Максимальное множество кратчайших вершинно-независимых путей

Ю.Ю. Терентьева

Аннотация—**В статье предлагается метод поиска максимального множества кратчайших вершинно-независимых путей между вершинами графа. Область применения метода включает процедуры получения оценки устойчивости сети связи, оценки пропускной способности направления связи при канальной коммутации. Все эти процедуры крайне важны в процессе проектирования и/или модернизации сети связи при решении задач нахождения резервных путей. Необходимость разработки предлагаемого метода обусловлена прежде всего технико-экономическими факторами, связанными с организацией резервных маршрутов на сетях связи. И также продиктована низкой эффективностью существующих алгоритмов поиска резервных маршрутов, которые основываются на алгоритмах нахождения кратчайших путей между вершинами графа сети связи. Показано, что задачу поиска резервных маршрутов необходимо искать комплексно, а не последовательно используя алгоритм нахождения кратчайшего пути. Поскольку для сети связи, условно говоря, важнее иметь два некратчайших маршрута, которые резервируют друг друга, нежели один кратчайший, который «убивает» два потенциально имеющихся маршрута. А построение резервного маршрута – это ресурсоемкое мероприятие в общем случае для сетей связи высоких размерностей. Проведена апробация предложенного метода нахождения максимального множества кратчайших вершинно-независимых путей на сетях связи реальных масштабов, которая показала его высокую эффективность и возможность использования в ресурсоемких задачах, связанных с устойчивостью сети связи, а также в задачах распределения потоков и задачах маршрутизации.**

Ключевые слова— **сеть связи, устойчивость, вершинно-независимые пути.**

I. Введение

В статье рассматривается математический аспект проблемы резервирования простых путей в сетях связи, а также предлагается конструктивный алгоритм ее решения. Актуальность задачи резервирования простых путей обусловлена развитием технологии проектирования сетей связью. В частности, эта задача возникает при необходимости расчета важнейших технических характеристик сети связи, к которым относится устойчивость и пропускная способность. И эффективное решение подобной задачи особенно важно для сетей связи высоких размерностей, поскольку неразрывно связано с технико-экономическими параметрами сети связи при ее проектировании и/или модернизации.

Проблема резервирования простых путей в сетях связи рассматривалась неоднократно в современных работах [1-4], поскольку сфера применения решения данной задачи резервирования достаточно широка в сетях связи. Однако основным недостатком при рассмотрении этой проблемы являлось то, что она решалась последовательным использованием методов поиска кратчайших путей. Для реальных сетей связи, в особенности крупномасштабных, это неминуемо приведет к неэффективному решению. Например, резервный путь не будет найден, тогда как на самом деле можно найти два вершинно-независимых простых пути между заданными вершинами графа, каждый из которых не является кратчайшим. А отсутствие резервного пути может являться критическим фактором, как в вопросах обеспечения живучести, так и в вопросах обеспечения пропуска потоков информации.

Автором также предпринимались попытки решить эту задачу [5,6], в результате которых были исследованы основные ее сложности.

Пример «потери» вершинно-независмого пути с использованием классических алгоритмов (Дейкстры [7] и тп.) приведен на рис. 1. Здесь очевидным образом существуют два независимых пути между вершинами u1 и u2. Это:

1) u1-6-7-8-9-u2
2) u1-1-2-3-4-5-u2

Но при использовании классических методов поиска кратчайших путей между вершинами графа получим всего лишь один путь: u1-6-4-5-u2.

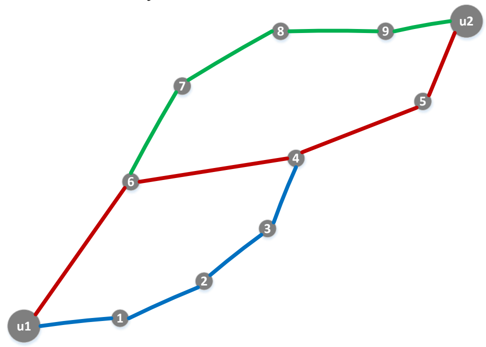

Рис. 1 – Пример «потери» резервного пути при использовании классических методов поиска кратчайших путей между заданными вершинами графа

Статья получена 13 сентября 2023 г.

Ю. Ю. Терентьева, Федеральное государственное автономное научное учреждение «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти им. А.В. Старовойтова», terjul@mail.ru.

Теоретические моменты, которые могли затрагивать так называемые резервные пути, соединяющие две несмежные вершины, возникали еще в 20-х годах XX-го века в связи с теоремой Менгера [8], свидетельствующей о том, что наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины s и t, равно наибольшему числу непересекающихся простых $(s-t)$-цепей.

Далее исследование оптимальных множеств вершин и ребер (дуг) неориентированного и ориентированного графов, разделяющих две несмежные вершины, привело к теореме Форда-Фалкерсона о минимальном разрезе и максимальном потоке [9], при помощи которой можно определить максимальное количество резервных путей. Однако сами резервные вершинно-независимые пути алгоритм нахождения максимального потока не предоставляет.

Для решения поставленной проблемы введено определение максимального множества кратчайших вершинно-независимых путей, которое непосредственно связано с резервными путями (здесь и в дальнейшем речь идет о вершинно-независимых путях). Разработан алгоритм нахождения этого множества. Построена модель генерации графов для тестирования алгоритма и приведены экспериментальные результаты его работы.

II. Предварительные сведения: определения и обозначения

Введем определение максимального множества кратчайших вершинно-независимых путей. Сначала определим меру (или длину) пути, относительно которой будем упорядочивать пути и находить кратчайший.

Мерой (длиной) пути будем считать количество вершин пути, не считая начальную и конечную вершины. Следовательно, кратчайшим будет путь, содержащий наименьшее число вершин от истока до стока.

Далее заметим, что приоритетом для нас является наибольшее количество путей от истока до стока, не имеющих попарно общих вершин (и, следовательно, ребер).

Таким образом, максимальное множество кратчайших вершинно-независимых путей, соединяющих две несмежные вершины (назовем их истоком и стоком) – это множество, состоящее из попарно непересекающихся путей, количество которых максимально и при этом суммарная мера этих путей минимальна. В частности, на рисунке 1 это множество представлено двумя путями: $p_1 = \{u_1, 6,7,8,9, u_2\}$ и $p_1 = \{u_1, 1,2,3,4,5, u_2\}$.

Пусть $G =< V, E >$ –неориентированный граф сети связи, описывающий модель сети связи. Здесь $V = \{v_i\}_{i=1,2,..n}$- множество вершин графа, которые моделируют узлы сети связи, $E = \{e_i\}_{i=1,2,..m}$ – множество ребер графа, моделирующих линии связи сети связи. При этом $e_i = (v_{1(i)}, v_{2(i)})$, $v_{1(i)} \in V$, $v_{2(i)} \in V$. Обозначим через u_1 вершину-исток и u_2 вершину-сток, $u_1 \in V, u_2 \in V$.

Путь, точнее, –й путь p_i $(i \in N)$, между истоком и стоком обозначим как упорядоченное множество $\{u_1, v_{1(i)}, v_{2(i)}, .. v_{n(i)}, u_2\}$. Заметим, что в рамках введенных обозначений длина i–го пути будет равна n. Функцией $q(p_i)$ обозначим длину пути p_i. Пусть $P = \{p_i\}_{i=1}^{M}$- множество всех возможных путей от истока к стоку, в том числе пересекающихся.

Предположим, между истоком и стоком существует z попарно непересекающихся путей:

$$\begin{gathered} p_1 = (u_1, v_{1(1)}, v_{2(1)}, .. v_{n(1)}, u_2) \\ p_2 = (u_1, v_{1(2)}, v_{2(2)}, .. v_{n(2)}, u_2) \\ \ldots\ldots \\ p_z = (u_1, v_{1(z)}, v_{2(z)}, .. v_{n(z)}, u_2) \end{gathered} \qquad (1)$$

То есть не существует $i \geq 1, i \in N$, и не существует $j \geq 1, j \in N$ таких, что $v_{i(...)} = v_{j(...)}$. Здесь $(p_1 \in P, p_2 \in P, .. p_z \in P)$.

Введем понятие «помеченное ребро» следующим образом. Зададим функцию f на множестве E.

$$f(e_i) = \begin{cases} 0, \text{если ребро не отмечено} \\ 1, \text{если ребро отмечено} \end{cases} \qquad (2)$$

III. Постановка задачи

В рамках введенных обозначений необходимо решить следующую минимаксную задачу.

$$\max_{\substack{p_1 \in P, p_2 \in P, .. p_z \in P \\ p_i \cap p_j = \{u_1, u_2\} \, \forall i \neq j}} z \qquad (3)$$

$$\min_{\substack{p_1 \in P, p_2 \in P, .. p_z \in P \\ p_i \cap p_j = \{u_1, u_2\} \, \forall i \neq j}} \sum_{i=1}^{z} q(p_i) \qquad (4)$$

Другими словами, необходимо найти максимальное количество вершинно-непересекающихся кратчайших путей (а также сами пути), соединяющих исток и сток.

IV. Описание алгоритма

Для построения алгоритма поиска максимального множества кратчайших вершинно-независимых путей сначала необходимо на основании неориентированного графа G построить ориентированный граф $\vec{G}$, сделав следующие шаги (назовем это Алгоритмом 1).

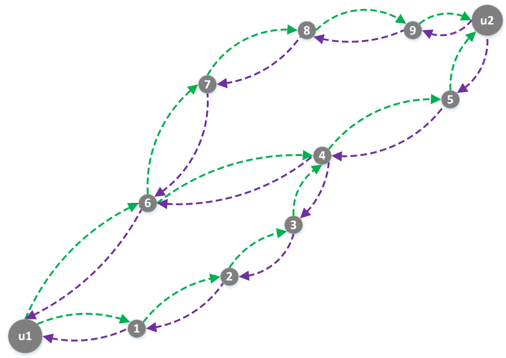

Рис. 2 – Результат выполнения процедуры формирования графа $\vec{G}$ на основе графа G

Алгоритм 1

1) Множество вершин графа $\vec{G}$ совпадает со множеством вершин графа G.
2) Полагаем новое множество ориентированных ребер $\vec{E} = \emptyset$.

3) Для каждого ребра $e_i = (v_{1(i)}, v_{2(i)})$, где $e_i \in E$, $i = 1,2,..m$, формируем два ориентированных ребра $e_{1(i)} = (v_{1(i)}, v_{2(i)})$ и $e_{2(i)} = (v_{2(i)}, v_{1(i)})$.
4) $\vec{E} := \vec{E} \cup e_{1(i)}$
5) $\vec{E} := \vec{E} \cup e_{2(i)}$
6) Если просмотрели все ребра, то останов. Иначе переход на шаг 3.

В результате вышеизложенной процедуры получаем граф, в котором каждое ребро заменяется на два ребра с теми же вершинами и противоположной ориентацией (см. рис.2).

Далее проводим непосредственный поиск максимального множества вершинно-независимых кратчайших путей между вершинами u_1 и u_2, уже используя промежуточный ориентированный граф $\vec{G}$. Назовем эту совокупность действий Алгоритмом 2.

Алгоритм 2

1) Создаем –множество вершинно-независимых кратчайших путей между u_1 и $u_2, M := \emptyset$. W – множество вершин, образующих эти пути, за исключением вершин u_1 и $u_2, W := \emptyset$.
2) Находим поиском в ширину (алгоритмом Ли [9]) кратчайший ориентированный путь между u_1 и u_2 в ориентированном графе $\vec{G}$ такой, что все ребра пути не являются помеченными. При этом если мы при поиске пути попадаем в вершину q, которая уже содержится во множестве W, то продолжаем поиск пути только по дуге, исходящей из вершины q.
3) Если путь найден, заносим его во множество M , все транзитные вершины заносим в множество W и переходим на шаг 4. Иначе переход на шаг 6.
4) Помечаем все ребра найденного пути на 2-м шаге.
5) Просматриваем все ребра графа. Если какое-либо ребро оказывается помеченным одновременно с ребром-антагонистом (то есть вершины у этих разнонаправленных ребер одинаковы), то из графа $\vec{G}$ удаляем это ребро вместе с ребром-антагонистом, и переходим на шаг 1. Иначе переход на шаг 2.
6) Останов. M- максимальное множество найденных вершинно-независимых путей между вершинами u_1 и u_2 в исходном графе G.

Таким образом, построен алгоритм, который позволяет искать вершинно-независимые пути эффективнее, нежели методы на основании алгоритмов поиска кратчайших путей. Более того, предложенный алгоритм находит максимальное количество вершинно-независимых кратчайших путей.

V. Моделирование тестовых примеров

Для моделирования тестовых примеров предложенного, а также других алгоритмов, используемых при анализе сетей связи, разработано специальное программное обеспечение, имеющее широкий функциональный спектр, включающий, в том числе, верификацию корректности работы алгоритмов.

На рисунке 3 представлены скриншоты работы упомянутого программного обеспечения, на которых показаны результаты использования предложенного алгоритма.

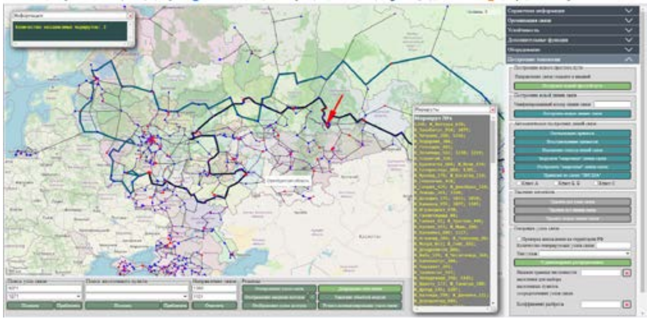

Рис. 3 – Поиск резервных путей предложенным алгоритмом. Демонстрация при помощи специального программного обеспечения.

Граф сети связи моделируется случайным образом при варьировании установленных параметров. При этом для верификации алгоритмов, связанных с поиском резервных путей, предложена методика, которая позволяет «знать» априорное количество возможных резервных путей и тем самым получать достоверный показатель эффективности работы предложенного алгоритма. Эффективность алгоритма в данном случае будем рассматривать как среднее отношение количества найденных вершинно-независимых кратчайших путей к общему количеству путей. Среднее значение является статистически корректным показателем. Это обусловлено свойством устойчивости средних, которое здесь имеет место в силу обобщенного закона больших чисел для зависимых случайных величин (закон А.А. Маркова), согласно которому при увеличении числа направлений связи усредненное значение вероятностей связности будет сходиться по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий (см. [10, стр. 294]). Предложенная методика генерации вершинно-независимых путей, которая дает априорно точное максимальное их количество между заданными вершинами, основана на следующих действиях:

1) генерация точек-вершин графа на плоскости (на карте) с заданными параметрами, которые определяют характер расположения точек;
2) построение минимального остовного дерева по сгенерированным вершинам;
3) построение дополнительных k вершинно-независимых путей между заданными вершинами с оптимизацией длины достраиваемых ребер (используется метод, предложенный в [11]).

Заметим, что в случае использования Процедуры 3, генерирующей тестовые примеры, эффективность алгоритма будем оценивать как отношение количества найденных вершинно-независимых путей к общему количеству имеющихся вершинно-независимых путей.

Кроме того, шаг 3 Процедуры 3 можно также использовать и на реальных сетях связи. Проверка качества работы предложенного алгоритма тогда производится с учетом того, что количество вершинно-независимых путей на заданном направлении связи, определяемом парой вершин, будет не менее двух при условии априорно связанного графа сети связи.

VI. Результаты экспериментов

В целях увеличения репрезентативности был разработан модуль автоматической генерации примеров (согласно Процедуре 3) и соответственно поиска вершинно-независимых путей между определенными истоком и стоком.

Кроме того, следует отметить, что предложенный алгоритм поиска апробирован также на реальных сетях связи. Апробация на реальных сетях связи имела высокий показатель эффективности поиска по сравнению с методами поиска на основании модификации алгоритмов нахождения кратчайших путей. Исследовались различные информационные направления связи. В отличие от сгенерированных примеров в случае реальных сетей связи априорно неизвестно максимальное количество вершинно-независимых путей между заданными вершинами. В этом случае рассматривалась разность между количеством найденных вершинно-независимых путей при помощи разработанного алгоритма (Процедура 2) и количеством вершинно-независимых путей, найденных при помощи последовательного использования алгоритмов кратчайших путей. В таблице 1 приведены результаты моделирования, позволяющие произвести сравнительную оценку результатов поиска с использованием предложенного алгоритма и алгоритма на основе методов поиска кратчайших путей. Для каждой строки таблицы, характеризующей размерность сети связи, проводилась серия экспериментов, состоящая из 1000000 автоматических генераций топологического графа сети связи.

Таблица 1. Сравнительная таблица результатов моделирования. Отношение числа найденных вершинно-независимых путей к общему числу вершинно-независимых путей (среднее значение).

Размерность	Использование подхода с последовательным применением методов поиска кратчайшего пути	Использование разработанного алгоритма
100	0.64	1
1000	0.54	1
10000	0.38	1

VII. Заключение

В статье описан разработанный метод поиска максимального множества вершинно-независимых кратчайших путей между заданными вершинами в графе сети связи, условно разделенный на алгоритмы. Метод апробирован на реальных сетях связи, а также на репрезентативном количестве смоделированных графов сети связи. Результаты моделирования показали высокую оценку эффективности предложенного метода. В случае, когда алгоритмы поиска вершинно-независимых путей на основе классических алгоритмов поиска кратчайших путей теряют один или более путей, разработанный алгоритм демонстрирует эффективный поиск.

Данный результат имеет практическую значимость при проектировании и/или модернизации сетей связи, поскольку факт обеспечения резервного пути между узлами связи чрезвычайно важен, так как качественный поиск вершинно-независимых путей позволит значительно экономить ресурсы, не достраивая ребра (линии связи) для формирования резервного независимого пути. Другими словами, экономический эффект при качественном поиске достигается за счет обеспечения фактора устойчивости (а также возможной требуемой пропускной способности при статической маршрутизации) направлений связи при отсутствии необходимости строительства новых линий связи для организации резервного маршрута.

В последующих публикациях будет приведено доказательство того, что предложенный метод действительно находит максимальное множество вершинно-независимых кратчайших путей, что также косвенно подтверждается проведенными экспериментами.

Кроме того, будет доказан факт инвариантности искомого множества относительно параметра $\sum_{i=1}^{z} q(p_i)$, то есть суммарное количество транзитных вершин в максимальном множестве кратчайших вершинно-независимых путей графа сети связи от истока к стоку будет одинаковым для разных вариаций путей.

Библиография

[1] Ясинский С.А., Соколов В.М. Модификация алгоритмов поиска кратчайших путей в транспортной сети телекоммуникационной системы распространения геоинформации // Информация и космос, №2, 2012, с. 6-11.

[2] Назаров А. Н., Сычев К. И. Модели и методы расчета показателей качества функционирования узлового оборудования и структурно-сетевых параметров сетей связи следующего поколения. – Красноярск: Поликом, 2010 – 389 с.

[3] Дышленко С.Г. Маршрутизация в транспортных сетях // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении, 2018, №1, с.15-20.

[4] Цветков К.Ю., Макаренко С.И., Михайлов Р.Л. Формирование резервных путей на основе алгоритма Дейкстры в целях повышения устойчивости информационно-телекоммуникационных сетей // Информационно-управляющие системы, 2014, №2.

[5] Терентьева Ю.Ю. Определение максимального множества независимых простых путей между вершинами графа. Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование», [S.l.], том 17, № 2.- 2021. ISSN 2411-1473.

[6] Булынин А.Г., Мельников Б.Ф., Мещанин В.Ю., Терентьева Ю.Ю. Оптимизационные задачи, возникающие при проектировании сетей связи высокой размерности, и некоторые эвристические методы их решения // Информатизация и связь. – 2020. – № 1. – С. 34–40.

[7] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. / М.: Издательский дом «Вильямс», 2011— 1296 с.
[8] Харари Ф. Теория графов.- М.: Мир, 1973 – 300с.
[9] Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966.-277с.
[10] Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969.
[11] Мельников Б.Ф., Терентьева Ю.Ю. Построение оптимального остовного дерева как инструмент для обеспечения устойчивости сети связи // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки.-2021.-№1 – С. 36-45.

Юлия Юрьевна ТЕРЕНТЬЕВА,
Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти им. А.В. Старовойтова, Москва
email: terjul@mail.ru,
elibrary.ru: authorid=1577,
scopus.com: authorId=57216810316,
ORCID: orcidID=0000-0002-2418-003X.

Maximum set shortest vertex-independent paths

Y.Y. Terentyeva

Abstract— **The article proposes a method for finding the maximum set of shortest vertex-independent paths between the vertices of a graph. The scope of the method includes procedures for obtaining an assessment of the stability of the communication network, assessing the bandwidth of the communication direction during channel switching. All these procedures are extremely important in the process of designing and/or upgrading a communication network when solving problems of finding backup paths.**

The need to develop the proposed method is primarily due to technical and economic factors associated with the organization of backup routes on communication networks. And it is also dictated by the low efficiency of existing algorithms for finding backup routes, which are based on algorithms for finding the shortest paths between the vertices of the communication network graph.

It is shown that the problem of finding backup routes must be searched for comprehensively, and not sequentially using the algorithm for finding the shortest path. Because for a communication network, relatively speaking, it is more important to have two shortest routes that reserve each other than one shortest one that "kills" two potentially available routes. And building a backup route is a resource–intensive event in the general case for high-dimensional communication networks.

The proposed method of finding the maximum set of shortest vertex-independent paths on real-scale communication networks has been tested, which has shown its high efficiency and the possibility of using it in resource-intensive tasks related to the stability of the communication network, as well as in flow distribution and routing tasks.

Key words—communication network, stability, vertex-independent paths.

References

[1] Yasinsky S.A., Sokolov V.M. Modification of algorithms for finding shortest paths in the transport network of the telecommunication system for the dissemination of geoinformation // Information and Space, No. 2, 2012, pp. 6-11.
[2] Nazarov A. N., Sychev K. I. Models and methods for calculating the quality indicators of the functioning of node equipment and structural and network parameters of next-generation communication networks. – Krasnoyarsk: Polikom, 2010 – 389 p.
[3] Dyshlenko S.G. Routing in transport networks // ITNOU: Information Technologies in Science, Education and Management, 2018, No. 1, pp.15-20.
[4] Tsvetkov K.Yu., Makarenko S.I., Mikhailov R.L. Formation of backup paths based on the Dijkstra algorithm in order to increase the stability of information and telecommunication networks // Information and control systems, 2014, No. 2.
[5] Terentyeva Yu.Yu. Determination of the maximum set of independent simple paths between the vertices of the graph. International Scientific Journal "Modern Information Technologies and IT Education", [S.L.], vol. 17, No. 2.- 2021. ISSN 2411-1473.
[6] Bulynin A.G., Melnikov B.F., Meshchanin V.Yu., Terentyeva Yu.Yu. Optimization problems arising in the design of high–dimensional communication networks and some heuristic methods for their solution // Informatization and Communication. – 2020. – No. 1. - pp. 34-40.
[7] Kormen T., Leiserson Ch., Rivest R., Stein K. Algorithms: construction and analysis. / Moscow: Williams Publishing House, 2011— 1296 p.
[8] Harari F. Graph theory.- M.: Mir, 1973 – 300p.
[9] Ford L., Fulkerson D. Flows in networks. – Moscow: Mir, 1966.-277p.
[10] Wentzel E.S. Probability Theory. - M.: Nauka, 1969.
[11] Melnikov B.F., Terentyeva Yu.Yu. Building an optimal spanning tree as a tool for ensuring the stability of a communication network // News of higher educational institutions. Volga region. Technical sciences.-2021.-No. 1 – pp. 36-45.