

# Модель прогнозирования интуиционистских нечетких временных рядов с использованием распределения отношений

Нгуен Тхи Тху Зунг, Л.В. Черненькая

**Аннотация**—Моделирование прогнозирования временных рядов является областью интенсивных исследований и разработок. В настоящее время применение нечеткой логики к моделям прогнозирования временных рядов привлекло большое внимание и получило широкое развитие. В то же время интуиционистская модель нечетких временных рядов является не только новым подходом, но и демонстрирует высокую эффективность прогнозирования при учете недетерминизма. В данной работе предлагается модифицированная модель прогнозирования интуиционистских нечетких временных рядов, основанная на оптимизации дискретизации на основе определения оптимального соотношения с помощью алгоритма распределения. Модель применена в задаче прогнозирования реального временного ряда, получившего из исторических данных в Университете Алабамы с 1971 по 1992 год. Среднеквадратичные ошибки (MSE) полученных результатов прогнозирования представлены. Превосходство предложенной модели продемонстрировано при сравнении с существующими моделями.

**Ключевые слова**—прогнозирование, интуиционистское нечеткое множество, построение интуиционистских нечетких множеств, на основе распределения, на основе отношений, оценочная функция.

## I. ВВЕДЕНИЕ

В различных областях науки и техники изучение алгоритмов, а также методов все чаще требует проведения моделирования, наиболее близкого к реальности [1], [2]. В классической теории множеств принадлежность элементов к множеству оценивается бинарно в соответствии с явным условием — элемент либо принадлежит, либо не принадлежит множеству. Однако в действительности элементы почти не имеют явного отношения к принадлежности или не принадлежности к какому-то еще множеству. Для преодоления этого недостатка целесообразно использовать новый подход, который приносит хорошие практические результаты и продолжает развиваться, - подход теории нечетких множеств профессора Заде,

предложенный в 1965 г. [3]. Эта работа легла в основу нового направления, называемого теорией нечетких множеств, которое принято исследователями и активно развивается. Среди работ можно выделить модель прогнозирования нечетких временных рядов, впервые предложенную Сонгом и Чиссомом ([4]–[6]) на основе модели прогнозирования временных рядов Бокса и Дженкинса [7]. Теория, которая разработана для повышения эффективности и соответствия практике, — это интуитивная нечеткая теория, предложенная К.Т. Атанасовым [8], [9]. Поскольку интуиционистские системы нечеткого вывода работают со значениями недетерминизма, они позволяют получить более точные результаты прогнозирования, чем классические системы нечеткого вывода [10].

Кроме того, построению моделей прогнозирования для интуиционистских нечетких временных рядов также уделяется большое внимание, и получены положительные результаты. В работах [11], [12] использована концепция, предложенная в работе [13] для построения интуиционистского нечеткого множества в интуиционистско-нечетком прогнозировании временных рядов. В работе [12] назначаются нечеткие множества по максимальному уровню членства с использованием матрицы минимакс для решения нечеткой задачи. В дополнение к этому, в работе [14] совершенствуется модель с помощью применения модели высокого порядка, которая использует деление длины на основе среднего [15], [16]. Кроме того, утилизируются группы нечетких отношений в дефаззификации, как и в работах [16]–[18]. В работе [19] применена дефаззификация с весом, при этом вес последнего числа будет самым большим. В работе [7] авторы используют “fminbnd” как функцию для оптимизации сегментов для наименьшего MSE. В работе [20] сравниваются длины сегментов, включая: 1000, 500, 333 соответственно, с количеством сегментов 7, 14, 21, и результат этого метода показывает, что MSE из 21 сегмента является оптимальным. Работа [21] относится к прогнозируемым ежедневным случаям смерти от COVID-2019 в Индии. В работе [22] упоминаются некоторые ограничения метода Джурюи в работе [13] и предлагается новый метод построения интуиционистских нечетких множеств из нечетких множеств. Существует и другое направление. Так, в работе [23] демонстрируется интуиционистский подход к нечетким функциям временных рядов с использованием интуиционистского нечеткого

Статья получена 13 сентября 2023.

Нгуен Тхи Тху Зунг, аспирантка, Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого (e-mail: thudung.mta.tb@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9206-5968>).

Черненькая Людмила Васильевна, д-р техн. наук, проф., Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого (e-mail: ludmila@qmd.spbstu.ru).

алгоритма с-средних, а входная матрица содержит нелинейные преобразования значений, не принадлежащих членству, а также значений принадлежности. В свою очередь, в работе [24] выдвигается новая интуиционистская нечеткая модель прогнозирования временных рядов, включающая два основных аспекта: интуиционистский FCM для фазификации, отношения между входными и выходными данными задаются либо линейным, либо нелинейным образом с использованием каскадной прямой нейронной сети. Кроме того, в других работах показано, что авторы также эффективно применяют интуитивную нечеткую теорию к моделям прогнозирования временных рядов.

В данной статье предлагается модифицированная модель прогнозирования интуиционистских нечетких временных рядов, основанная на оптимизации дискретизации по оптимальному соотношению. В предлагаемой модели реализован алгоритм распределения для определения оптимального соотношения, которое затем используется для разделения дискурсивной вселенной на интервалы наиболее оптимальным образом. Эффективность предложенной модели для прогнозирования оценивается на практике исторических данных приема в Университет Алабамы с 1971 по 1992 год.

Структура статьи разделена на 5 разделов. Теоретические основы и предложенная модель представлены в разделах 2 и 3, соответственно. Результаты эксперимента и анализ приведены в разделе 4. В разделе 5 представлены выводы по работе.

## II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

### A. Основы теории нечеткого множества и интуиционистского нечеткого множества

**Определение 1.** Пусть  $A_F$  является нечетким множеством на  $X$ , при  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  является конечным эталонным набором. Тогда  $A_F$  определяется следующим образом:

$$A_F = \left\{ \left( x, \mu_{A_F}(x) \right) \mid x \in X \right\},$$

где  $\mu_{A_F} : X \rightarrow [0, 1]$  - степень принадлежности элемента  $x$  в нечетком множестве  $A_F$ , для каждого  $x \in X$ .

**Определение 2.** Пусть  $A_I$  - интуиционистское нечеткое множество в универсуме дискурса  $X$ . Тогда  $A_I$  определяется следующим образом:

$$A_I = \left\{ \left( x, \mu_{A_I}(x), \nu_{A_I}(x) \right) \mid x \in X \right\},$$

где  $\mu_{A_I} : X \rightarrow [0, 1]$  и  $\nu_{A_I} : X \rightarrow [0, 1]$  определяют степень принадлежности и непринадлежности элемента  $x$  к интуиционистскому нечеткому множеству  $A_I$  соответственно, для каждого  $x \in X$ .

При этом интуиционистский индекс или степень неопределенности элемента  $x$  определяется следующим образом:

$$\pi_{A_I}(x) = 1 - \mu_{A_I}(x) - \nu_{A_I}(x).$$

### B. Построение интуиционистских нечетких множеств из нечетких множеств

Метод построения интуиционистских нечетких множеств Антанасова из нечетких множеств, предложенный Джурио и др. [13], описывается через следующие определения.

**Определение 3.** Пусть отображение  $f : [0, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow L$ , заданное формулой  $f(x, y, \delta) = f_\mu(x, y, \delta), f_\nu(x, y, \delta)$ , где  $f_\mu(x, y, \delta) = x(1 - y\delta)$ ;  $f_\nu(x, y, \delta) = 1 - x(1 - y\delta) - y\delta$ .

Тогда  $L = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x + y \leq 1\}$  удовлетворяет следующим условиям:

1. Если  $y_1 \leq y_2$  тогда  $\pi(f(x, y_1, \delta)) \leq \pi(f(x, y_2, \delta))$  для всех  $x, \delta \in [0, 1]$ ;
2.  $f_\mu(x, y, \delta) \leq x \leq 1 - f_\nu(x, y, \delta)$  для всех  $x \in [0, 1]$ ;
3.  $f(x, 0, \delta) = (x, 1 - x)$ ;
4.  $f(0, y, \delta) = (0, 1 - y\delta)$ ;
5.  $f(x, y, 0) = (x, 1 - x)$ ;
6.  $\pi(f(x, y, \delta)) = y\delta$ .

**Определение 4.** Пусть  $A_F$  является одним из нечетких множеств над  $X$ ;  $\pi, \delta$  - два отображения:  $\pi, \delta : X \rightarrow [0, 1]$ . Тогда интуиционистское нечеткое множество, соответствующее нечеткому множеству  $A_F$  (по определению 1), определяется следующим образом:

$$A_I = \left\{ \left( x_i, f \left( \mu_{A_F}(x_i), \pi(x_i), \delta(x_i) \right) \right) \mid x_i \in X \right\}.$$

### C. Функция оценки

Интуиционистское нечеткое число и функция оценки, представленные Сюй и Ягером [25], [26], определены следующим образом:

**Определение 5.** Если  $A_I = \{(x, \mu_I(x), \nu_I(x)) \mid x \in X\}$  является интуиционистским нечетким множеством, тогда  $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$  называется интуиционистским нечетким числом, где  $\mu_\alpha \in [0, 1]$ ,  $\nu_\alpha \in [0, 1]$ ,  $\mu_\alpha + \nu_\alpha \leq 1$ . Тогда для двух интуиционистских нечетких чисел  $A_{I1}$  и  $A_{I2}$  справедливы следующие соотношения:

1.  $A_{I1} = A_{I2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{A_{I1}}(x) = \mu_{A_{I2}}(x) \\ \nu_{A_{I1}}(x) = \nu_{A_{I2}}(x) \end{cases}$ ;
2.  $A_{I1} \leq A_{I2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{A_{I1}}(x) \leq \mu_{A_{I2}}(x) \\ \nu_{A_{I1}}(x) \geq \nu_{A_{I2}}(x) \end{cases}$ .

**Определение 6.** Для любого интуиционистского нечеткого числа  $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$  оценка  $\alpha$  непосредственно связана с разницей между степенью принадлежности и степенью непринадлежности. Тогда функция оценки  $S$  определяет оценку  $\alpha$  следующим образом:

$$S(\alpha) = \mu_\alpha - \nu_\alpha, \text{ где } S(\alpha) \in [-1, 1].$$

### D. Метод на основе отношений распределения

Метод декомпозиции, объединяющий распределение на

основе отношения, выполняется в соответствии со следующими шагами:

**Алгоритм 1.** Определить значения отношения.

Отношение — это величина, которая измеряет отношение разности одного значения к другому, рассчитывается следующим образом:

$$r = \frac{|x_t - x_{t-1}|}{x_t} \cdot 100\%,$$

где  $x_t$  и  $x_{t-1}$  - два последовательных наблюдения во временном интервале  $t$  и  $t-1$ , соответственно, во временном ряду.

**Алгоритм 2.** Метод на основе распределения

Предположим, что имеется набор  $\{x_i\}, i = \overline{1, n}$  из  $n$  элементов  $x$ , отсортированных в порядке возрастания. Цель данного алгоритма заключается в определении значения отношения, наиболее близкого к остальным значениям. Это значение определяется по следующей формуле:

$$x_{opt} = \left\{ x^* \in \{x_i\} \mid x_j < x^* < x_{j'}; j < \frac{n}{2}; j' > \frac{n+1}{2}; i, j, j' = \overline{1, n} \right\}.$$

### III. ПРЕДЛАГАЕМАЯ МОДЕЛЬ

В данном разделе предлагается модель прогнозирования интуиционистских нечетких временных рядов на основе оптимизации дискретизации с помощью оптимального отношения. Данная модель использует метод, основанный на основе распределения, для определения значения соотношения, а затем найденное значение используется для разделения универсума дискурса на интервалы наиболее оптимальным образом.

Процесс реализации предлагаемой модели показан на схеме 1. Пошаговая процедура предлагаемой модели представлена следующим образом:

#### Шаг 1. Дискретизация.

Первый шаг состоит в том, чтобы выполнить задачу разделения универсума дискурса на интервалы.

##### Шаг 1.1. Определить значения отношения.

На шаге 1.1, вычисляются значения отношений для каждой пары последовательных наблюдений в интервале времени  $t$  и  $t-1$  по алгоритму 1.

##### Шаг 1.2. Определить оптимальное отношение.

Значения отношения, рассчитанные на шаге 1.1, введены как набор входных точек для нахождения оптимального значения  $r^*$  по алгоритму 2.

##### Шаг 1.3. Дискредитировать универсум дискурса.

Разделенные интервалы рассчитываются следующим образом:

Во-первых, необходимо определить следующие значения:

$$(a, b) = \text{rounddown}(\min(x_t), \text{for all } t) \times 10^{-z};$$

$$(c, d) = \text{roundup}(\max(x_t), \text{for all } t) \times 10^{-z};$$

Затем определяется универсум дискурса  $U$ :

$$U = [U_{\min}, U_{\max}], \quad \text{где} \quad U_{\min} = a \times 10^z + b \times 10^{z-1};$$

$$U_{\max} = c \times 10^z + d \times 10^{z-1};$$

Во-вторых, значения точки отсечки определяются через выражение:

$$upper_j = (1 + r^*)^j \times upper_0;$$

Тогда  $U$  разбивается на интервалы:  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ,

где  $u_j = [upper_{j-1}, upper_j], j \in [1, n]$ .

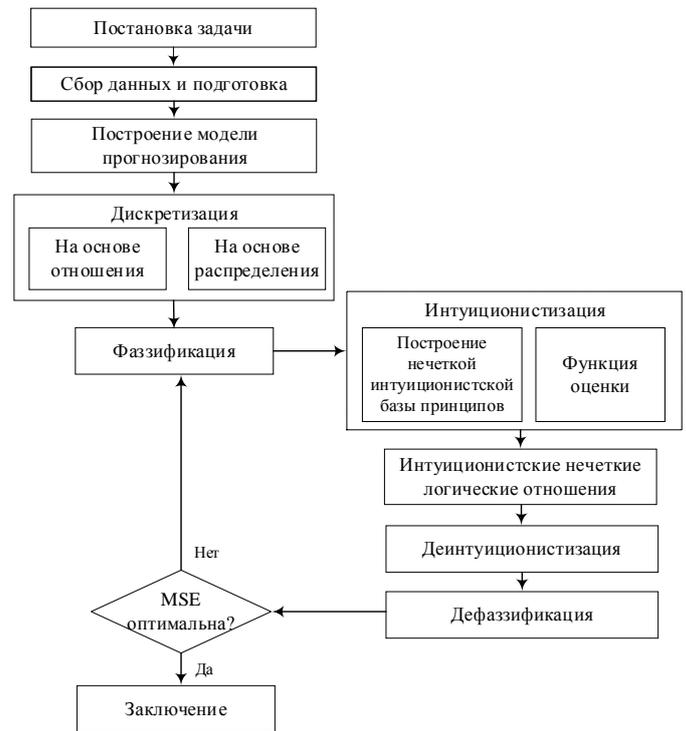


Схема 1. Блок-схема процесса реализации предлагаемой модели

#### Шаг 2. Фаззификация.

На данном шаге осуществляется фаззификация путем построения треугольных нечетких множеств  $A_{F_i}$  в соответствии с интервалами, построенными на первом шаге. После этого необходимо расположить значения наблюдений в соответствующие нечеткие множества.

#### Шаг 3. Интуиционистизация.

На этапе интуиционистизации процесс завершается двумя подэтапами, а именно: построение интуиционистских нечетких множеств из нечетких множеств и сравнение значений оценок. В частности, следующим образом:

##### Шаг 3.1. Построение интуиционистских нечетких множеств из нечетких множеств.

Используя определение 3-4, строятся соответствующие интуиционистские нечеткие множества  $A_{I_i}$  нечетких множеств  $A_{F_i}$ .

##### Шаг 3.2. Функция оценки.

По результатам подэтапа 3.1 наблюдения в каждый момент ряда упорядочиваются в интуиционистские нечеткие множества путем сравнения значений оценки (определение 6). Значения наблюдений  $x_i$  размещаются в интуиционистском нечетком множестве  $A_{I_i}$ , если его значение оценки в интуиционистском нечетком множестве  $A_{I_i}$  является максимальным.

#### Шаг 4. Интуиционистские нечеткие логические отношения.

На шаге 4 устанавливаются интуиционистские нечеткие

логические отношения и строятся группы интуиционистских нечетких логических отношений.

#### Шаг 5. Деинтуиционистизация и дефаззификация.

Основной задачей данного шага является вычисление прогнозируемого значения.

Эффективность прогностической ценности модели в данной работе оценивается путем рассмотрения сходства прогнозируемого значения с фактическим значением через значение MSE.

### IV. ЭКСПЕРИМЕНТ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

#### A. Эксперимент

Предложенная модель применена в задаче прогнозирования реальных исторические данные о зачислении в университет Алабамы с 1971 по 1992 год (таблица 1).

##### Шаг 1.1. Определить значения отношения.

В таблице 1 исторические данные с 1971 по 1992 год включают 22 значения, поэтому между ними получается 21 значение отношения. Значения отношения, рассчитанных для каждой пары последовательных наблюдений, показаны в таблице 1.

Таблица 1. Исторические данные и значения отношений

Годы	Зачисления	Отношение (%)
1971	13055	-
1972	13563	3.8912
1973	13867	2.2414
1974	14696	5.9782
1975	15460	5.1987
1976	15311	0.9638
1977	15603	1.9071
1978	15861	1.6535
1979	16807	5.9643
1980	16919	0.6664
1981	16388	3.1385
1982	15433	5.8274
1983	15497	0.4147
1984	15145	2.2714
1985	15163	0.1189
1986	15984	5.4145
1987	16859	5.4742
1988	18150	7.6576
1989	18970	4.5179
1990	19328	1.8872
1991	19337	0.0466
1992	18876	2.3840

**Шаг 1.2.** Определить оптимальное отношение. По алгоритму 2 оптимальное отношение составляет  $r^* = r_{21} = 2.38\%$ .

**Шаг 1.3.** Определить универсум дискурса и разделенные интервалы.

Во-первых, определены значения  $a, b, c, d$ .

$$(a, b) = \text{rounddown}(\min(x_t), \text{for all } t) \times 10^{-z} = (1, 3);$$

$$(c, d) = \text{roundup}(\max(x_t), \text{for all } t) \times 10^{-z} = (2, 0).$$

Тогда универсум дискурса дискретен:

$$U = [13000, 20000].$$

Во-вторых, значения точки отсечки определяются следующим образом:

$$upper_j = (1 + 2.38)^j \times upper_0; \quad upper_0 = 13000.$$

Таким образом, универсум дискурса  $U$  разбивается на интервалы:  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{18}\}$ , где верхняя и нижняя границы интервалов показаны в таблице 2 с соответствующими средними значениями  $m = \{m_1, m_2, \dots, m_{18}\}$ .

Таблица 2. Границы разделенного универсума дискурса

Интервалы	Верхние границы	Нижние границы
$u_1$	13000	13309
$u_2$	13309	13626
$u_3$	13626	13950
$u_4$	13950	14282
$u_5$	14282	14622
$u_6$	14622	14970
$u_7$	14970	15327
$u_8$	15327	15691
$u_9$	15691	16065
$u_{10}$	16065	16447
$u_{11}$	16447	16839
$u_{12}$	16839	17240
$u_{13}$	17240	17650
$u_{14}$	17650	18070
$u_{15}$	18070	18500
$u_{16}$	18500	18940
$u_{17}$	18940	19391
$u_{18}$	19391	19853

#### Шаг 2. Фаззификация.

Установить значения наблюдений с 1971 по 1992 год как от  $x_1$  до  $x_{22}$ . Затем расположить значения наблюдений в соответствующих нечетких множествах следующим образом:

$$A_{F_1} = \{(x_1, 0.178), (x_2, 0.199)\};$$

$$A_{F_2} = \{(x_2, 0.801), (x_3, 0.257)\};$$

$$A_{F_3} = \{(x_3, 0.743)\}; \quad A_{F_4} = \{\emptyset\}; \quad A_{F_5} = \{(x_4, 0.789)\};$$

...

$$A_{F_{16}} = \{(x_{19}, 0.934), (x_{20}, 0.140), (x_{21}, 0.120), (x_{22}, 0.854)\};$$

$$A_{F_{17}} = \{(x_{19}, 0.066), (x_{20}, 0.860), (x_{21}, 0.880)\};$$

$$A_{F_{18}} = \{\emptyset\}.$$

#### Шаг 3. Интуиционистизация.

**Шаг 3.1.** Построение интуиционистских нечетких множеств из нечетких множеств. Соответствующие построенные интуиционистские нечеткие множества

$A_{I_i}$  из множеств  $A_{F_i}$  имеют следующий вид:

$$A_{I_1} = \{(x_1, 0.171, 0.793), (x_2, 0.192, 0.793)\};$$

$$A_{I_2} = \{(x_2, 0.636, 0.158), (x_3, 0.204, 0.590)\};$$

$$A_{I_3} = \{(x_3, 0.333, 0.115)\};$$

$$A_{I_4} = \{\emptyset\};$$

$$A_{I_5} = \{(x_4, 0.298, 0.080)\};$$

...

$$A_{I_{16}} = \{(x_{19}, 0.829, 0.059), (x_{20}, 0.124, 0.764), (x_{21}, 0.106, 0.782), (x_{22}, 0.759, 0.130)\};$$

$$A_{I_{17}} = \{(x_{19}, 0.062, 0.880), (x_{20}, 0.810, 0.132), (x_{21}, 0.829, 0.113)\};$$

$$A_{F_{18}} = \{\emptyset\}.$$

**Шаг 3.3.** Функция оценки.

Наблюдение в каждый момента временного ряда организовано в интуиционистские нечеткие множества путем сравнения значений оценок, как показано в таблице 3.

Таблица 3. Организация наблюдений в интуиционистских нечетких множествах

$x_i$	IFSs <sup>1</sup>	$x_i$	IFSs
$x_1$	$A_{I_1}$	$x_{12}$	$A_{I_7}$
$x_2$	$A_{I_2}$	$x_{13}$	$A_{I_7}$
$x_3$	$A_{I_3}$	$x_{14}$	$A_{I_6}$
$x_4$	$A_{I_5}$	$x_{15}$	$A_{I_7}$
$x_5$	$A_{I_7}$	$x_{16}$	$A_{I_9}$
$x_6$	$A_{I_7}$	$x_{17}$	$A_{I_{11}}$
$x_7$	$A_{I_8}$	$x_{18}$	$A_{I_{14}}$
$x_8$	$A_{I_8}$	$x_{19}$	$A_{I_{16}}$
$x_9$	$A_{I_{11}}$	$x_{20}$	$A_{I_{17}}$
$x_{10}$	$A_{I_{11}}$	$x_{21}$	$A_{I_{17}}$
$x_{11}$	$A_{I_{10}}$	$x_{22}$	$A_{I_{16}}$

**Шаг 4.** Интуиционистские нечеткие логические отношения.

Интуиционистские нечеткие логические отношения установлены, группы интуиционистских нечетких логических отношений построены и показаны в таблице 4.

**Шаг 5.** Деинтуиционистизация и дефаззификация.

Как описаны выше, на данном шаге проведен процесс деинтуиционистизации и дефаззификации для расчета прогнозируемых значений на основе результатов проведенных предыдущих шагов.

Для уяснения процесса расчета, рассматривается пример для значений в 1980 года. Как видно из таблицы 3, фактические значения в 1979 году принадлежат интуиционистскому нечеткому множеству  $A_{I_{11}}$ , и из таблицы 4,  $A_{I_{11}}$  принадлежит группе 10 с нечеткими

отношениями:  $A_{I_{11}} \rightarrow A_{I_{10}}, A_{I_{11}}, A_{I_{14}}$ . Тогда

прогнозируемое значение [1980] составляет  $\frac{m_{10} + m_{11} + m_{14}}{3} = 17119$ .

Остальные прогнозные значения рассчитываются аналогично и результаты прогнозирования представлены в таблице 5.

Таблица 4. Группы интуиционистских нечетких логических отношений

Группы	IFLRs <sup>2</sup>
Группа 1	$A_{I_1} \rightarrow A_{I_2}$
Группа 2	$A_{I_2} \rightarrow A_{I_3}$
Группа 3	$A_{I_3} \rightarrow A_{I_5}$
Группа 4	$A_{I_5} \rightarrow A_{I_7}$
Группа 5	$A_{I_6} \rightarrow A_{I_7}$
Группа 6	$A_{I_7} \rightarrow A_{I_6}, A_{I_7}^2, A_{I_8}, A_{I_9}^3$
Группа 7	$A_{I_8} \rightarrow A_{I_8}, A_{I_{11}}$
Группа 8	$A_{I_9} \rightarrow A_{I_{11}}$
Группа 9	$A_{I_{10}} \rightarrow A_{I_7}$
Группа 10	$A_{I_{11}} \rightarrow A_{I_{10}}, A_{I_{11}}, A_{I_{14}}$
Группа 11	$A_{I_{14}} \rightarrow A_{I_6}$
Группа 12	$A_{I_{16}} \rightarrow A_{I_{17}}$
Группа 13	$A_{I_{17}} \rightarrow A_{I_{16}}, A_{I_{17}}$

Таблица 5. Прогнозные значения

Годы	Фактические значения	Прогнозируемые значения
1971	13055	-
1972	13563	13626
1973	13867	13950
1974	14696	14622
1975	15460	15327
1976	15311	15476
1977	15603	15476
1978	15861	16265
1979	16807	16265
1980	16919	17119
1981	16388	17119
1982	15433	15327
1983	15497	15476
1984	15145	15476
1985	15163	15327
1986	15984	15476
1987	16859	16839
1988	18150	17119
1989	18970	18940
1990	19328	19391
1991	19337	19166
1992	18876	19166

<sup>2</sup> IFLRs - Интуиционистские нечеткие логические отношения

<sup>3</sup> Степени 2 представляет количество повторений нечеткой отношения

<sup>1</sup> IFSs - Интуиционистские нечеткие множества

### В. Анализ результатов прогнозирования

Сходство фактических значений и прогнозных значений по предложенной модели изображено на рис. 1. Видно, что прогнозные и фактические значения для каждого года достаточно близки друг к другу, средняя разница составляет 1,51%.

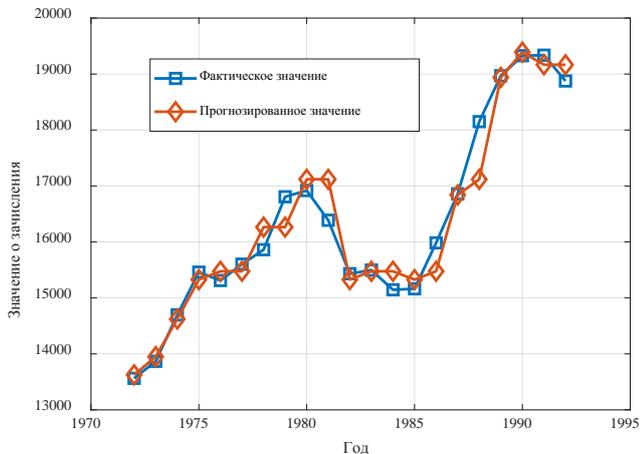


Рис 1. Сравнение фактических и прогнозных значений

Для сравнения прогнозируемых результатов предложенной модели с другими известными моделями использована среднеквадратическая ошибка (MSE) для оценки близости прогнозируемых значений к фактическим значениям. Значение среднеквадратической ошибки рассчитывается по следующей формуле:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{n}$$

Значение MSE, полученное при применении предложенной модели, составляет 128404. Значение MSE низкое, что показывает, что близость прогнозируемого значения и фактического значения высока.

Таблица 6. Сравнение результатов с существующими методами

Методы	MSE
В работе [5]	412499
В работе [6]	775687
В работе [27]	386055
В работе [28]	407507
В работе [29]	228918
В работе [30]	192086
В работе [31]	278919
В работе [32]	227194
В работе [33]	261458
В работе [34]	226611
В работе [12]	243601
В работе [11]	188145
В работе [35]	134923
В работе [36]	133700
В работе [21]	128520
<b>Предлагаемая модель</b>	<b>128404</b>

В таблице 6 показано сравнение значений MSE, полученных при применении известных моделей и

предложенной модели. Как показано в таблице 6, предложенная модель лучше, чем известные модели.

### V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена модифицированная интуиционистская нечеткая модель прогнозирования временных рядов, построенная на основе применения оптимального значения отношения в дискретизации универсума дискурса. Модель протестирована для прогнозирования на основе исторических данных о зачислении в Университет Алабамы. При применении предложенной модели прогнозные и фактические значения для каждого года достаточно близки друг к другу, средняя разница составляет 1,51%. Результаты оценены на близость между прогнозируемым значением и фактическим значением по среднеквадратической ошибке (MSE).

Предложенная интуиционистская модель прогнозирования нечетких временных рядов показывает лучшие результаты, чем обычная модель нечетких временных рядов, поскольку она учитывает недетерминизм, который обычно имеет место.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаем благодарность учёным и исследователям в рассматриваемой области, выстроившим эффективное направление прогнозирования временных рядов, что является важной основой для новых улучшений в этой работе.

### БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Н. Т. Т. Зунг, Черненькая Л.В. “Системный анализ в управлении развитием территориальных комплексов Вьетнама,” в сборнике: *Системный анализ в проектировании и управлении. сборник научных трудов XXV Международной научной и учебно-практической конференции*, СПб, 2021, pp. 346–352.
- [2] Н. Т. Т. Зунг, Черненькая Л.В. “Модели для анализа развития экономики нескольких районов Вьетнама на основе математических методов многомерной статистики,” в сборнике: *Импульс организационных инноваций. Сборник конкурсных работ I межвузовского конкурса студентов, магистрантов и аспирантов*, Москва, 2020, pp. 301–324.
- [3] L. A. Zadeh, “Fuzzy Sets,” *Information and control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.
- [4] Q. Song and B. S. Chissom, “Fuzzy time series and its models,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 54, pp. 269–277, 1993.
- [5] Q. Song and B. S. Chissom, “Forecasting enrollments with fuzzy time series-Part I,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 54, pp. 1–9, 1993.
- [6] Q. Song and B. S. Chissom, “Forecasting enrollments with fuzzy time series-part II,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 62, pp. 1–8, 1994.
- [7] Manish Pant, A. K. Shukla, and Sanjay Kumar, “A novel method to optimize interval length for intuitionistic fuzzy time series,” in *Soft Computing for Problem Solving, Advances in Intelligent Systems and Computing*, Pantnagar, Uttarakhand, India, 2020, pp.

- 55–62. [Online]. Available: <http://www.springer.com/series/11156>
- [8] J. Montero, D. Gómez, and H. Bustince, “Atanassov’s intuitionistic fuzzy sets as a classification model,” in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Springer Verlag, 2007, pp. 69–75. doi: 10.1007/978-3-540-72950-1\_7.
- [9] K. T. Atanassov, “Intuitionistic fuzzy sets,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 20, pp. 87–96, 1986.
- [10] Н. Т. Т. Зунг and Черненкокая. Л.В., “Модель анализа факторов на основе нечеткой кластеризации с-средних,” in *Журнал Известия Тульского государственного университета – Технические науки (ТулГУ, г. Тула)*, Тула: Издательстве ТулГУ, 2023, pp. 329–336.
- [11] B. P. Joshi and S. Kumar, “Intuitionistic fuzzy sets based method for fuzzy time series forecasting,” *Cybernetics and Systems*, vol. 43, no. 1, pp. 34–47, Jan. 2012. doi: 10.1080/01969722.2012.637014.
- [12] S. Kumar and S. S. Gangwar, “Intuitionistic Fuzzy Time Series: An Approach for Handling Nondeterminism in Time Series Forecasting,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, no. 6, pp. 1270–1281, Dec. 2016, doi: 10.1109/TFUZZ.2015.2507582.
- [13] A. Jurio, D. Paternain, H. Bustince, C. Guerra, and G. Beliakov, “A construction method of Atanassov’s Intuitionistic fuzzy set for image processing,” in *5th IEEE International Conference Intelligent Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Ed., University of Westminster, London, UK: 2020 IEEE International Conference on Intelligent Systems, Jul. 2010, pp. 337–342.
- [14] Abhishekh, S. S. Gautam, and S. R. Singh, “A refined method of forecasting based on high-order intuitionistic fuzzy time series data,” *Progress in Artificial Intelligence*, vol. 7, no. 4, pp. 339–350, Dec. 2018, doi: 10.1007/s13748-018-0152-x.
- [15] K. Huarng, “Effective lengths of intervals to improve forecasting in fuzzy time series,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 123, pp. 387–394, 2001, [Online]. Available: [www.elsevier.com/locate/fss](http://www.elsevier.com/locate/fss)
- [16] Abhishekh, S. S. Gautam, and S. R. Singh, “A new method of time series forecasting using intuitionistic fuzzy set based on average-length,” *Journal of Industrial and Production Engineering*, vol. 37, no. 4, pp. 175–185, May 2020, doi: 10.1080/21681015.2020.1768163.
- [17] Abhishekh, S. S. Gautam, and S. R. Singh, “A Score Function-Based Method of Forecasting Using Intuitionistic Fuzzy Time Series,” *New Mathematics and Natural Computation*, vol. 14, no. 1, pp. 91–111, Mar. 2018, doi: 10.1142/S1793005718500072.
- [18] K. Bisht and S. Kumar, “Intuitionistic Fuzzy Set-Based Computational Method for Financial Time Series Forecasting,” *Fuzzy Information and Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 307–323, Jul. 2018, doi: 10.1080/16168658.2019.1631557.
- [19] S. S. Gautam, Abhishekh, and S. R. Singh, “A modified weighted method of time series forecasting in intuitionistic fuzzy environment,” *OPSEARCH*, vol. 57, no. 3, pp. 1022–1041, Sep. 2020, doi: 10.1007/s12597-020-00455-8.
- [20] Farhan Nik Muhammad, Nazirah Ramli, and Asyura Abd Nassir, “Comparison of interval lengths for the intuitionistic fuzzy time series forecasting model,” *GADING Journal of Science and Technology*, vol. 5, no. 1, pp. 36–43, Mar. 2022, [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/359707316>
- [21] Manish Pant, A. K. Shukla, and Sanjay Kumar, “Novel Intuitionistic fuzzy time series modeling to forecast the death cases of COVID-19 in India,” in *Lecture Notes in Networks and Systems*, Smart trends in Computing and Communications, Ed., 2021, pp. 525–531. [Online]. Available: <https://link.springer.com/bookseries/15179>
- [22] A. Singh, D. K. Joshi, and S. Kumar, “A novel construction method of intuitionistic fuzzy set from fuzzy set and its application in multi-criteria decision-making problem,” in *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer Verlag, 2019, pp. 67–75. doi: 10.1007/978-981-13-0680-8\_7.
- [23] E. Bas, U. Yolcu, and E. Egrioglu, “Intuitionistic fuzzy time series functions approach for time series forecasting,” *Granular Computing*, vol. 6, no. 3, pp. 619–629, Jul. 2021, doi: 10.1007/s41066-020-00220-8.
- [24] O. Cagcag Yolcu and U. Yolcu, “A novel intuitionistic fuzzy time series prediction model with cascaded structure for financial time series,” *Expert Syst Appl.*, vol. 215, Apr. 2023, doi: 10.1016/j.eswa.2022.119336.
- [25] Z. Xu and R. R. Yager, “Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets,” *Int J Gen Syst*, vol. 35, no. 4, pp. 417–433, Aug. 2006, doi: 10.1080/03081070600574353.
- [26] Z. Xu, “Intuitionistic fuzzy aggregation operators,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 1179–1187, Dec. 2007, doi: 10.1109/TFUZZ.2006.890678.
- [27] J. Sullivan and W. H. Woodall, “A comparison of fuzzy forecasting and Markov modeling,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 64, pp. 279–293, 1994.
- [28] S.-M. Chen, “Fuzzy sets and systems Forecasting enrollments based on fuzzy time series,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 81, pp. 311–319, 1996.
- [29] C. H. Cheng, G. W. Cheng, and J. W. Wang, “Multi-attribute fuzzy time series method based on fuzzy clustering,” *Expert Syst Appl.*, vol. 34, no. 2, pp. 1235–1242, Feb. 2008, doi: 10.1016/j.eswa.2006.12.013.
- [30] C. H. Cheng, T. L. Chen, H. J. Teoh, and C. H. Chiang, “Fuzzy time-series based on adaptive expectation model for TAIEX forecasting,” *Expert Syst Appl.*, vol. 34, no. 2, pp. 1126–1132, Feb. 2008, doi: 10.1016/j.eswa.2006.12.021.
- [31] J.-R. Hwang, S.-M. Chen, and C.-H. Lee, “Handling forecasting problems using fuzzy time series,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 100, p. 228, 1998.
- [32] Jilani Tahseen Ahmed, S. M. Aquil Burney, and C. Ardil, “Multivariate High Order Fuzzy Time Series Forecasting for Car Road Accidents,” *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*, vol. 2, no. 6, pp. 2038–2043, 2007, [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/285870449>
- [33] W. Qiu, X. Liu, and H. Li, “A generalized method for forecasting based on fuzzy time series,” *Expert Syst Appl.*, vol. 38, no. 8, pp. 10446–10453, Aug. 2011, doi: 10.1016/j.eswa.2011.02.096.

- [34] K. Huarng, "Heuristic models of fuzzy time series for forecasting," *Fuzzy Sets Syst*, vol. 123, pp. 369–386, 2001, [Online]. Available: [www.elsevier.com/locate/fss](http://www.elsevier.com/locate/fss)
- [35] R. C. Tsaur, J. C. O Yang, and H. F. Wang, "Fuzzy relation analysis in fuzzy time series model," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 49, no. 4, pp. 539–548, Feb. 2005, doi: 10.1016/j.camwa.2004.07.014.
- [36] S. R. Singh, "A simple method of forecasting based on fuzzy time series," *Appl Math Comput*, vol. 186, no. 1, pp. 330–339, Mar. 2007, doi: 10.1016/j.amc.2006.07.128.

# Forecasting model of intuitionistic fuzzy time series using ratio distribution

Nguyen Thi Thu Dung, L.V. Chernenkaya

**Abstract**— Time series forecasting modeling is an area of intensive research and development. Nowadays, the application of fuzzy logic to time series forecasting models has attracted much attention and developed widely. At this time, the intuitionistic fuzzy time series model is not only a new approach, but also demonstrates high forecasting performance when nondeterminism is taken into account. In this paper, a modified intuitionistic fuzzy time series forecasting model is proposed based on discretization optimization based on the determination of the optimal ratio using the allocation algorithm. The model is applied to a real time series forecasting problem obtained from historical data at the University of Alabama from 1971 to 1992. The mean square errors (MSE) of the obtained forecasting results are presented. The superiority of the proposed model is demonstrated by comparing it with existing models.

**Keywords**— forecasting, intuitionistic fuzzy set, construction of intuitionistic fuzzy sets, distribution-based, ratio-based, score function.

## REFERENCES

- [1] N. T. T. Dung and Chernenkaya L. V., “System analysis in managing the development of territorial complexes in Vietnam,” in the collection: System analysis in design and management, collection of scientific papers of the XXV International Scientific and Educational-Practical Conference, St. Petersburg, 2021, pp. 346–352. (in russian)
- [2] N. T. T. Dung and Chernenkaya L. V., “Models for analyzing the economic development of several regions of Vietnam based on mathematical methods of multivariate statistics,” in In: Impulse of Organizational Innovation. Collection of competitive works of the 1st interuniversity competition for students, undergraduates and graduate students, Moscow, 2020, pp. 301–324. (in russian)
- [3] L. A. Zadeh, “Fuzzy Sets,” *Information and control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.
- [4] Q. Song and B. S. Chissom, “Fuzzy time series and its models,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 54, pp. 269–277, 1993.
- [5] Q. Song and B. S. Chissom, “Forecasting enrollments with fuzzy time series-Part I,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 54, pp. 1–9, 1993.
- [6] Q. Song and B. S. Chissom, “Forecasting enrollments with fuzzy time series-part II,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 62, pp. 1–8, 1994.
- [7] Manish Pant, A. K. Shukla, and Sanjay Kumar, “A novel method to optimize interval length for intuitionistic fuzzy time series,” in *Soft Computing for Problem Solving, Advances in Intelligent Systems and Computing*, Pantnagar, Uttarakhand, India, 2020, pp. 55–62. [Online]. Available: <http://www.springer.com/series/11156>
- [8] J. Montero, D. Gómez, and H. Bustince, “Atanassov’s intuitionistic fuzzy sets as a classification model,” in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Springer Verlag, 2007, pp. 69–75. doi: 10.1007/978-3-540-72950-1\_7.
- [9] K. T. Atanassov, “Intuitionistic fuzzy sets,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 20, pp. 87–96, 1986.
- [10] N. T. T. Dung and Chernenkaya L. V., “A model of factor analysis based on fuzzy c-means clustering,” in *Journal News of Tula State University - Technical Sciences (Tula State University, Tula)*, Tula: Tula State University Publishing House, 2023, pp. 329–336. (in russian)
- [11] B. P. Joshi and S. Kumar, “Intuitionistic fuzzy sets based method for fuzzy time series forecasting,” *Cybernetics and Systems*, vol. 43, no. 1. pp. 34–47, Jan. 2012. doi: 10.1080/01969722.2012.637014.
- [12] S. Kumar and S. S. Gangwar, “Intuitionistic Fuzzy Time Series: An Approach for Handling Nondeterminism in Time Series Forecasting,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, no. 6, pp. 1270–1281, Dec. 2016, doi: 10.1109/TFUZZ.2015.2507582.
- [13] A. Jurio, D. Paternain, H. Bustince, C. Guerra, and G. Beliakov, “A construction method of Atanassov’s Intuitionistic fuzzy set for image processing,” in *5th IEEE International Conference Intelligent Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Ed., University of Westminster, London, UK: 2020 IEEE International Conference on Intelligent Systems, Jul. 2010, pp. 337–342.
- [14] Abhishekh, S. S. Gautam, and S. R. Singh, “A refined method of forecasting based on high-order intuitionistic fuzzy time series data,” *Progress in Artificial Intelligence*, vol. 7, no. 4, pp. 339–350, Dec. 2018, doi: 10.1007/s13748-018-0152-x.
- [15] K. Huarng, “Effective lengths of intervals to improve forecasting in fuzzy time series,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 123, pp. 387–394, 2001, [Online]. Available: [www.elsevier.com/locate/fss](http://www.elsevier.com/locate/fss)
- [16] Abhishekh, S. S. Gautam, and S. R. Singh, “A new method of time series forecasting using intuitionistic fuzzy set based on average-length,” *Journal of Industrial and Production Engineering*, vol. 37, no. 4, pp. 175–185, May 2020, doi: 10.1080/21681015.2020.1768163.
- [17] Abhishekh, S. S. Gautam, and S. R. Singh, “A Score Function-Based Method of Forecasting Using Intuitionistic Fuzzy Time Series,” *New Mathematics and Natural Computation*, vol. 14, no. 1, pp. 91–111, Mar. 2018, doi: 10.1142/S1793005718500072.
- [18] K. Bisht and S. Kumar, “Intuitionistic Fuzzy Set-Based Computational Method for Financial Time Series

- Forecasting,” *Fuzzy Information and Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 307–323, Jul. 2018, doi: 10.1080/16168658.2019.1631557.
- [19] S. S. Gautam, Abhishekh, and S. R. Singh, “A modified weighted method of time series forecasting in intuitionistic fuzzy environment,” *OPSEARCH*, vol. 57, no. 3, pp. 1022–1041, Sep. 2020, doi: 10.1007/s12597-020-00455-8.
- [20] Farhan Nik Muhammad, Nazirah Ramli, and Asyura Abd Nassir, “Comparison of interval lengths for the intuitionistic fuzzy time series forecasting model,” *GADING Journal of Science and Technology*, vol. 5, no. 1, pp. 36–43, Mar. 2022, [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/359707316>
- [21] Manish Pant, A. K. Shukla, and Sanjay Kumar, “Novel Intuitionistic fuzzy time series modeling to forecast the death cases of COVID-19 in India,” in *Lecture Notes in Networks and Systems*, Smart trends in Computing and Communications, Ed., 2021, pp. 525–531. [Online]. Available: <https://link.springer.com/bookseries/15179>
- [22] A. Singh, D. K. Joshi, and S. Kumar, “A novel construction method of intuitionistic fuzzy set from fuzzy set and its application in multi-criteria decision-making problem,” in *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer Verlag, 2019, pp. 67–75. doi: 10.1007/978-981-13-0680-8\_7.
- [23] E. Bas, U. Yolcu, and E. Egrioglu, “Intuitionistic fuzzy time series functions approach for time series forecasting,” *Granular Computing*, vol. 6, no. 3, pp. 619–629, Jul. 2021, doi: 10.1007/s41066-020-00220-8.
- [24] O. Cagcag Yolcu and U. Yolcu, “A novel intuitionistic fuzzy time series prediction model with cascaded structure for financial time series,” *Expert Syst Appl*, vol. 215, Apr. 2023, doi: 10.1016/j.eswa.2022.119336.
- [25] Z. Xu and R. R. Yager, “Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets,” *Int J Gen Syst*, vol. 35, no. 4, pp. 417–433, Aug. 2006, doi: 10.1080/03081070600574353.
- [26] Z. Xu, “Intuitionistic fuzzy aggregation operators,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 1179–1187, Dec. 2007, doi: 10.1109/TFUZZ.2006.890678.
- [27] J. Sullivan and W. H. Woodall, “A comparison of fuzzy forecasting and Markov modeling,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 64, pp. 279–293, 1994.
- [28] S.-M. Chen, “Fuzzy sets and systems Forecasting enrollments based on fuzzy time series,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 81, pp. 311–319, 1996.
- [29] C. H. Cheng, G. W. Cheng, and J. W. Wang, “Multi-attribute fuzzy time series method based on fuzzy clustering,” *Expert Syst Appl*, vol. 34, no. 2, pp. 1235–1242, Feb. 2008, doi: 10.1016/j.eswa.2006.12.013.
- [30] C. H. Cheng, T. L. Chen, H. J. Teoh, and C. H. Chiang, “Fuzzy time-series based on adaptive expectation model for TAIEX forecasting,” *Expert Syst Appl*, vol. 34, no. 2, pp. 1126–1132, Feb. 2008, doi: 10.1016/j.eswa.2006.12.021.
- [31] J.-R. Hwang, S.-M. Chen, and C.-H. Lee, “Handling forecasting problems using fuzzy time series,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 100, p. 228, 1998.
- [32] Jilani Tahseen Ahmed, S. M. Aquil Burney, and C. Ardil, “Multivariate High Order Fuzzy Time Series Forecasting for Car Road Accidents,” *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*, vol. 2, no. 6, pp. 2038–2043, 2007, [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/285870449>
- [33] W. Qiu, X. Liu, and H. Li, “A generalized method for forecasting based on fuzzy time series,” *Expert Syst Appl*, vol. 38, no. 8, pp. 10446–10453, Aug. 2011, doi: 10.1016/j.eswa.2011.02.096.
- [34] K. Huarng, “Heuristic models of fuzzy time series for forecasting,” *Fuzzy Sets Syst*, vol. 123, pp. 369–386, 2001, [Online]. Available: [www.elsevier.com/locate/fss](http://www.elsevier.com/locate/fss)
- [35] R. C. Tsaur, J. C. O Yang, and H. F. Wang, “Fuzzy relation analysis in fuzzy time series model,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 49, no. 4, pp. 539–548, Feb. 2005, doi: 10.1016/j.camwa.2004.07.014.
- [36] S. R. Singh, “A simple method of forecasting based on fuzzy time series,” *Appl Math Comput*, vol. 186, no. 1, pp. 330–339, Mar. 2007, doi: 10.1016/j.amc.2006.07.128.