наклонной прямой при различных коэффициентах трения. Результаты моделирования представлены на рис. 14–16, где DF и SF – коэффициент динамического и статического трения соответственно.

MATLAB/Simulink и Simscape Multibody являются мощными средствами как для численного, так и для имитационного моделирования. Они сочетают в себе методы автоматизации решения дифференциальных уравнений через написание программного кода, удобный графический интерфейс для построения блок-схем моделей, а также обширный набор инструментов для имитации различных физических процессов и широкий набор подпрограмм для их исследования.

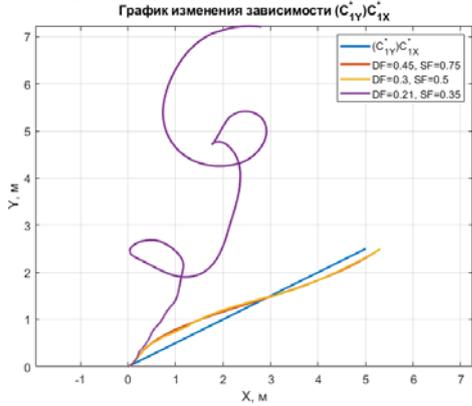


Рис. 14. Зависимость траектории центра масс ВКП движения от коэффициентов трения

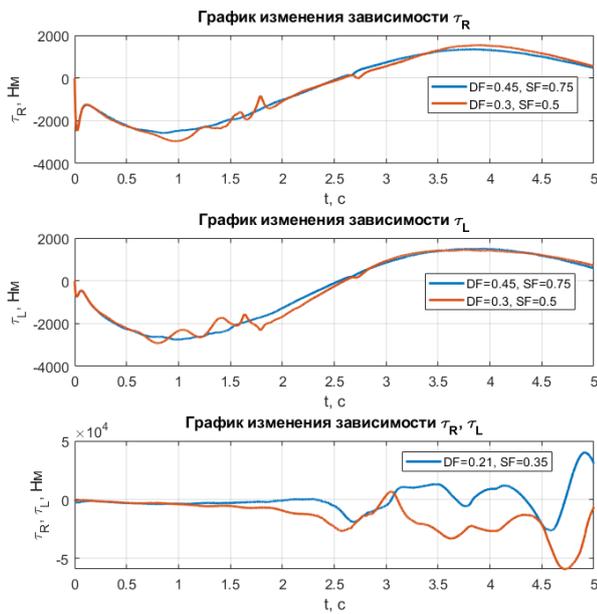


Рис. 15. Зависимость крутящих моментов приводных колёс ВКП от коэффициентов трения

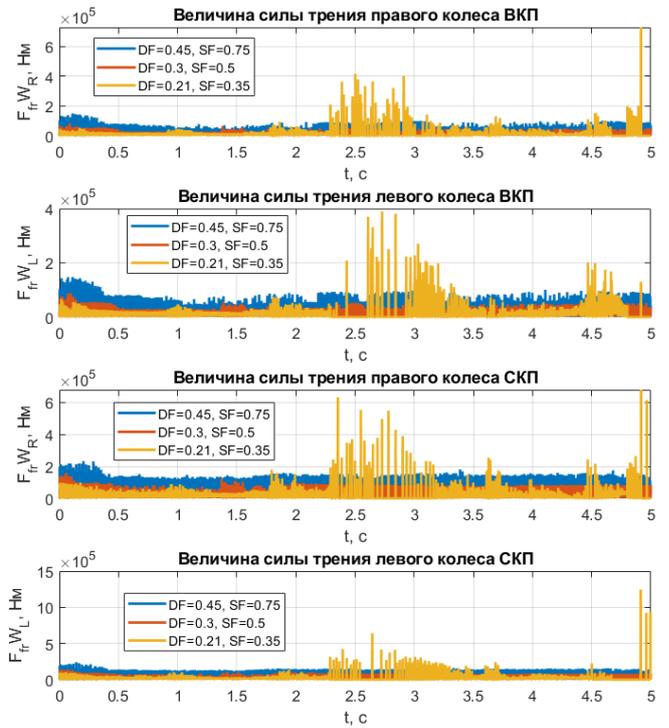


Рис. 16. Зависимость сил трения колёс ВКП и СКП от коэффициентов трения

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в работе подходы предоставляют возможность проведения как фундаментальных, так и прикладных динамических исследований, охватывающих как отдельные механизмы, так и сложные мобильные многозвенные системы.

Методы имитационного моделирования существенно сокращают время, необходимое для создания моделей, по сравнению с традиционными подходами, и обеспечивают большее удобство при работе над крупными проектами. Однако, недостатками такого подхода являются относительно ограниченные возможности воздействия на объекты и необходимость полагаться на внутренние средства формирования дифференциальных уравнений взаимодействия объектов.

В ходе исследования было проведено моделирование динамики двухзвенной колесной системы, связанной упругим элементом, в различных средах моделирования. Это продемонстрировало сопоставимость результатов каждого из подходов, подтверждая гибкость и эффективность предложенных методов.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Salmerón Rodríguez J. *Use of robotic systems on airport management optimization*: Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya, 2022.
- [2] Яманин А. И., Жуков В. А., Барышников С. О. Силовой анализ поршневого двигателя с использованием динамических моделей кривошипно-шатунного механизма // *Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова*, т. 10, №. 1, с. 191-200, 2018.
- [3] Яцун С. Ф. и др. Моделирование движения робота-тягача для транспортировки самолетов по аэродрому // *Известия Юго-Западного государственного университета*, т. 22, №. 2, с. 34-43, 2018.
- [4] Politov E., Afonin D., Bartenev V. Mathematical modeling of motion of a two-section wheeled robot // *In Proceedings of 14th*

International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings" ER (ZR) 2019, Kursk, Russia, 17-20 April 2019. Springer Singapore, 2020, pp. 397-409.

- [5] Binh N. T. et al. An adaptive backstepping trajectory tracking control of a tractor trailer wheeled mobile robot // *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 17, pp. 465-473, 2019.
- [6] Павловский В.Е., Петровская Н.В. *Исследование динамики движения цепочки «Робопоезд». Уравнения движения, частные решения.* Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 117. 2005.
- [7] Котов Е.А., Шишкина С.И. Динамическая модель системы взаимосвязанных подвижных платформ типа «робопоезд» // *В Технологии разработки и отладки сложных технических систем VII Всероссийская научно-практическая конференция: сборник трудов.* М., 2020, с. 236-242.
- [8] Dhaouadi R., Hatab A. A. Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using lagrange and newton-euler methodologies: A unified framework // *Advances in Robotics & Automation*, vol. 2, no. 2, pp. 1-7, 2013.
- [9] Мартыненко Ю.Г. Динамика мобильных роботов // *Соросовский образовательный журнал*, т. 6, №. 5, с. 111-116, 2000.
- [10] Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 11, №. 8, с. 29-80, 2005.
- [11] Ефремов К.С., Шестаков В. Исследование базовых маневров движения многозвенных колесных роботов // *В Выставка инноваций–2020 (весенняя сессия).* 2020, с. 69-73.
- [12] Liang Z., Yuan J. Modelling and optimisation of high-efficiency differential-drive complementary metal-oxide-semiconductor rectifier for ultra-high-frequency radio-frequency energy harvesters // *IET Power Electronics*, vol. 12, no. 3, pp. 588-597, 2019.
- [13] Leena N., Saju K.K. Modelling and trajectory tracking of wheeled mobile robots // *Procedia technology*, vol. 24, pp. 538-545, 2016.
- [14] Seegmiller N., Kelly A. High-fidelity yet fast dynamic models of wheeled mobile robots // *IEEE Transactions on robotics*, vol. 32, no. 3, pp. 614-625, 2016.
- [15] Hendzel Z., Rykala L. Modelling of dynamics of a wheeled mobile robot with mecanum wheels with the use of Lagrange equations of the second kind // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 22, no. 1, p. 81, 2017.
- [16] Афонин Д.В., Печурин А.С., Яцун С.Ф. Управление движением роботизированной двухзвенной колесной системы по заданной траектории // *International Journal of Open Information Technologies*, т. 11, №. 4, с. 38-46, 2023.
- [17] Ferro M. et al. A CoppeliaSim dynamic simulator for the da Vinci Research Kit // *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 8, no. 1, pp. 129-136, 2022.
- [18] Nawawi S.W. et al. Modeling and simulation of autonomous mobile robot system for collision avoidance in vr environment using simscape-multibody // *ELEKTRIKA-Journal of Electrical Engineering*, vol. 21, no. 2, pp. 33-41, 2022.
- [19] Han J. B. et al. A modeling and simulation based on the multibody dynamics for an autonomous agricultural robot // *In 2019 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCSMA).* IEEE, 2019, pp. 137-143.
- [20] Mohsin H.H., Aldair A.A., Al-Hussaibi W.A. *Robust Control Design for Two-Wheel Self-Balanced Mobile Robot.* 2022.

Афонин Дмитрий Вячеславович

Сотрудник военного учебно-научного центра военно-воздушных сил Воронежской Военно-воздушной академии имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина. В 2021 году окончил аспирантуру Юго – Западного государственного университета по специальности «Роботы. Мехатроника и робототехнические системы». Является автором более 20 научных публикаций и 2 патентов на изобретения. Область научных интересов – математическое моделирование, системы управления автономными роботами, роботизированные буксировщики воздушных судов.

Печурин Александр Сергеевич

Аспирант, инженер кафедры механики, мехатроники и робототехники Юго-Западного государственного университета. В 2020 году окончил Юго – Западный государственный университет по специальности «Мехатроника и робототехника». В 2022 году защитил диплом магистра по специальности «Мехатроника и робототехника». Является автором 20 научных публикаций. Область научных интересов – математическое моделирование, мобильные роботы. orcid.org/0000-0002-1615-7817

Яцун Сергей Федорович

Профессор, заведующий кафедрой механики, мехатроники и робототехники Юго-западного государственного университета, Заслуженный деятель науки Российской Федерации. В 1975 году окончил Днепропетровский горный институт по специальности "Горные машины и комплексы". В 1990 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором более 300 научных публикаций и 200 патентов на изобретения. Область научных интересов - вибрационные машины и технологии, динамика и прочность машин, теория автоматического управления, мехатроника, робототехника. orcid.org/0000-0002-7420-0772

Dynamic Analysis of a Two-Link Coupled System

D.V. Afonin, A.S. Pechurin, S.F. Yatsun

Abstract-The study presents a dynamic analysis of a two-link coupled system, using as an example a system of wheeled bodies: a towing body and a towed body connected by an elastic element. Analysis of the dynamics of multi-link mechanical and moving systems is a complex and complex process that includes both interaction with a real object and with its mathematical or simulation model. Simulation modeling methods significantly reduce the time required to create models compared to traditional approaches and provide greater convenience when working on large projects. A variety of modeling techniques have been applied, including numerical, simulation and simulation modeling. The dynamics of a two-link wheel system was simulated using special computer simulation programs. The simulation results were carefully analyzed to identify the strengths and weaknesses of each of the presented approaches. In addition, issues related to the structure and control of the dynamically coupled system have been investigated. The findings can have a significant impact on the understanding and optimization of such systems in various applications including automotive, robotics, and many others.

Keywords-connected bodies, dynamic analysis, numerical modeling, simulation modeling.

REFERENCES

- [1] J. Salmerón Rodríguez, *Use of robotic systems on airport management optimization*: Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya, 2022.
- [2] A.I. Yamanin, V.A. Zhukov, S.O. Baryshnikov, "Force analysis of a piston engine using dynamic models of crank and connecting rod mechanism," *Vestnik of the State University of Sea and River Fleet named after Admiral SO Makarov*, vol. 10, no. 1, pp. 191-200, 2018. [In Rus]
- [3] S.F. Yatsun et al., "Modeling the motion of a robot tractor for aircraft transportation on the airfield," *Proceedings of Southwestern State University*, vol. 22, no. 2, pp. 34-43, 2018. [In Rus]
- [4] E. Politov, D. Afonin, V. Bartenev, "Mathematical modeling of motion of a two-section wheeled robot," In *Proceedings of 14th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"* ER (ZR) 2019, Kursk, Russia, 17-20 April 2019. Springer Singapore, 2020, pp. 397-409.
- [5] N.T. Binh et al., "An adaptive backstepping trajectory tracking control of a tractor trailer wheeled mobile robot," *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 17, pp. 465-473, 2019.
- [6] V.E. Pavlovsky, N.V. Petrovskaya, *Investigation of the dynamics of motion of the "Robopod-train" chain. Equations of motion, partial solutions*, Preprints of the Keldysh IPM, 2005, 117. [In Rus]
- [7] E.A. Kotov, S.I. Shishkina, "Dynamic model of the system of interconnected mobile platforms of "robot train" type," In *Technologies of development and debugging of complex technical systems*. Moscow, 2020, pp. 236-242. [In Rus]
- [8] R. Dhaouadi, A.A. Hatab, "Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using lagrange and newton-euler methodologies: A unified framework," *Advances in Robotics & Automation*, vol. 2, no. 2, pp. 1-7, 2013.
- [9] Y.G. Martynenko, "Dynamics of mobile robots," *Soros Educational Journal*, vol. 6, no. 5, pp. 111-116, 2000. [In Rus]
- [10] Yu.G. Martynenko, "Motion control of mobile wheeled robots," *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 8, pp. 29-80, 2005. [In Rus]
- [11] K.S. Efreimov, V.A. Shestakov, "Investigation of basic motion maneuvers of multilink wheeled robots," In *Exhibition of Innovations-2020 (spring session)*, 2020, pp. 69-73. [In Rus]
- [12] Z. Liang, J. Yuan, "Modelling and optimisation of high-efficiency differential-drive complementary metal-oxide-semiconductor rectifier for ultra-high-frequency radio-frequency energy harvesters," *IET Power Electronics*, vol. 12, no. 3, pp. 588-597, 2019.
- [13] N. Leena, K.K. Saju, "Modelling and trajectory tracking of wheeled mobile robots," *Procedia technology*, vol. 24, pp. 538-545, 2016.
- [14] N. Seegmiller, A. Kelly, "High-fidelity yet fast dynamic models of wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on robotics*, vol. 32, no. 3, pp. 614-625, 2016.
- [15] Z. Hendzel, L. Rykala, "Modelling of dynamics of a wheeled mobile robot with mecanum wheels with the use of Lagrange equations of the second kind," *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 22, no. 1, p. 81, 2017.
- [16] D.V. Afonin, A.S. Pechurin, S.F. Yatsun, "Movement control of robotized double-wheel system on a determined trajectory," *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 11, no. 4, pp. 38-46, 2023. [In Rus]
- [17] M. Ferro et al., "A CoppeliaSim dynamic simulator for the da Vinci Research Kit," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 8, no. 1, pp. 129-136, 2022.
- [18] S.W. Nawawi et al., "Modeling and simulation of autonomous mobile robot system for collision avoidance in vr environment using simscape-multibody," *ELEKTRIKA-Journal of Electrical Engineering*, vol. 21, no. 2, pp. 33-41, 2022.
- [19] J.B. Han et al., "A modeling and simulation based on the multibody dynamics for an autonomous agricultural robot," In *2019 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCM)*. IEEE, 2019, pp. 137-143.
- [20] H.H. Mohsin, A.A. Aldair, W.A. Al-Hussaibi, *Robust Control Design for Two-Wheel Self-Balanced Mobile Robot*.

D.V. Afonin, Voronezh Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin (teormeh@inbox.ru).

A.S. Pechurin, graduate student, Southwestern State University, Kursk (alexander.pechurin@yandex.ru)

S.F. Yatsun, Southwestern State University, Kursk, Russia (teormeh@inbox.ru)