О связи специальных бинарных отношений с условиями коммутирования языков. Часть II. Основные утверждения

Б. Ф. Мельников

Аннотация— **В статье рассматриваются различные утверждения, описывающие связь специальных бинарных отношений (а именно, определённых и исследованных в нескольких наших предыдущих работах бинарных отношениях покрытия и эквивалентности в бесконечности) с условиями коммутирования языков. Обобщая можно сказать, что рассматриваются несколько просто формулируемых свойств, связанных с применением операции произведения (конкатенации) формальных языков; при этом языки не обязательно (но обычно) являются конечными.**

Среди рассматриваемых проблем – исследование условий равенства степеней двух языков. Доказывается, например, что в случае префиксных языков такое равенство равносильно наличию у рассматриваемых множеств общего корня, определяемого для операции конкатенации обычным образом.

Приводятся несколько вспомогательных утверждений, связанных с возможным выбором для заданного языка его левого делителя. Особо рассматриваются те из полученных результатов про левый делитель, которые удачно переформулируются, если рассматриваемые в утверждениях языки могут быть получены в результате действия каких-либо морфизмов. Также рассматриваются условия наличия в глобальном надмоноиде общего корня для некоторых двух его элементов.

После этого рассматриваются различные следствия условия возможного коммутирования двух языков: во-первых, в общем случае; во-вторых, при выполнении специальной гипотезы, названной нами «гипотезой Zyu» и рассмотренной в нескольких предыдущих публикациях; в-третьих, при выполнении условия префиксности рассматриваемых языков.

В заключении статьи приводятся некоторые примеры, а также формулируются связанные с тематикой статьи задачи для дальнейшего решения.

В предлагаемой части II статьи рассматриваются основные результаты, начинающиеся с формулировки условий коммутирования языков для общего («непрефиксного») случая.

Ключевые слова—**формальные языки, свободный моноид, надмоноиды, итерации языков, коммутирование, алгоритмы.**

В предлагаемой части II статьи (продолжающей часть I, т. е. [1]) мы рассматриваем условия коммутирования языков для общего («непрефиксного») случая, после чего переходим к частному случаю – к префиксным языкам. Нумерации разделов, формул и утверждений части II продолжают соответствующие нумерации части I (теорем в части I не было), а нумерация ссылок на литературу – новая.

Статья получена 11 сентября 2023 г.

Борис Феликсович Мельников, Университет МГУ – ППИ в Шэньчжэне (bormel@smbu.edu.cn).

Также отметим, что автор изменил заявленное ранее (т. е. приведённое во введении части I) количество и содержание разделов части II – существенно увеличив как материал формируемой статьи, так и число разделов. Добавив достаточно много материала (конкретно см. ниже), автор при этом исключил из рассмотрения предполагавшийся к опубликованию материал, связанный с 2-элементными коммутирующими языками – этот материал, согласно введению части I, должен был быть включён в раздел VIII; причина невключения этого материала приведена в заключении. Поэтому приведём здесь фактическое содержание части II – применяя *новые номера разделов*.

В разделе VII вводятся некоторые дополнительные обозначения, которые не употредлялись в части I статьи.

В разделе VIII рассматривается очень простой частный случай: один из языков должен содержать ровно 1 слово-элемент.

В разделе IX приводятся необходимые и достаточные условия коммутирования в общем случае – то есть без каких-либо ограничений на коммутрируемые языки. Особо отметим применённое в доказательстве теоремы 1, включённой в этот раздел, обозначение языка $\mathcal{D}$; в настоящей статье такое обозначение употребляется в том же самом смысле, что и в [2]: это потенциальное множество слов, которого, возможно, не существует. Более того, не будет преувеличением утверждение о том, что *весь комплекс задач*, описанных в [3], направлен на *поиск* подобных языков – либо на *доказательство их несуществования* – для различных задач с различными ограничениями.

В разделе X приводится краткая формулировка одного из вариантов гипотезы (Zyu), подробно рассмотренной в нескольких наших предыдущих публикациях, – после чего рассматриваются модифицированные условия коммутирования в случае выполнения этой гипотезы. Конкретных утверждений и теорем мы в этом разделе не формулируем – однако приводимый материал описывает сведéние рассматриваемых задач (причём не только задачи коммутирования языков) к задачам аналогичным, но формулируемым для более простых ситуаций.

В разделе XI рассматриваются условия выполнения гипотезы (Zyu) в префиксном случае; более того, в условиях приводимой в разделе теоремы достаточно, чтобы префиксым был только один из коммутирующих языков (либо языков рассматриваемого класса эквивалентности).

В разделе XII мы ещё более ужесточаем условия – а именно, рассматриваем случай, когда оба коммутирующих языка являются префиксными. Сто́ит отметить, что смысл языка $\mathcal{A}$, рассматриваемого в доказательстве теоремы этого раздела, практически совпадает с вышеупомянутым языком $\mathcal{D}$: это потенциальное множество слов, которого, возможно, не существует.

В разделе XIII приводится числовая интерпретация префиксного случая – при условии конечности заданного алфавита.

Раздел XIV – заключение; в нём мы формулируем некоторые направления дальнейшей работы – т. е. возможные публикации, связанные с рассмотренной в настоящей статье тематикой.

VII. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этом разделе вводятся некоторые обозначения, которые не употредлялись в части I статьи.

Положим

$$A|^{x-y} = \{\, w \in \Sigma^* \mid xwy \in A \,\},$$

$$A|_{x-y} = \{\, u \in A \mid x \in \mathrm{pref}(u),\ y \in \mathrm{suff}(u) \,\}$$

(pref и suff – множества префиксов и суффиксов сло́ва или языка); заметим, что, вообще говоря,

$$A|_{x-y} \neq \{\, u \in A \mid (\exists w \in \Sigma^*)\,(u = xwy) \,\}\,.$$

Будем также употреблять следующую краткую запись:

$$A|^{x-y}_{z-t} = \left(A|^{x-y}\right)|_{z-t}\,.$$

В введённых обозначениях будем опускать в верхних и нижних индексах пустое слово ε (причём как до, так и после знака “–”).

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \{\, a, aacac, aabbc, abbc, acaac, bcc, c \,\};$$

тогда выполнено следующее:

$$A|^{a} = \{\, \varepsilon, acac, abbc, bbc, caac \,\},$$

$$A|^{a}_{-ac} = \{\, acac, caac \,\}.$$

Кроме того, для произвольного языка A обозначим

$$pv(A) = \big\{ u \in A \;\big|\; (\forall v \in A)\,(u \notin \mathrm{opref}(v)) \big\}.$$

Заметим, что для любого $A \in mp^+(\Delta)$ выполнено условие

$$pv(A) \in mp(\Delta)\,.$$

Например, для языков C и D, определяемых в виде

$$C = \{\, 0, 100, 101, 11 \,\}, \quad D = C \cup \{\, 01, 110 \,\},$$

имеем $pv(D) = C$.

В статье придётся использовать обозначения, называемые в наших последних публикациях ([1], [3], [5], [6], [7], [8], [16] и др.) «старыми»: они применялись в публикациях автора до 2015 г. Эти обозначения вводят бинарные отношения покрытия в бесконечности (пишем $\overset{\subsetneq}{\infty}$) и *эквивалентности в бесконечности* (пишем $\overset{\sim}{\infty}$); важно, что эти отношения, в отличие от «новых», можно рассматривать для любых бесконечных языков – а не только для языков вида A^*, где A – некоторый конечный (и обычно непустой) язык. Отношение $\overset{\subsetneq}{\infty}$ для языков A^* и B^* выполняется в том случае, когда для любого слова языка A^* существует некоторое слово языка B^*, такое что первое из этих слов является префиксом (возможно, несобственным) второго. Отношение $\overset{\sim}{\infty}$ выполняется, когда вдобавок к этому выполнено и «зеркальное» условие (со взаимным обменом A и B); оно, очевидно, является отношением эквивалентности.

Для языков вида A^* (как и ранее, итерируемые языки предполагаются непустыми и не содержащими ε) по определению выполняются следующие соотношения:

$$A^* \overset{\subsetneq}{\infty} B^* \Longleftrightarrow A \trianglelefteq B \quad \text{и} \quad A^* \overset{\sim}{\infty} B^* \Longleftrightarrow A \Diamond B.$$

Повторим также понятия, связанные с кодовым индексом слова и языка – приведём их согласно [6]. Для алфавита Σ, состоящего из n букв, кодовый индекс $ci(u)$ слова u определим как $n^{-|u|}$. Кодовый индекс $ci(A)$ языка

$$A = \{\, u_1, u_2, \ldots u_n \,\}$$

определяется как сумма кодовых индексов всех его слов:

$$ci(A) = \sum_{i=1}^{n} ci(u_i).$$

Примеры. Для алфавита из 2 букв $\Sigma = \{\, a, b \,\}$ и слова $u = aba$ получаем $ci(u) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. Для языка

$$A = \{\, aa, ab, bbb \,\}$$

над тем же алфавитом получаем

$$ci(A) = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Для языка

$$B = \{\, aa, ab, b \,\}$$

получаем

$$ci(B) = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

Заметим, что в рассмотренных примерах A и B являются (однозначными) кодами. Вообще, можно доказать, что неравенство $ci(A) \leqslant 1$ является *необходимым* условием того, что A – (однозначный) код.

VIII. КОММУТИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ 1-ЭЛЕМЕНТНОГО ЯЗЫКА

В этом разделе один из языков (всюду далее это A) должен содержать ровно 1 слово-элемент. Конечно же, в случае 1-элементного языка выполнение гипотезы (Ⱥ) очевидно. Поэтому, аналогично проделанному в разделе XI, мы можем считать, что к языкам A и B *уже был применён* специальный *инверсный морфизм*.

Итак, нужно рассмотреть случай $|A| = 1$. Если $A = \{\varepsilon\}$, то условие (13) выполняется для поизвольного B. Иначе из условий

$$|A| = 1 \quad \text{и} \quad A \in mp^+(\Sigma)$$

получается следующее:

$$|\Sigma| = 1 \quad \text{и} \quad A = \{0^k\}$$

(для некоторого положительного k, 0 – буква алфавита).

Кроме того, $B \subseteq \Sigma^*$, а, как несложно убедиться, любое подмножество B языка $\{0\}^*$ при любом k удовлетворяет условию

$$\{0^k\} \cdot B = B \cdot \{0^k\}.$$

Повторим очевидность выполнения в рассматриваемом здесь частном случае гипотезы (Ⱥ) – можно этот факт сравнить с материалом раздела XI.

IX. КОММУТИРОВАНИЕ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В этом разделе рассматриваются необходимые и достаточные условия коммутирования в общем случае – то есть без каких-либо дополнительных ограничений на коммутируемые языки A и B.

Итак, будем рассматривать равенство

$$A \cdot B = B \cdot A \tag{13}$$

на множествах языков (т. е. в глобальных надмоноидах свободных моноидов).

Отметим, что рассматриваемые языки A и B *могут* содержать пустое слово ε, – в этом существенное отличие материала настоящей статьи от условий, приведённых в [4]. Более того, если ε не содержится ни в одном из рассматриваемых языков, то, например, доказываемое далее утверждение 1 тривиально.

Также без доказательства отметим следующий очевидный факт.

Утверждение 10: Если выполнено условие (13), то

$$(\forall k, l \in \mathbb{N}_0)\ \left(A^k B^l = B^l A^k\right).$$

И вообще, все конкатенации, состоящие из $k+l$ языков, среди которых k раз встречается A и l раз встречается B, при этом равны между собой. □

Следующие несколько утверждений и теорем описывают основной предмет натоящей статьи – связь рассматриваемых в статье бинарных отношений $\trianglelefteq$ и $\diamondsuit$ с условиями коммутирования языков.

Теорема 1: Если выполнено условие (13), то $B \trianglelefteq A$.

Доказательство. Рассмотрим только случай конечных языков A и B. [1]

Предположим сначала, что $A \not\ni \varepsilon$. Рассмотрим любое слово $v \in B^*$, для него выберем такое $l \in \mathbb{N}_0$, что $v \in B^l$; обозначим $k = |v| + 1$.

Для сделанных обозначений выполнено условие

$$v \in \mathrm{opref}\left(B^l A^k\right)$$

($\varepsilon \notin A$, значит и $\varepsilon \notin A^k$, поэтому в последнем случае действительно можно писать opref, а не только pref). Согласно утверждению 10, $B^l A^k = A^k B^l$, поэтому

$$v \in \mathrm{opref}(A^k B^l)\,.$$

Поскольку $\varepsilon \notin A$, мы получаем

$$\|A^*\|_{\min} \geqslant k > |v| \quad \text{и} \quad v \in \mathrm{opref}\left(A^k\right).$$

Нами было рассмотрено произвольное слово $v \in B^*$, значит при $\varepsilon \notin A$ условие

$$B^* \subseteq \mathrm{opref}\left(A^*\right)$$

(т. е. условие $B \trianglelefteq A$) выполнено. Поэтому далее в доказываемом утверждении считаем, что $A \ni \varepsilon$.

Предположим, что $B^* \not\subseteq \mathrm{opref}(A^*)$, т. е.

$$\left(\exists v \in B^*\right)\ \left(v \notin \mathrm{opref}(A^*)\right).$$

[1] Поэтому конечным можно считать и рассматриваемый алфавит Σ. В общем случае – т. е. когда языки, вообще говоря, бесконечны – аналогичное утверждение также выполняется; схему доказательства см. ниже.

Выберем $l \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы $v \in B^l$, и рассмотрим язык

$$\mathcal{D} = \left\{ w \in A^* \,\middle|\, w \in \mathrm{pref}(v) \right\}.$$

Заметим, что

$$v \notin \mathrm{opref}\left(A^*\right),$$

значит $v \notin D$, поэтому можно альтернативным способом определить $\mathcal{D}$ как

$$\mathcal{D} = \left\{ w \in A^* \,\middle|\, w \in \mathrm{opref}(v) \right\}.$$

(Такое же обозначение $\mathcal{D}$ употреблялось в [2], после чего подробно обсуждалось в [5]. В настоящей статье это обозначение употребляется в том же самом смысле: потенциальное множество слов, которого, возможно, не существует. Более того, не будет преувеличением утверждение о том, что *весь комплекс задач*, описанных в [3], направлен на *поиск* подобных языков – либо на *доказательство их несуществования* – для различных задач с различными ограничениями.)

Итак, рассматривая определённый выше потенциальный язык $\mathcal{D}$, выбираем некоторое слово $u \in \max(\mathcal{D})$; пусть

$$u \in A^{k_1} \quad \text{и} \quad |u| = m\,.$$

(Т. е., иными словами, мы выбираем таким образом числа k_1 и m.)

Поскольку $A \neq \{\varepsilon\}$, то при любых $i < j$ имеет место неравенство

$$\left|A^i\right| < \left|A^j\right|.$$

Поэтому можно выбрать некоторое $k_2 \in \mathbb{N}$, такое что

$$\left|A^{k_2}\right| > (m+1) \cdot \left|B^l\right|.$$

Обозначим

$$k = \max(k_1, k_2)\,.$$

Заметим, что согласно условиям $\varepsilon \in A$ и $u \in A^{k_1}$, слово u входит в каждый из языков A^i при $i \geqslant k_1$; поэтому и $A^k \ni u$.

Обозначим

$$v = u a_1 a_2 \ldots a_n\,,$$

где

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma\,,$$

и, очевидно, $n > 0$. На основе сделанных обозначений определим языки

$$C_1 = \{u,\ ua_1,\ ua_1a_2,\ \ldots,\ ua_1a_2\ldots a_{n-1}\}\,,$$

$$C_2 = v\Sigma^*\,, \qquad C = C_1 \cup C_2\,.$$

Рассмотрим язык $D = A^k \cdot B^l$. Согласно отмеченному выше, верно также равенство $D = B^l \cdot A^k$. Оценим двумя способами – сверху и снизу – число (различных) элементов множества $D \cap C$, т. е. число слов этого языка.

Во-первых, рассмотрим запись языка D в виде $A^k \cdot B^l$. Все слова вида uw, где $w \in B^l$, могут принадлежать $D \cap C$. Поскольку, согласно предположению $|u| = m$, слово u имеет ровно m различных собственных префиксов (включая ε), а условие

$$u'w \in D \cap C$$

для некоторого $w \in B^l$ может быть выполнено для произвольного слова u' последнего языка ($u' \in \mathrm{opref}(u)$), то общее число элементов множества $D \cap C$ оценивается *сверху* следующим образом:

$$|D \cap C| \leqslant \left|B^l\right| + m \cdot \left|B^l\right| = (m+1) \cdot \left|B^l\right| . \qquad (14)$$

К последнему приведём такое подробное пояснение. Мы действительно посчитали все слова указанного множества $D \cap C$, т. к. условие

$$u'' \in C \quad \text{при} \quad u'' \in A^k \quad \text{и} \quad u'' \neq u$$

не может быть выполнено по следующей причине. Если бы слово u'' входило в язык C_1, то был бы неверен способ выбора u как элемента множества $\max(\mathcal{D})$, поскольку

$$u'' \in A^* \quad \text{и} \quad |u''| > |u| .$$

А если бы выполнялось условие $u'' \in C_2$, то выполнялось бы также и включение $v \in \mathrm{opref}(A^*)$, а последнее противоречит способу выбора v.

Итак, не существует никаких элементов языка $D \cap C$, кроме пересчитанных, т. е. выполнено неравенство (14).

Во-вторых, рассмотрим запись D в виде $B^l \cdot A^k$. Вследствие $A \ni \varepsilon$, выполнено условие $v \in B^l$, поэтому все элементы множества D вида vw, где $w \in A^k$, принадлежат также языку C_2, и, следовательно, языку C. Таким образом, число (различных) элементов языка $D \cap C$ не меньше числа различных элементов A^k, а согласно условию $k \geqslant k_2$ и способу выбора k_2, имеем

$$|D \cap C| > (m+1) \cdot \left|B^l\right| . \qquad (15)$$

Итак, получено противоречие – (14) и (15), доказывающее условие

$$B^* \subseteq \mathrm{opref}\left(A^*\right) ,$$

т. е. $B \trianglelefteqslant A$ (или, если использовать «старые обозначения», $B^* \overset{\subseteq}{\infty} A^*$). □

С помощью двукратного применения теоремы 1 доказывается

Теорема 2: Если $A \cdot B = B \cdot A$, то $A \Diamond B$. □

Если же допустить возможность счётных множеств A и B (а также, возможно, счётного алфавита Σ), то доказательство утверждения получается очень громоздким; вряд ли имеет смысл приводить целиком, поскольку у автора нет *примеров применения* соответствующего результата для счётных множеств в других задачах. Как уже было отмечено выше, мы приводим только схему этого доказательства.

Итак, более сложное доказательство в общем случае совпадает с приведённым выше доказательством для конечных множеств – но усложняется в следующем.

Во-первых, на множестве бесконечных языков над алфавитом Σ^* задаётся специальный *частичный порядок*, обобщающий на случай бесконечных множеств A и / или B (а возможно и бесконечного алфавита Σ) отношение «содержит больше слов», использовавшееся нами при доказательстве утверждения в случае конечных языков. Заметим, что подобный частичный порядок можно считать аналогичным порядкам, рассматривавшимся в нескольких разделах «тройной» статьи [6], [7], [5]. При этом, не определяя подобный линейный порядок строго, рассмотрим один показательный пример: для любого алфавита Σ в языке Σ^* содержится «больше слов», чем в языке $\left(\Sigma^2\right)^*$. (Будем и далее употреблять такое сокращённое название упомянутого частичного порядка – «больше слов».)

Во-вторых, для слова $v \in B^l$, имеющего тот же смысл, что и в приведённом выше полном доказательстве теоремы 1, специальным образом выбирается достаточно большое число k. Показывается, что поскольку $A \ni \varepsilon$, при любых $j > i$ в языке A^j «больше слов», чем в языке A^i (последнее – аналог неравенства $\left|A^i\right| < \left|A^j\right|$ из доказательства утверждения 1).

И, в-третьих, на основе изложенных фактов доказывается, что в языке $A^k B^l \cap C$ «больше слов», чем в совпадающем с ним языке $B^l A^k \cap C$.

X. КОММУТИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ГИПОТЕЗЫ (Ѫ) – ПРИМЕНЕНИЕ ИНВЕРСНОГО МОРФИЗМА

В этом разделе мы приводим краткую формулировку самой гипотезы (Ѫ), после чего рассматриваем модифицированные условия коммутирования в случае её выполнения. Конкретных утверждений и теорем мы в этом разделе не формулируем – однако материал раздела описывает сведéние задачи к рассмотрению задачи аналогичной, но формулируемой для более простой ситуации, получаемой из исходных языков путём применения к ним специального инверсного морфизма.

Особо отметим слова «для более простой ситуации»: при применении инверсного морфизма число слов в каждом из рассматриваемых языков может увеличиваться – некоторые подробности см. далее. Однако, поскольку идёт «раскодирование» исходных языков [2], получаемую задачу, по-видимому, всегда стóит считать более простой.

Сама формулировка гипотезы приводится согласно [3] – но при этом ещё раз отметим, что имеется несколько эквивалентных альтернативных эквивалентных вариантов, и наиболее подробно о них сказано в [8].

Итак, **гипотеза (Ѫ)** *заключается в том*, что условие

$$A \Diamond B .$$

возможно *тогда и только тогда*, когда оба рассматриваемых конечных языка могут быть получены с помощью алгоритма, состоящего из следующих 3 шагов:

1) выбирается *некоторый* новый конечный алфавит;
2) над этим алфавитом рассматриваются два *некоторых* расширенных максимальных префиксных кода;
3) к этим двум расширенным максимальным префиксным кодам рименяется *некоторый* (причём обязательно *один и тот же в обоих случаях*) морфизм – переводящий слова над новым алфавитом в слова над алфавитом исходным.

При этом полученные морфические образы двух рассматриваемых расширенных максимальных префиксных кодов должны совпасть с двумя исходными конечными языками.

В предыдущих работах мы рассматривали несколько альтернативных (эквивалентных) формулировок этой гипотезы. Для построений настоящей статьи наиболее интересна следующая формулировка (приводим её согласно [8]).

[2] Иными словами – выполняется операция, обратная к определяемому обычным образом алфавитному кодированию.

Гипотеза Ѫ‴. Не существует пары (D, u), где

$$D \subseteq \Sigma^* \quad \text{и} \quad u \in \Sigma^*,\ u \notin D^*,$$

такой что:

- язык D – минимальный в своём классе эквивалентности;
- $(D \cup \{u\}) \ \Diamond\ D$. □

Примечание. Конкретные варианты формулировок условия минимальности языка неоднократно обсуждались в наших предыдущих публикациях. Здесь будем считать, что для некоторых языков $C, D \subseteq \Sigma^*$ условие $C \prec D$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|C\|_{\min} < \|D\|_{\min} .$$

Конечно, непосредственно на основе последнего неравенства нельзя утверждать, что в каждом классе эквивалентности существует *единственный* минимальный язык (который, согласно условия $\prec$, «меньше» всех остальных языков, входящих в этот же класс) – однако нам этого утверждения и не надо: повторим, что для всех дальнейших построений настоящей статьи можно предполагать, что

- $\prec$ означает, что минимальное по длине слово «меньшего» языка меньше по длине, чем минимальное по длине слово «большего» языка;

при этом последнее предположение не противоречит

- возможному существованию *нескольких различных* «минимальных» языков [3].

Считая гипотезу (Ѫ) вполняющейся, применим к каким-либо языкам A и B, удовлетворяющим условию (13), материал предыдущего раздела. Получаем, что над алфавитом Σ^* существует некоторый язык C, такой что

$$A, B \in mp^+(C) .$$

Или в альтернативной формулировке:

$$\exists\ h_C^{-1}(A),\ h_C^{-1}(B) \in mp^+(\Delta_C) .$$

Заметим, что хотя для некоторого $u \in A \cup B$ язык $h^{-1}(u)$ может при этом содержать более одного слова (т. к. морфизм h^{-1}, соответствующий языку C, не обязательно является инъективным); подробнее см. часть I настоящей статьи, т. е. [1], – в частности то, что в первой части было названо «задачей Пэна».

Однако, несмотря на возможную неинъективность указанного морфизма, языки

$$A' = h^{-1}(A) \quad \text{и} \quad B' = h_C^{-1}(B)$$

при этом обязательно удовлетворяют аналогичному соотношению:

$$A'B' = B'A' \tag{16}$$

[3] Заметим, что в отличие от предыдущих вариантов употребления слова «минимальный» применительно к языкам – здесь это слово специально употреблено в кавычках: при строгом изложении необходимо формально определить возможность существования нескольких различных «минимальных» элементов супермоноида – чего мы в настоящей статье делать не будем.

Однако для реальных рассматриваемых нами подмоноидов глобального надмоноида свободного моноида (т. е. подмножеств множества формальных языков) такое наличие нескольких «минимальных» элементов также невозможно – однако строгих доказательств последнего факта мы также не приводим. Отметим лишь его возможную *связь* с гипотезой (Ѫ), немного об этом см. далее.

Условие (16) очевидно; его можно легко доказать путём применения к рассматриваемым языкам морфизма h_C.

Итак, мы можем применять к языкам A и B, удовлетворяющим равенству (13), специальный инверсный морфизм, получая аналогичное соотношение (16) для новых, «раскодированных» языков A' и B'. Более того, известно, что каждый из языков A' и B' содержит в качестве подмножества какой-нибудь максимальный префиксный код над алфавитом Δ_C. Возможные алгоритмы выбора подходящего множества C, необходимого для построения соответствующего инверсного морфизма h_C, обсуждались в процитированных выше статьях.

XI. ВЫПОЛНЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ (Ѫ) В СЛУЧАЕ ПРЕФИКСНЫХ ЯЗЫКОВ

В этом разделе рассматриваются условия выполнения гипотезы (Ѫ) в префиксном случае; более того, в условиях приводимой здесь теоремы достаточно, чтобы префиксым был только один из коммутирующих языков (либо один из языков рассматриваемого класса эквивалентности). Будем далее считать, что таковым является язык A.

Теорема 3: Если $Pr(A)$, то гипотеза (Ѫ) для языка A выполняется [4].

Примечание. Согласно приведённому выше варианту (Ѫ‴), выполнение гипотезы для языка A означает, что:

- можно считать язык A минимальным в своём классе эквивалентности;
- для него *не существует* такого слова $v \in \Sigma^*$ (причём $v \notin A^*$), что $(A \cup \{v\}) \ \Diamond\ A$.

Доказательство. Можно считать, что $A \neq \varnothing$ и $\varepsilon \notin A$.

Пусть гипотеза (Ѫ) не выполняется, и требуемое слово v существует. По определению отношения $\Diamond$ получаем, что

$$A^*|^v \supseteq A^*.$$

Рассмотрим язык

$$\mathcal{A} = \big\{ u \in \Sigma^* \,\big|\, (\exists\, w_1 \in A^*, w_2 \in A) \\ (w_1 \in opref(v) \,\&\, v \in opref(w_1 w_2)) \big\}.$$

Понятно, что согласно введёным обозначениям:

- $\mathcal{A} \neq \varnothing$;
- $\mathcal{A} \prec A$ (этот факт проще всего объясняется на основе обязательного уменьшения длины минимального слова при переходе от A к $\mathcal{A}$, поскольку из условия $v \notin A^*$ следует, что $v \neq \varepsilon$).

Кроме того,

$$A^* \overset{\subseteq}{\infty} \mathcal{A} \cdot A^* \tag{17}$$

(поскольку слово u было выбрано именно для выполнения условия (17)).

Теперь воспользуемся условием $Pr(A)$ – откуда получаем $Pr(\mathcal{A})$, а из последнего и условия (17) получаем,

[4] Несколько вариантов доказательства того факта, что *из выполнения условий префиксности рассматриваемых языков следует выполнение гипотезы (Ѫ)*, было приведено в предыдущих публикациях – но, в основном, в 1990-х годах. Более того, можно даже считать, что такое доказательство является следствием («королларием») материала раздела IX настоящей статьи. Здесь приводится простой вариант доказательства – использующий введённые выше обозначения.

что выполнено и более жёсткое (по сравнению с (17)) условие, а именно

$$A^* \mathrel{\tilde{\infty}} \mathcal{A} \cdot A^*. \tag{18}$$

Из последнего, применяя свойства отношения эквивалентности [5], получаем

$$A^* \mathrel{\tilde{\infty}} \mathcal{A} \cdot A^* \mathrel{\tilde{\infty}} \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \cdot A^* \mathrel{\tilde{\infty}} \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \cdot A^* \ldots ,$$

из чего, вследствие $A \neq \varnothing$ и $\varepsilon \notin A$ [6], получаем

$$A^* \mathrel{\tilde{\infty}} \mathcal{A}^*, \quad \text{т.е.} \quad A \mathrel{\Diamond} \mathcal{A}.$$

Последнее же противоречит сделанному предположению о минимальности выбранного языка A – а полученное противоречие доказывает теорему. □

Таким образом, рассматриваемые задачи – как коммутирование, так и любое из следствий выполнения гипотезы ($\overline{\underline{X}}$), – в случае префиксных языков можно упростить. Как правило, такое упрощение заключается в применении к рассматриваемому языку (языкам) инверсного морфизма и рассмотрения таких же задач, но уже для языков, принадлежащих для нового алфавита Δ классу $\mathrm{mp}^+(\Delta)$; более того, вследствие префиксности языков можно всегда говорить о классе $\mathrm{mp}(\Delta)$ – т.е. о максимальных префиксных кодах, [10], [12] и др. Мы будем возвращаться к этим вопросам (к «раскодированию», т.е. к возможности применения специально построенного инверсного морфизма) в разделах начиная с XIII – при этом в следующем разделе XII мы в доказываемой там теореме обошлись и без такого инверсного морфизма.

XII. КОММУТИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ ПРЕФИКСНЫХ ЯЗЫКОВ

В этом разделе мы ещё более ужесточаем условия, наложенные на языки A и B (по сравнению с условиями, рассматривавшимися в разделе X и ранее) – т.е. рассматриваем случай, когда оба коммутирующих языка являются префиксными. Формально – мы считаем, что для равенства (13) выполнены условия $\mathrm{Pr}(A)$ и $\mathrm{Pr}(B)$.

Теорема 4: Если (13), $\mathrm{Pr}(A)$ и $\mathrm{Pr}(B)$ [7], то

$$(\exists\, C \in \Sigma^*,\ k, l \in \mathbb{N}_0)\ (A = C^k,\ B = C^l)\,.$$

Доказательство [8]. Если выполнено равенство $A = B$, то доказываемое утверждение верно при

$$C = A = B \quad \text{и} \quad k = l = 1\,.$$

А если $A = \{\varepsilon\}$ (в префиксном случае это равносильно тому, что $A \ni \varepsilon$), то утверждение верно при

$$C = B\,, \quad k = 0\,, \quad l = 1\,;$$

аналогично для $B = \{\varepsilon\}$.

Рассмотрев эти случаи, ниже в доказываемой теореме мы можем предполагать, что $A \neq B$, причём ни одно из этих множеств не содержит ε (т.е. в нашем случае не равно $\{\varepsilon\}$). При этом ограничении выполнено по крайней мере одно из двух следующих утверждений:

$$(\exists u \in A,\ v \in B)\ (u \in \mathrm{opref}(v))\,, \tag{19}$$

$$(\exists u \in A,\ v \in B)\ (v \in \mathrm{opref}(u)) \tag{20}$$

(мы пока не утверждаем, что выполнено *ровно* одно из них).

Пусть (19) (если (20), то рассуждения аналогичны). Для каких-либо выбранных согласно условию (19) слов u и v рассмотрим $w \in \Sigma^*$ такое, что $v = uw$. Выполнено условие

$$v \cdot A = uw \cdot A \subseteq B \cdot A = A \cdot B\,,$$

поэтому $w \cdot A \subseteq B$.

Объединение *всех* слов w, которые могут быть выбраны по зафиксированному $u \in A$ и некоторому удовлетворяющему (19) слову $v \in B$, обозначим D. Согласно вышеизложенному, $DA \subseteq B$; поэтому в случае $DA \neq B$ условие (13) не выполняется – вследствие $\mathrm{Pr}(B)$. Итак,

$$D \cdot A = B\,, \tag{21}$$

причём условие (20) не выполняется.

Соглано (13) и (21), выполнено равенство

$$A \cdot D \cdot A = D \cdot A \cdot A\,,$$

поэтому вследствие $\mathrm{Pr}(A)$ верно следующее:

$$A \cdot D = D \cdot A \quad \text{и} \quad \mathrm{Pr}(D)\,.$$

Таким образом, условия доказываемой теоремы выполняются и для языков A и D (вместо A и B), причём, поскольку $\varepsilon \notin A \cup B$, верно также следующее:

$$\|A \cup D\|_{\min} < \|A \cup B\|_{\min}\,. \tag{22}$$

(для получения последнего мы, среди прочего, воспользовались материалом приведённого в части I раздела III).

Обозначим теперь

$$A_0 = A_1 = A\,, \quad B_0 = B\,, \quad B_1 = D\,.$$

Если $A_1 \neq B_1$, то *применив всё изложенное выше* к языкам A_1 и B_1, получим некоторые A_2 и B_2, *и так далее*. При этом согласно:

- вводимым таким образом обозначениям языков A_i и B_i;
- а также обобщению утверждения (21) (переписываемому в общем случае – т.е. для вновь вводимых языков – либо в виде $B_{i_1} A_i = B_i$, либо в виде $B_{i_1} A_i = B_i$) –

мы получаем, что для всех возможных i выполнены неравенства

$$\|A_{i+1} \cup B_{i+1}\|_{\min} < \|A_i \cup B_i\|_{\min}\ ,$$

аналогичные неравенству (22).

Из приведённых неравенств следует, что описанный *процесс* построения пар множеств A_i и B_i *конечен*, т.е. должно существовать некоторое число $m \in \mathbb{N}$, для которого верно:

$$A_0 \neq B_0,\ \ A_1 \neq B_1,\ \ldots,\ A_{m-1} \neq B_{m-1},\ \ A_m = B_m\,.$$

[5] А именно – заменяя в правой части эквивалентности (18) вхождение A^* на всю правую часть. Такую замену можно провести любое число раз.

[6] Выполнение условия $\varepsilon \in A$ возможно – но это несколько усложнит доказательство.

[7] На основе сказанного выше можно показать, что последнее условие – а именно, $\mathrm{Pr}(B)$, – обязательным не является, т.е. теорема остаётся верной и без такого требования. Однако вряд ли это принципиально в конкретных прикладных задачах (поскольку при рассмотрении префиксного подмоноида супермоноида все рассматриваемые языки обладают свойством префикса) – и поэтому мы приводим именно такой вариант формулировки.

[8] Ср. начало этого доказательства с доказательствами утверждений 4 и 5 части I; также см. приведённое там замечание. Отметим однако, что непосредственно упомянутыми утверждениями мы воспользоваться не можем.

Для выбранного таким образом значения m обозначим

$$C = A_m = B_m \,.$$

Согласно методу построения C,

$$\{A_{m-1}, B_{m-1}\} = \{\, C, C^2 \,\} \,,$$

откуда

$$\{A_{m-2}, B_{m-2}\} \subseteq \{\, C, C^2, C^3 \,\} \,,$$

и так далее. Таким образом, для некоторых натуральных k и l выполняются равенства

$$A = C^k \,, \quad B = C^l \,.$$

Ранее уже был рассмотрен случай, когда одно из множеств равно $\{\varepsilon\}$; объединяя эти два случая, получаем, что для выбранного нами языка C

$$\big(\exists k, l \in \mathbb{N}_0\big) \,\big(A = C^k, B = C^l\big) \,,$$

что и требовалось доказать. □

XIII. Случай префиксных языков: числовая интерпретация

В случае конечного алфавита Σ доказанная в предыдущем разделе теорема 4 имеет следующую *числовую интерпретацию*.

Во-первых, согласно теореме 2, можно считать, что языки A и B содержат некоторые максимальные префиксные коды – то есть

$$A, B \in mp^+(\Sigma) \,;$$

см. на эту тему [9], [10], [11], [12] [9], а также материал следующих разделов. А поскольку мы рассматриваем случай префиксных языков, то максимальными префиксными кодами должны являться сами языки A и B, т. е.

$$A, B \in mp(\Sigma) \,.$$

Во-вторых, упорядочим алфавит Σ, т. е. рассмотрим на нём какое-нибудь отношение строгого порядка $\prec$: если

$$\Sigma = \{\, a_1, a_2, \ldots, a_n \,\} \,,$$

то положим [10], например,

$$a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n .$$

С помощью введённого отношения $\prec$ упорядочим и слова из всего множества Σ^* – т. е. будем рассматривать их в лексикографическом (алфавитном) порядке; строгое определение такого упорядочивания приведено, например, в [13]. Любые языки будем здесь рассматривать только в указанном порядке, т. е. пусть наши множества слов A и B таковы:

$$A = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \,, \text{ где } u_1 \prec u_2 \prec \cdots \prec u_k \,,$$

$$B = (v_1, v_2, \ldots, v_l) \,, \text{ где } v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_l \,.$$

Специально отметим, что мы употребляем круглые скобки – поскольку рассматриваем здесь A и B как *упорядоченные* множества, т. е. конечные последовательности. Соответствующие последовательности длин слов обозначим

$$\mathcal{D}(A) = \big(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_k|\big) \,, \; \mathcal{D}(B) = \big(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_l|\big) \,.$$

Несложно убедиться, что поскольку порядок букв алфавита заранее зафиксирован, то произвольное множество $A \in \mathrm{mp}(\Sigma)$ *однозначным образом восстанавливается по построенной указанным способом последовательности длин* $\mathcal{D}(A)$ (т. е. описанное отображение из множества максимальных префиксных кодов в множество числовых последовательностей является инъекцией) [11].

По определению максимальных префиксных кодов несложно показать, что выполнено и условие

$$A \cdot B \in \mathrm{mp}(\Sigma)$$

(т. е. множество максимальных префиксных кодов представляет собой подмоноид рассматриваемого глобального надмоноида свободного моноида; немного подробнее см. [10]). Поэтому мы можем употреблять обозначение $\mathcal{D}(A \cdot B)$ в только что определённом выше смысле. При этом легко доказывается, что

$$\mathcal{D}(A \cdot B) = \big(|u_1| \cdot |v_1|, \ldots, |u_1| \cdot |v_l|,$$
$$|u_2| \cdot |v_1|, \ldots, |u_2| \cdot |v_l|, \;\ldots,\; |u_k| \cdot |v_1|, \ldots, |u_k| \cdot |v_l|\big) \,.$$

А отсюда следует, что условие (13) в рассматриваемом префиксном случае равносильно равенству

$$\mathcal{D}(A \cdot B) = \mathcal{D}(B \cdot A) \,.$$

Конкретные примеры выполнения последнего равенства (и, следовательно, коммутирования префиксных языков) подобрать несложно – автор собирается привести такие примеры в одной из следующих публикаций. Немного подробнее об этом сказано в заключении.

XIV. Заключение

Кратко сформулируем направления дальнейшей работы – возможные публикации, связанные с рассмотренной в настоящей статье тематикой.

Во-первых, отметим следующее. Как уже было сказано выше, в материал статьи автор не стал включать результаты, связанные с 2-элементными языками; причина такого невключения следующая.

По-видимому, рассмотрение 2-элементных языков нужно начинать с доказательства выполнения для этого случая гипотезы (Ѫ) (конкретно – выполнения этой гипотезы, если мы откуда-либо знаем, что в рассматриваемом классе эквивалентности имеется хотя бы один язык, содержащий не более 2 слов). Однако можно рассматривать и обобщения этой задачи, заменив 2 (количество элементов в некотором известном нам языке класса) на большее число. Действительно, согласно предыдущим

[9] К последней статье предполагается продолжение, поскольку в ней был только определён соответствующий подмоноид глобального надмоноида свободного моноида – но практически не были рассмотрены его свойства. При этом в предыдущих работах, посвящённых префиксному подмоноиду, рассматривались только самые общие его свойства – представляющие только небольшой интерес для задач, которые мы собираемся рассматривать в дальнейшем.

[10] Употребляемое в этом разделе отношение строгого порядка $\prec$ имеет совсем иной смысл, чем обозначнное так же отношение частичного порядка, которое употреблялось в предыдущих разделах. Однако подобные одинаковые обозначения не должны вызывать недоразумения.

[11] При этом инъективного отображения из множества последовательностей длин в множество максимальных префиксных кодов, конечно, не существует. Более того, последнее утверждение верно и для множеств последовательностей длин, удовлетворяющих дополнительному условию $ci(A) = 1$, являющемуся необходимым для каждого максимального префиксного кода.

процитированным публикациям, для некоторого языка вида A^* мы получаем итерационное дерево морфизма [12], содержащее конечное число классов эквивалентности, – и, следовательно, описывающие такой же язык конечные автоматы (детерминированный PRI и недетерминированный NSPRI, см. об этих автоматах процитированные выше статьи и последнюю публикацию [17]). На основе этого факта (наличия соответствующего итерационного дерева морфизма) можно сконструировать выражения входящего в различные варианты формулировки гипотезы (Ѫ) слова v (обозначение v согласовано с формулировками гипотезы) через элементы рассматриваемого языка – и *осуществление подобного построения будет означать выполнение гипотезы* (Ѫ). По-видимому, даже доказательство выполнения этой гипотезы для 3-элементного языка [13] представляет большой интерес для комплекса рассматриваемых нами вопросов: можно постараться *описать* классы эквивалентности, получающиеся при построении итерационного дерева морфизма.

И, *во-вторых*, имеется ещё одна «срочная» тема – связанная с материалом нескольких предыдущих разделов, особенно раздела XIII. Это – рассмотрение подмноноида глобального надмоноида свободного моноида, включающего максимальные префиксные коды; как было отмечено выше, это рассмотрение начато в [12]. Общий план статьи предполагается примерно таким:

- представление максимального префиксного кода как последовательности – т. е. описание соответствующего инъективного отображения;
- варианты «сжатия» подобного представления – и для каждого варианта статистический подсчёт его качества [14];
- единственность разложения множества максимальных префиксных кодов «на простые множители»;
- конкретные примеры выполнения условия коммутирования префиксных языков;
- вследствие последнего – возможное описание гомоморфизма получаемой полугруппы в свободную полугруппу с бесконечным числом образующих;
- поскольку вариантов подобного гомоморфизма бесконечно много – описание их всех с помощью какой-либо алгебраической структуры, а также описание конкретного бесконечного графа для некоторого такого варианта;
- описание *полиномиального* алгоритма разложения некоторого максимального префиксного кода в произведение двух максимальных префиксных кодов (если такое разложение возможно).

(Можно считать, что приведённый план одновременно представляет собой описание некоторых возможных для дальнейшего решения задач, связанных с рассмотренной в статье тематикой.)

[12] Напомним, что в процитированных выше статьях мы рассматривали *несколько вариантов* итерационных деревьев морфизмов; здесь имеется в виду простейший из них.

[13] Доказательство её выполнения для 2-элементного языка на самом деле можно вывести из материала настоящей статьи – однако мы не будем этого делать.

[14] Возможная проблема при таком подсчёте возникает вовсе не в определении качества конкретного варианта сжатия (это делается каким-либо естественным образом) – а в конкретных алгоритмах усреднения. Для таких алгоритмов необходимо рассматривать связанные с ними *алгоритмы генерации исходных данных* – что с рассматриваемыми в статье задачами связано мало.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа частично поддержана грантом научной программы китайских университетов “Higher Education Stability Support Program” (раздел “Shenzhen 2022 – Science, Technology and Innovation Commission of Shenzhen Municipality”).

Список литературы

[1] Мельников Б. *О связи специальных бинарных отношений с условиями коммутирования языков. Часть I. Делители в глобальном надмоноиде* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 7. – P. 21–29.

[2] Melnikov B. *The equality condition for infinite catenations of two sets of finite words* // International Journal of Foundation of Computer Science. – 1993. – Vol. 4. No. 3. – P. 267–274.

[3] Мельников Б. *О комплексе задач исследования необходимых условий равенства бесконечных итераций конечных языков* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 1. – P. 1–12.

[4] Brosalina A., Melnikov B. *Commutation in global supermonoid of free monoids* // Informatica (Lithuanian Academy of Sciences). – 2000. – Vol. 11. No. 4. – P. 353–370.

[5] Мельников Б.Ф. Полурешётки подмножеств потенциальных корней в задачах теории формальных языков. Часть III. Условие существования решётки // International Journal of Open Information Technologies. 2022. – Vol. 10, No. 7. – P. 1–9.

[6] Мельников Б.Ф. Полурешётки подмножеств потенциальных корней в задачах теории формальных языков. Часть I. Извлечение корня из языка // International Journal of Open Information Technologies. 2022. – Vol. 10, No. 4. – P. 1–9.

[7] Мельников Б.Ф. Полурешётки подмножеств потенциальных корней в задачах теории формальных языков. Часть II. Построение инверсного морфизма // International Journal of Open Information Technologies. 2022. – Vol. 10, No. 5. P. 1–8.

[8] Мельников Б., Мельникова А. *Применение лепестковых конечных автоматов для проверки выполнения частного случая гипотезы Zyu (для заданного конечного языка)* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 3. – P. 1–11.

[9] Melnikov B., Kashlakova E. *Some grammatical structures of programming languages as simple bracketed languages* // Informatica (Lithuanian Academy of Sciences). – 2000. – Vol. 11. No. 4. – P. 441–454.

[10] Мельников Б. *Описание специальных подмоноидов глобального надмоноида свободного моноида* // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2004. – № 3. – С. 46–56.

[11] Алексеева А., Мельников Б. *Итерации конечных и бесконечных языков и недетерминированные конечные автоматы* // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. – 2011. – № 3 (17). – С. 30–33.

[12] Мельникова А. *Множество максимальных префиксных кодов и соответствующая полугруппа* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 8. – P. 3–7.

[13] Липский В. *Комбинаторика для программистов*. – М., Мир. – 1988. – 200 с.

[14] Корабельщикова С., Мельников Б. *Итерации языков и максимальные префиксные коды* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 106–120.

[15] Мельников Б., Мельникова А. *Бесконечные деревья в алгоритме проверки условия эквивалентности итераций конечных языков. Часть I* // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. – Vol. 9. No. 4. – P. 1–11.

[16] Мельников Б., Мельникова А. *Бесконечные деревья в алгоритме проверки условия эквивалентности итераций конечных языков. Часть II* // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. – Vol. 9. No. 5. – P. 1–11.

[17] Мельников Б., Мэн Линцянь. *Восемь вариантов конечных автоматов для проверки выполнения отношения покрытия итераций двух конечных языков. Часть I* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 11. – P. 1–9.

Борис Феликсович МЕЛЬНИКОВ,
профессор Университета МГУ – ППИ в Шэньчжэне
(`http://szmsubit.ru/`),
email$_1$: `bormel@smbu.edu.cn`,
email$_2$: `bf-melnikov@yandex.ru`,
mathnet.ru: `personid=27967`,
elibrary.ru: `authorid=15715`,
scopus.com: `authorId=55954040300`,
ORCID: `orcidID=0000-0002-6765-6800`.

On the connection of special binary relations with conditions of commuting languages. Part II. The main statements

Boris Melnikov

***Abstract*—The paper discusses various statements describing the relationship of special binary relations (defined and investigated in some our previous works binary relations of coverage and equivalence at infinity) with the conditions of commutation of languages. Generalizing, we can say that some simply formulated properties related to the use of the product operation (concatenation) of formal languages are considered; in this case, languages are not necessarily (but usually) finite.**

Among the problems under consideration is the study of the conditions of equality of degrees of two languages. It is proved, for example, that in the case of prefix languages, such equality is equivalent to the presence of a common root in the considered sets, defined for the concatenation operation in the usual way.

Some auxiliary statements related to the possible choice of its left divisor for a given language are given. Especially those of the results obtained about the left divisor are considered, which can be successfully reformulated if the languages considered in the statements can be obtained as a result of the image of some morphisms. The conditions for the presence of a common root in the global supermonoid for some of its two elements are also considered.

After that, various consequences of the condition of possible commutation of two languages are considered: first, in the general case; then, when executing a special hypothesis, which we called the “Zyu hypothesis” and considered in some previous publications; and then, when the prefix condition of the considered languages is met.

In the conclusion, some interesting examples are given, as well as the problems that have not yet been solved are formulated.

In the proposed part II of the paper, the main results are considered, starting with the formulation of the conditions for commuting languages for the general (i.e. “non-prefix”) case.

***Keywords*—formal languages, iterations of languages, morphisms, binary relations, infinite trees, algorithms.**

References

[1] Melnikov B. *On the connection of special binary relations with conditions of commuting languages. Part I. Divisors in the global supermonoid* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 7. – P. 21–29. (In Russian.)

[2] Melnikov B. *The equality condition for infinite catenations of two sets of finite words* // International Journal of Foundation of Computer Science. – 1993. – Vol. 4. No. 3. – P. 267–274.

[3] Melnikov B. *On the complex of problems for the study of the necessary conditions for the equality of infinite iterations of finite languages* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 1. – P. 1–12. (In Russian.)

[4] Brosalina A., Melnikov B. *Commutation in global supermonoid of free monoids* // Informatica (Lithuanian Academy of Sciences). – 2000. – Vol. 11. No. 4. – P. 353–370. (In Russian.)

[5] Melnikov B. *Semi-lattices of the subsets of potential roots in the problems of the formal languages theory. Part III. The condition for the existence of a lattice* // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – Vol. 10. No. 7. – P. 1–9. (In Russian.)

[6] Melnikov B. *Semi-lattices of the subsets of potential roots in the problems of the formal languages theory. Part I. Extracting the root from the language* // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – Vol. 10. No. 4. – P. 1–9. (In Russian.)

[7] Melnikov B. *Semi-lattices of the subsets of potential roots in the problems of the formal languages theory. Part II. Constructing an inverse morphism* // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – Vol. 10. No. 5. – P. 1–8. (In Russian.)

[8] Melnikov B., Melnikova A. *The use of petal finite automata to verify the fulfillment of a special case of the Zyu hypothesis (for a given finite language)* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 3. – P. 1–11. (In Russian.)

[9] Melnikov B., Kashlakova E. *Some grammatical structures of programming languages as simple bracketed languages* // Informatica (Lithuanian Academy of Sciences). – 2000. – Vol. 11. No. 4. – P. 441–454.

[10] Мельников Б. *Description of special submonoids of the global supermonoid of the free monoid* // News of higher educational institutions. Mathematics. – 2004. – No. 3. – P. 46–56. (In Russian.)

[11] Alekseeva A., Melnikov B. *Iterations of finite and infinite languages and nondeterministic finite automata* // Vector of Science of Togliatti State University. – 2011. – No. 3 (17). – P. 30–33. (In Russian.)

[12] Melnikova A. *The set of maximal prefix codes and the corresponding semigroup* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. 11. No. 8. – P. 3–7. (In Russian.)

[13] Lipski W. *Combinatorics for programmers*. – Moscow, Mir. – 1988. – 200 p. (In Russian.)

[14] Korabelshchikova S., Melnikov B. *Iterations of languages and maximum prefix codes* // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. – 2015. – No. 2. – P. 106–120. (In Russian.)

[15] Melnikov B., Melnikova A. *Infinite trees in the algorithm for checking the equivalence condition of iterations of finite languages. Part I* // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. – Vol. 9. No. 4. – P. 1–11. (In Russian.)

[16] Melnikov B., Melnikova A. *Infinite trees in the algorithm for checking the equivalence condition of iterations of finite languages. Part II* // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. – Vol. 9. No. 5. – P. 1–11. (In Russian.)

[17] Melnikov B., Meng Lingqian. *Eight variants of finite automata for checking the fulfillment of the coverage relation of iterations of two finite languages. Part I* // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Vol. ??. No. ??. – P. ??–??. (In Russian.)

Boris MELNIKOV,
Professor of Shenzhen MSU – BIT University, China
(`http://szmsubit.ru/`),
email$_1$: `bormel@smbu.edu.cn`,
email$_2$: `bf-melnikov@yandex.ru`,
mathnet.ru: `personid=27967`,
elibrary.ru: `authorid=15715`,
scopus.com: `authorId=55954040300`,
ORCID: `orcidID=0000-0002-6765-6800`.