Применение неоднородной разностной схемы высокого порядка для численного анализа сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка

А.М. Буатта, С.А. Васильев, С.К. Канзитдинов, Е.В. Мукасеев

***Аннотация* — В настоящее время проблемы стохастического анализа занимают значительное место в различных областях науки и техники. Если мы пытаемся решать такие задачи сложных стохастических систем, то мы должны учитывать эффекты, связанные с флуктуациями, которые имеют место в таких системах. Причины этих флуктуаций имеют разную природу в разных системах: турбулентность в газах и жидкостях, тепловые шумы в различных материалах, радиопомехи в телекоммуникационных сетях, случайные изменения спроса и предложения на различных рынках и др., но при этом теоретические методы, применяемые для их исследования, очень схожи. На сегодняшний момент существуют различные математические методы, использующие теорию броуновского движения, теорию диффузионного процессов, теорию марковских случайных процессов и др., которые позволяют решать сложные задачи, решения которых описывают эволюцию таких систем. Целью данной работы является применение неоднородной разностной схемы высокого порядка для численного анализа начально-краевой задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка с малым параметром. Численный анализ показал, что примененная численная схема может быть использована для анализа процессов в теории массового обслуживания для моделирования нагрузки в сетях 5G/6G, статистической радиофизике, физике плазмы, теории твердого тела, магнитной гидродинамике и др.**

Статья получена 14 ноября 2023.

Буатта Мохамед Адел, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5477-8710 (adelbouatta.rudn@mail.ru).

Васильев Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, доцент кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, ORCID: 0000-0003-1562-0256 (vasilyev-sa@rudn.ru).

Канзитдинов Шахмурад Канзитдинович, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, ORCID: 0000-0002-3972-7739 (shahkanzitdinov@mail.ru).

Мукасеев Евгений Владимирович, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, ORCID:https://orcid.org/0009-0002-1808-2342 (mail@mukaseev.ru).

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН (получатель С.А.Васильев, разработка математической модели, реализация численной схемы, проведение численного анализа).

***Ключевые слова* — численный анализ уравнение Фоккера-Планка, сингулярно возмущенная задача Коши, неоднородная разностная схема высокого порядка.**

I. Введение

Исследование диффузионных процессов крайне важно, поскольку развитие сетей 5G/6G, Интернета вещей (IoT) и нейронных сетей ставит задачу использования не только аналитических, но и числленых методов исследования таких систем [4]-[5], [8]-[9], [12], [20].

Необходимо отметить, что проблема масштабирования процессов в таких системах представляет особый интерес, так как позволяет использовать имеющиеся методы анализа, которые используются в теории диффузионных процессов. Например, при изучении масштабной инвариантности во времени для таких процессов в сложных системах имеется возможность рассмотреть трансформационные свойства решений дифференциальных уравнений от параметра времени, которые описывают эволюцию таких систем. Таким образом, преобразование параметра времени является преобразованием подобия и образует группу преобразований времени для решений, которые описывают диффузионные процессы. Методы преобразования параметра времени часто связаны с использованием малого параметра в теории диффузионных процессов [6], [15].

В последнее время для численного анализа диффузионных процессов используют решения сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка, для построения которых применяются различные методы, являющиеся модификациями численных методов на неоднородных сетках [1]-[2], [7], [10]-[11], [13]-[14], [16]-[17], [21]. Например, в работах [3], [18]-[19] исследованы различные модели, описывающие решения сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка.

В данной работе был применен численный метод с использованием схемы на неоднородной сетке высокого порядка для исследования диффузионных процессов, которые описываются сингулярно возмущенным уравнением Фоккера-Планка. Была использована адаптивная кусочно-однородная сетка высокого порядка для решения начально-краевой задачи Коши для уравнения Фоккера-Планка, применение которой обеспечило более высокую точность решений и позволило снизить объем вычислений, возникающий при численном анализе решений для многомерных случаев.

II. Многомерное уравнение Фоккера-Планка

A. Многомерное уравнение Фоккера-Планка с малым параметром

Рассмотрим многомерное уравнение Фоккера-Планка

$$\varepsilon \frac{\partial w(\vec{x},t)}{\partial t} + Lw(\vec{x},t) = 0, \quad (1)$$

$$Lw(\vec{x},t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i(\vec{x},t)w(\vec{x},t)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[a_{ij}(\vec{x},t)w(\vec{x},t)\right],$$

где $w(x,t)$ - плотность вероятностей состояний, $\vec{x}(t)$ – вектор одномерных случайных функций $\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$, $\{a_i(\vec{x},t)\}_{i=1}$, $\{a_{ij}(\vec{x},t)\}_{i,j=1}$ - дрейфовые и диффузионные непрерывные функции, ε - малый параметр.

B. Двумерное уравнение Фоккера-Планка с малым параметром

Уравнение Фоккера-Планка в двумерном случае имеет вид:

$$\varepsilon \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} + Lw(x,y,t) = 0, \quad (2)$$

$$Lw(x,y,t) = a_0 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a_1(x,y,t)w(x,y,t)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a_2(x,y,t)w(x,y,t)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a_{11}(x,y,t)w(x,y,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[a_{12}(x,y,t)w(x,y,t)\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[a_{21}(x,y,t)w(x,y,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a_{22}(x,y,t)w(x,y,t)\right]\right).$$

Рассмотрим уравнение Фоккера-Планка (2) в следующем виде, которое будет в дальнейшем использовано для численного анализа:

$$\varepsilon \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} + L_{xy} w(x,y,t) = 0, \quad (3)$$

$$L_{xy} = a_0 + (\alpha_{x1}x + \alpha_{x2}y + \beta_{x1}x^2 + \beta_{x2}y^2 + \beta_{x3}xy +$$

$$+\gamma_{x1}x^3 + \gamma_{x2}x^2y + \gamma_{x3}xy^2 + \gamma_{x4}y^3)\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+(\alpha_{y1}x + \alpha_{y2}y + \beta_{y1}x^2 + \beta_{y2}y^2 + \beta_{y3}xy +$$

$$+\gamma_{y1}x^3 + \gamma_{y2}x^2y + \gamma_{y3}xy^2 + \gamma_{y4}y^3)\frac{\partial}{\partial y} -$$

$$-0.5\left(\sigma_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

где $a_0, \alpha_{\rho\mu}, \beta_{\rho\mu}, \gamma_{\mu\rho}, \sigma_\rho^2 (\rho \in \{x,y\},\ \mu = 1,2,3)$ - числовые параметры.

Исследуем следующую начально-краевую задачу Коши для уравнения Фоккера-Планка (3) в односвязной области $D = \{(x,y,t) : 0 \le x \le x_0,\ 0 \le y \le y_0,\ 0 \le t \le T\}$ с кусочно-гладкой границей Γ при $T > 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} = L_{xy} w(x,y,t), (x,y,t) \in D,\ t \in [0,T], \\ w(x,y,0) = \psi(x,y),\ (x,y) \in D \cup \Gamma, \\ w(x,y,t) = \varphi(x,y,t),\ (x,y) \in \Gamma,\ t \in [0,T], \end{cases} \quad (4)$$

где функции $\psi(x,y)$, $\varphi(x,y,t)$ являются непрерывными в области D и на границе Γ.

III. Построение неоднородной разностной схемы высокого порядка

A. Неоднородная разностная схема высокого порядка

Для решения задачи (4) мы реализуем численную схему на кусочно-неоднородной сетке высокого порядка и используем численный метод, который может обеспечить более высокую точность вычислений.

Определим кусочно-неоднородную сетку D_{xyt} и предположим, что она содержит однородные сетки для переменных x, y и кусочно-неоднородную сетку по переменной t для численной аппроксимации задачи (4) в таком таким виде:

$$D_{xyt} = \{x_i, y_j, t_n\} : (x_i = ih_x, 0,, i,, I; y_j = jh_y, 0,, j,, J;$$

$$t_n = n\tau_1, 0,, n,, N_1; t_n = n\tau_2, N_1 + 1,, n,, N),$$

где $J > 0,\ I > 0,\ N_1 > 0,\ N > 0$ положительные целые числа; $h_x,\ h_y,\ \tau_1,\ \tau_2 (\tau_1 < \tau_2)$ – числовые значения шагов по пространственным координатам и времени

$$Ih_x = x_0,\ Jh_y = y_0,\ N_1\tau_1 + (N - N_1)\tau_2 = T.$$

Численное решение задачи (4) на сетке D_{xyt} представляет собой функцию:

$$\hat{w}_h = \{w_{i,j}^n = w(x_i, y_j, t_n), 0,, i,, I, 0,, j,, J, 0,, n,, N\}.$$

Мы используем кусочно-неоднородную сетку для переменной t, где $t_0 = 0;\ t_{n-1} < t_n,\ n = \overline{1,N};\ t_N = T$,

$$\Xi_t = (t_n \mid t_n = n\tau_1,\ n = \overline{0,N_1};$$

$$t_i = t_{N_1+1} + (n - N_1)\tau_2,\ i = \overline{N_1+1, N}),$$

$$\tau_1 = \delta / N_1,\ \tau_2 = (T - \delta)/(N - N_1),\ \delta = \bar{\Theta}\varepsilon ln(\varepsilon^{-1}),$$

где значение параметра $\bar{\Theta}$ определяется аналитически с помощью асимптотических оценок решений задачи (4).

Таким образом, кусочно-однородная сетка Ξ_t имеет N_1 малых шагов τ_1 и $(N - N_1)$ больших шагов τ_2 на отрезке $[0,T]$.

Аппроксимация частных производных в этом случае имеет вид:

$$\hat{w}_x^o(x_i, y_j, t_n) = \frac{1}{2\hbar_{\ldots}}\left(\frac{\hbar_{\ldots}}{\hbar_{\ldots}}(w_{\ldots} - w_{\ldots}) + \frac{\hbar_{\ldots}}{\hbar_{\ldots}}(w_{\ldots} - w_{\ldots})\right),$$

$$\hat{w}_{\bar{x}x}(x_i, y_j, t_n) = \frac{1}{\hbar_{\ldots}}\left(\frac{w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n}{\hbar_{\ldots}} - \frac{w_{i,j}^n - w_{i-1,j}^n}{\hbar_{\ldots}}\right).$$

$$\hat{w}_y^o(x_i, y_j, t_n) = \frac{1}{2\hbar_{\ldots}}\left(\frac{\hbar_{\ldots}}{\hbar_{\ldots}}(w_{\ldots} - w_{\ldots}) + \frac{\hbar_{\ldots}}{\hbar_{\ldots}}(w_{\ldots} - w_{\ldots})\right),$$

$$\hat{w}_{\bar{y}y}(x_i, y_j, t_n) = \frac{1}{\hbar_{\ldots}}\left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j}^n}{\hbar_{\ldots}} - \frac{w_{i,j}^n - w_{i,j-1}^n}{\hbar_{\ldots}}\right).$$

$$\hat{w}_t^o(x_i, y_j, t_n) = \frac{1}{2\tilde{\ldots}}\left(\frac{\tilde{\ldots}}{\ldots}(w_{\ldots} - w_{\ldots}) + \frac{\ldots}{\tilde{\ldots}}(w_{\ldots} - w_{\ldots})\right).$$

$$h_{xi} = x_i - x_{i-1}, \hbar_{\ldots} \ldots h_{xi+1} + h_{xi}) = 0.5(x_{i+1} - x_{i-1}),$$

$$h_{yj} = y_j - y_{j-1}, \hbar_{\ldots} \ldots h_{yj+1} + h_{yj}) = 0.5(y_{j+1} - y_{j-1}),$$

$$\tilde{\ldots} \ldots \tilde{\ldots} \ldots t_{n-1}).$$

Конечно-разностная аппроксимация оператора L_{xy} имеет вид:

$$\hat{L}_{xy}w = a_0 + (\alpha_{x1}x_i + \alpha_{x2}y_j + \beta_{x1}x_i^2 + \beta_{x2}y_j^2 + \beta_{x3}x_i y_j +$$
$$\gamma_{x1}x_i^3 + \gamma_{x2}x_i^2 y_j + \gamma_{x3}x_i y_j^2 + \gamma_{x4}y_j^3)\hat{w}_x^o(x_i, y_j, t_n) +$$
$$(\alpha_{y1}x_i + \alpha_{y2}y_j + \beta_{y1}x_i^2 + \beta_{y2}y_j^2 + \gamma_y x_i y_j +$$
$$+\gamma_{y1}x_i^3 + \gamma_{y2}x_i^2 y_j + \gamma_{y3}x_i y_j^2 + \gamma_{y4}y_j^3)\hat{w}_y^o(x_i, y_j, t_n) -$$
$$-0.5\sigma_x^2\hat{w}_{\bar{x}x}(x_i, y_j, t_n) - 0.5\sigma_y^2\hat{w}_{\bar{y}y}(x_i, y_j, t_n),$$

Аппроксимация начальных условий представлена в виде: $\hat{w}_{i,j}^0 = \psi(x_i, y_j)$, $(x_i, y_j) \in D$, $\hat{w}(x_i, y_j, t_n) = \varphi(x_i, y_j, t_n)$, $(x_i, y_j) \in \Gamma$ ($i = \overline{0, I}$, $j = \overline{0, J}$, $n = \overline{0, N}$).

Таким образом, конечно-разностная аппроксимация задачи (4) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon\hat{w}_t^o(x_i, y_j, t_n) + \hat{L}_{xy}w = 0, \\ (x_i, y_j, t_n) \in D_{xyt},\ t_n \in [0, T], \\ \hat{w}_{i,j}^0 = \psi(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in D_{xyt},\ (x_i, y_j) \in \Gamma, \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ a_0 = 0,\ \alpha_{\rho\mu} = 1,\ \beta_{\rho\mu} = 1,\ \gamma_{\rho\mu} = 1,\ \sigma_\rho^2 = 0.5$$
$$(\mu = 1,2,3,\ \rho \in \{x, y\}),$$
$$\psi(x, y) = sin(\pi x)sin(\pi x),\ \varphi(x, y, t) = tx(1-x)y(1-y),$$

при $t \in [0,1]$ $(T = 1)$.

IV. Численный анализ сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка

В данном разделе представлены результаты численного анализа решений задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка с применением неоднородной разностной схемы высокого порядка (см. Рис. 1-6).

Для численного анализа использовались следующие параметры: количество шагов сетки равно $J = 10^6, I = 10^6, N_1 = 10^3, N = 10^6$, параметр $\overline{\Theta} = 0.5$, допустимая погрешность аппроксимации составляет $\delta = 10^{-6}$, значения малых параметров $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.001$.

Результаты численного анализа, представленные на Рис. 1-6, показывают, что использование неоднородной разностной схемы высокого порядка гарантирует хорошую сходимость численных решений сингулярно возмущенной задачи (5), когда малый параметр стремится к нулю, чего не может быть достигнуто на однородных сетках для данного типа задач с малым параметром.

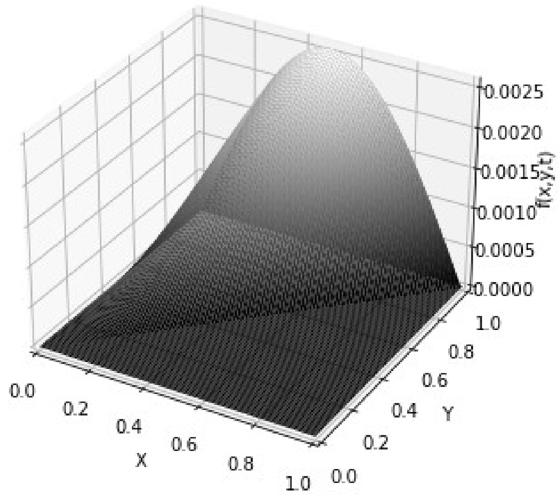

Рис.1. Численный анализ сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка ($t = 0.01, \varepsilon = 0.01$)

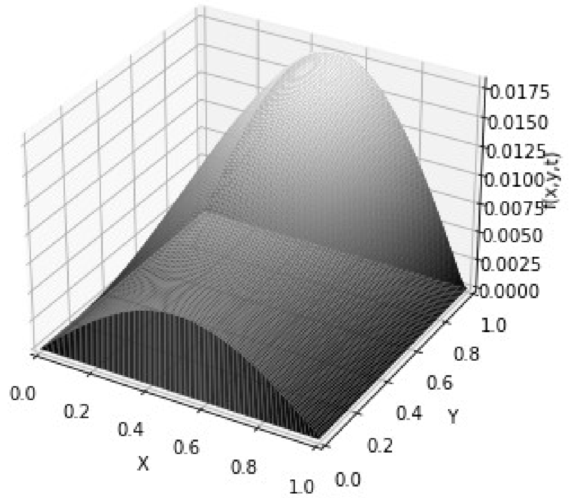

Рис.2. Численный анализ сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка ($t = 0.05, \varepsilon = 0.01$)

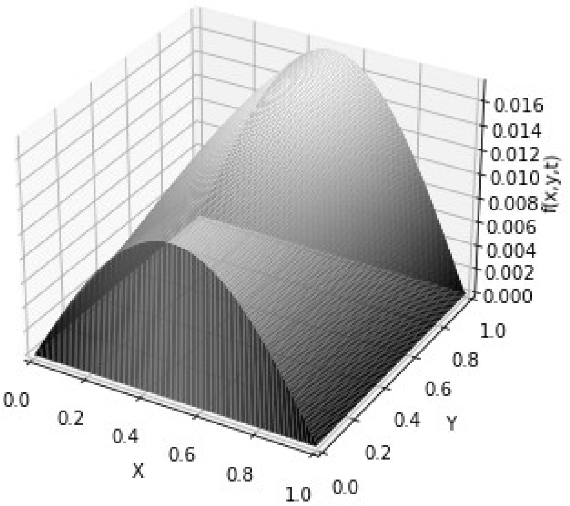

Рис.3. Численный анализ сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка ($t = 0.1, \varepsilon = 0.01$)

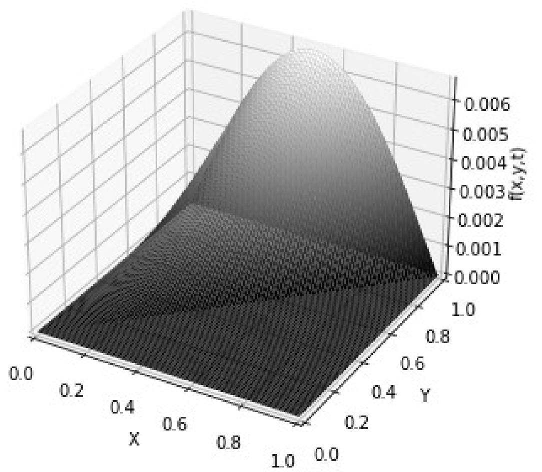

Рис.4. Численный анализ сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка ($t = 0.001, \varepsilon = 0.001$)

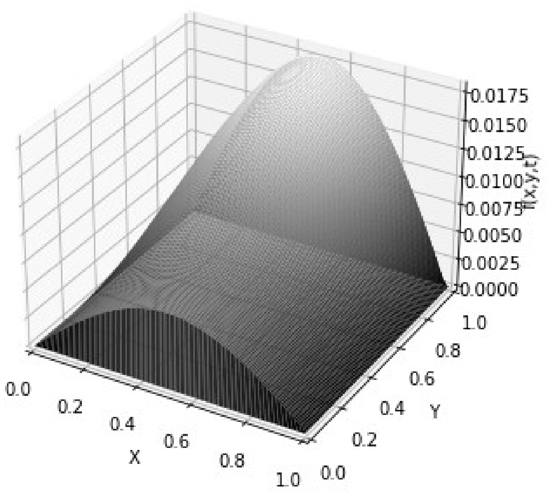

Рис.5. Численный анализ сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка ($t = 0.05, \varepsilon = 0.001$)

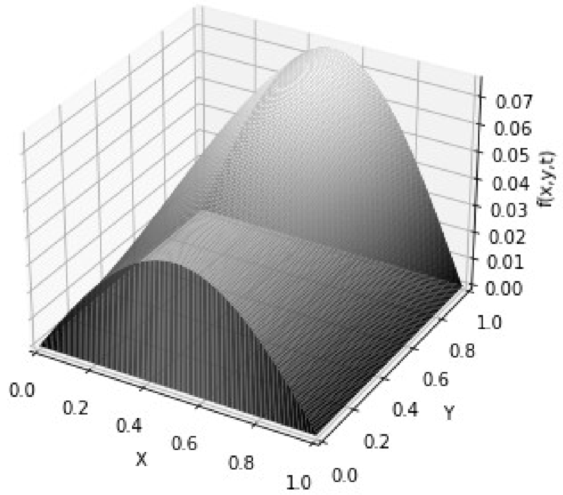

Рис.6. Численный анализ сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка ($t = 0.1, \varepsilon = 0.001$)

V. Заключение

В данной работе используется численная схема, в которой используется неоднородная разностная схема высокого порядка для исследования решений начально-краевой задачи Коши для двумерного сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка. Эта схема демонстрирует хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной задачи (5), когда малый параметр стремится к нулю.

Мы надеемся, что предложенная численная схема для многомерного сингулярно возмущенного уравнения Фоккера-Планка позволит исследовать сложные стохастические процессы в физике, химии, технике, медицине, экономике и других науках.

Благодарности

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН (получатель С.А.Васильев, разработка математической модели, реализация численной схемы, проведение численного анализа).

Библиография

[1] I. Almuslimani, N. Crouseilles, “Conservative stabilized Runge-Kutta methods for the Vlasov-Fokker-Planck equation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 488, p. 112241, 2023.

[2] A.Baddour, M.Malykh, L.Sevastianov, “On Periodic Approximate Solutions of Dynamical Systems with Quadratic Right-Hand Side,” *J Math Sci,* vol. 261, pp. 698-708, 2022.

[3] M.A. Bouatta, S.A. Vasilyev, S.I. Vinitsky, “The asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem for Fokker-Planck equation,” *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, vol. 29, no. 2, pp. 126-145, 2021.

[4] J.A. Carrillo, P.Roux, S. Solem, “Noise-driven bifurcations in a nonlinear Fokker-Planck system describing stochastic neural fields,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 449, p. 133736, 2023.

[5] E.Danilyuk, S.Moiseeva, A.Nazarov, “Asymptotic Diffusion Analysis of an Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Calls,” *In:*

Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2021. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham, vol. 1552, 2022.

[6] J.Geiser, "Operator splitting approaches of deposition of Brownian particles based on Fokker-Planck equation," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2116, no. 1, 2019.

[7] J. Hu, J.-G. Liu, Y.Xie, Z. Zhou, "A structure preserving numerical scheme for Fokker-Planck equations of neuron networks: Numerical analysis and exploration," *Journal of Computational Physics,* vol. 433, p. 110195, 2021.

[8] R. Hu, D. Zhang, X. Gu, "Reliability analysis of a class of stochastically excited nonlinear Markovian jump systems," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 155, p. 111737, 2022.

[9] R. Iwankiewicz, "Integro-differential Chapman-Kolmogorov equation for continuous-jump Markov processes and its use in problems of multi-component renewal impulse process excitations," *Probabilistic Engineering Mechanics,* vol. 26, no. 1, pp. 16-25, 2011.

[10] A. Kaushik, M. Choudhary, "A higher-order uniformly convergent defect correction method for singularly perturbed convection-diffusion problems on an adaptive mesh," *Alexandria Engineering Journal,* vol. 61, no. 12, pp. 9911-9920, 2022.

[11] H.P. Langtangen, "A general numerical solution method for Fokker-Planck equations with applications to structural reliability," *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 6, no. 1, pp. 33-48, 1991.

[12] B. Li, L. Xie, "Global dynamics and zero-diffusion limit of a parabolic-elliptic-parabolic system for ion transport networks," Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 60, p. 103304, 2021.

[13] Y. Li, C. Meredith, "Artificial neural network solver for time-dependent Fokker-Planck equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 457, p. 128185, 2023.

[14] Y. Li, Z. Wang, J. Li, J. Wang, K. Wang, "Mean-field modelling of precipitation kinetics with a Fokker-Planck equation in the Lifshitz-Slyozov-Wagner space," *Journal of Crystal Growth,* vol. 618, p. 127312, 2023.

[15] Y. Song, "Global existence and decay rates of solutions for Vlasov-Navier-Stokes-Fokker-Planck equations with magnetic field," *Mathematics Open,* vol. 2, p. 2350001, 2023.

[16] A. Tabandeh, N. Sharma, L. Iannacone, P. Gardoni, "Numerical solution of the Fokker-Planck equation using physics-based mixture models," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 399, p. 115424, 2022.

[17] K. Tang, X. Wan, Q. Liao, "Adaptive deep density approximation for Fokker-Planck equations," Journal of Computational Physics vol. 457, p. 111080, 2022.

[18] S.A. Vasilyev, M.A. Bouatta, S.K. Kanzitdinov, G.O. Tsareva, "Numerical Analysis of Shortest Queue Problem for Time-Scale Queueing System with a Small Parameter," In: *Dudin, A., Nazarov, A., Moiseev, A. (eds) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2022. Communications in Computer and Information Science*, vol. 1803, Springer, Cham, 2023.

[19] S.A. Vasilyev, M.A. Bouatta, S.K. Kanzitdinov, G.O. Tsareva, "High-Order Non-uniform Grid Scheme for Numerical Analysis of Shortest Queue Control Problem with a Small Parameter," In: *Silhavy, R., Silhavy, P. (eds) Networks and Systems in Cybernetics. CSOC 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol. 723, Springer, Cham, 2023.

[20] Yu. Wan, W. Zheng, Yi. Wang, "Identification of chloride diffusion coefficient in concrete using physics-informed neural networks," *Construction and Building Materials*, vol. 393, p. 132049, 2023.

[21] J. Zhang, X. Liu, "Uniform convergence of a weak Galerkin finite element method on Shishkin mesh for singularly perturbed convection-diffusion problems in 2D," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 432, p. 127346, 2022.

Буатта Мохамед Адел, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы", 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5477-8710,** adelbouatta.rudn@mail.ru

Васильев Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы", 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1562-0256**, vasilyev-sa@rudn.ru

Канзитдинов Шахмурад Канзитдинович, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы", 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, **ORCID:https://orcid.org/0000-0002-3972-7739**, shahkanzitdinov@mail.ru

Мукасеев Евгений Владимирович, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы", 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, **ORCID:https://orcid.org/0009-0002-1808-2342**, mail@mukaseev.ru

Using high-order non-uniform grid scheme for numerical analysis of singularly perturbed Fokker-Planck equation

A.M. Bouatta, S.A. Vasilyev, S.K.Kanzitdinov, E.V. Mukaseev

Abstract — **The problems of stochastic analysis have a significant place in various fields of science and technology at the present time. If we solve such problems, we must take into account fluctuation effects. The causes of these fluctuations are different in these problems. The problems, which may relate to the study such such as turbulence of gaseous and liquid substances, thermal noise in materials, noise immunity in telecommunication networks, but the methods of their theoretical research are very similar. There are mathematical methods using the theory of Brownian motion, the theory of diffusion-type processes and the theory of Markov random processes, which makes it possible to solve complex problems of these types at the present time. The aim of this work is numerical analysis of solutions of the singularly perturbed Fokker-Planck equation on a high-order non-uniform grid scheme of various problems with a small parameter. These problems can be solved on the basis of the generalized theory of Brownian motion. Numerical examples demonstrated that applied numerical scheme can be used to analyze processes in queuing theory for 5G/6G network modeling, statistical radiophysics, plasma physics, solid state theory, magnetohydrodynamics, etc.**

Keywords — **numerical analysis, large-scale network analysis, Fokker-Planck equation, singular perturbation, layer-adapted piecewise uniform Shishkin-type meshes.**

ACKNOWLEDGMENT

This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program (recipient S.A. Vasilyev, mathematical model development, simulation model development, numerical analysis).

REFERENCES

[1] I. Almuslimani, N. Crouseilles, “Conservative stabilized Runge-Kutta methods for the Vlasov-Fokker-Planck equation,” Journal of Computational Physics, vol. 488, p. 112241, 2023.

[2] A.Baddour, M.Malykh, L.Sevastianov, “On Periodic Approximate Solutions of Dynamical Systems with Quadratic Right-Hand Side,” J Math Sci, vol. 261, pp. 698-708, 2022.

[3] M.A. Bouatta, S.A. Vasilyev, S.I. Vinitsky, “The asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem for Fokker-Planck equation,” Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science, vol. 29, no. 2, pp. 126-145, 2021.

[4] J.A. Carrillo, P.Roux, S. Solem, “Noise-driven bifurcations in a nonlinear Fokker-Planck system describing stochastic neural fields,” Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 449, p. 133736, 2023.

[5] E.Danilyuk, S.Moiseeva, A.Nazarov, “Asymptotic Diffusion Analysis of an Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Calls,” In: Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2021. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham, vol. 1552, 2022.

[6] J.Geiser, “Operator splitting approaches of deposition of Brownian particles based on Fokker-Planck equation,” AIP Conference Proceedings, vol. 2116, no. 1, 2019.

[7] J. Hu, J.-G. Liu, Y.Xie, Z. Zhou, “A structure preserving numerical scheme for Fokker-Planck equations of neuron networks: Numerical analysis and exploration,” Journal of Computational Physics, vol. 433, p. 110195, 2021.

[8] R. Hu, D. Zhang, X. Gu, “Reliability analysis of a class of stochastically excited nonlinear Markovian jump systems,” Chaos, Solitons & Fractals, vol. 155, p. 111737, 2022.

[9] R. Iwankiewicz, “Integro-differential Chapman-Kolmogorov equation for continuous-jump Markov processes and its use in problems of multi-component renewal impulse process excitations,” Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 26, no. 1, pp. 16-25, 2011.

[10] A. Kaushik, M. Choudhary, “A higher-order uniformly convergent defect correction method for singularly perturbed convection-diffusion problems on an adaptive mesh,” Alexandria Engineering Journal, vol. 61, no. 12, pp. 9911-9920, 2022.

[11] H.P. Langtangen, “A general numerical solution method for Fokker-Planck equations with applications to structural reliability,” Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 6, no. 1, pp. 33-48, 1991.

[12] B. Li, L. Xie, “Global dynamics and zero-diffusion limit of a parabolic-elliptic-parabolic system for ion transport networks,” Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 60, p. 103304, 2021.

[13] Y. Li, C. Meredith, “Artificial neural network solver for time-dependent Fokker-Planck equations,” Applied Mathematics and Computation, vol. 457, p. 128185, 2023.

[14] Y. Li, Z. Wang, J. Li, J. Wang, K. Wang, “Mean-field modelling of precipitation kinetics with a Fokker-Planck equation in the Lifshitz-Slyozov-Wagner space,” Journal of Crystal Growth, vol. 618, p. 127312, 2023.

[15] Y. Song, “Global existence and decay rates of solutions for Vlasov-Navier-Stokes-Fokker-Planck equations with magnetic field,” Mathematics Open, vol. 2, p. 2350001, 2023.

[16] A. Tabandeh, N. Sharma, L. Iannacone, P. Gardoni, “Numerical solution of the Fokker-Planck equation using physics-based mixture models,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 399, p. 115424, 2022.

[17] K. Tang, X. Wan, Q. Liao, “Adaptive deep density approximation for Fokker-Planck equations,” Journal of Computational Physics vol. 457, p. 111080, 2022.

[18] S.A. Vasilyev, M.A. Bouatta, S.K. Kanzitdinov, G.O. Tsareva, “Numerical Analysis of Shortest Queue Problem for Time-Scale Queueing System with a Small Parameter,” In: Dudin, A., Nazarov, A., Moiseev, A. (eds) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2022. Communications in Computer and Information Science, vol. 1803, Springer, Cham, 2023.

[19] S.A. Vasilyev, M.A. Bouatta, S.K. Kanzitdinov, G.O. Tsareva, “High-Order Non-uniform Grid Scheme for Numerical Analysis of Shortest Queue Control Problem with a Small Parameter,” In: Silhavy, R., Silhavy, P. (eds) Networks and Systems in Cybernetics. CSOC 2023. Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 723, Springer, Cham, 2023.

[20] Yu. Wan, W. Zheng, Yi. Wang, “Identification of chloride diffusion coefficient in concrete using physics-informed neural networks,” Construction and Building Materials, vol. 393, p. 132049, 2023.

[21] J. Zhang, X. Liu, “Uniform convergence of a weak Galerkin finite element method on Shishkin mesh for singularly perturbed convection-diffusion problems in 2D,” Applied Mathematics and Computation, vol. 432, p. 127346, 2022.

Bouatta Mohamed Adel, Postgraduate Student, Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 117198, Moscow, Miklukho-Maklaya str.6, ORCID: ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5477-8710, adelbouatta.rudn@mail.ru

Vasilyev Sergey, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 117198, Moscow, Miklukho-Maklaya str.6, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1562-0256, vasilyev-sa@rudn.ru

Kanzitdinov Shakhmurad Kanzitdinovich, Postgraduate Student, Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 117198, Moscow, Miklukho-Maklaya str.6, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3972-7739, shahkanzitdinov@mail.ru

Mukaseev Evgenii Vladimirovich, Postgraduate Student, Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 117198, Moscow, Miklukho-Maklaya str.6, ORCID:https://orcid.org/0009-0002-1808-2342, mail@mukaseev.ru