

# Исследование развития межконфессиональных отношений на основе математического аппарата марковских процессов

А.С. Леонтьев, К.В. Гусев, С.А. Головин

**Аннотация**— Проведен социологический опрос, включающий вопросы, характеризующие уровень религиозного сознания россиян и состояние межконфессиональных отношений в стране. Ответы на вопросы, касающиеся отношения к религии и вероисповеданию опрошенных, представляются в форме матриц перетоков. На основе матриц перетоков рассчитываются матрицы частотных распределений, а также матрицы вероятностей переходов. Элементы матриц переходов практически не зависят от времени и характеризуют устойчивые сформировавшиеся межконфессиональные отношения в России. Это обстоятельство и позволяет провести формализованное описание их развития в виде дискретных марковских цепей, для исследования которых существует хорошо разработанный математический аппарат. Для дискретной, неприводимой апериодической цепи Маркова с конечным числом состояний всегда существуют предельные вероятности состояний, не зависящие от начального распределения вероятностей состояний. Это фундаментальное свойство и используется при разработке методики исследования межконфессиональных отношений. Предложена методика использования марковских процессов для прогнозирования уровня религиозного сознания и межконфессиональных отношений в России. Определены по результатам опроса матрицы переходов дискретных марковских процессов и предложена процедура регуляризации матриц перехода, позволяющая существенно увеличить точность прогнозов. На основе марковских моделей получены прогнозные значения показателей, характеризующих изменение религиозного сознания и межконфессиональных отношений, а также на основе методов математической статистики определены интервальные оценки прогнозных значений этих показателей.

**Ключевые слова**—Межконфессиональные отношения, религиозное сознание, социологический опрос, марковские процессы, прогнозирование, матрицы переходов, доверительные интервалы, собственный вектор, регуляризация задачи прогнозирования.

Статья получена 9 августа 2023.

К.В. Гусев, МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия (e-mail: k\_gusev@mirea.ru)

А.С. Леонтьев, МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия (e-mail: leontev@mirea.ru)

С.А. Головин МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия (e-mail: s\_golovin@mirea.ru)

## I. ВВЕДЕНИЕ

Научные исследования, связанные с такой формой общественного сознания как религия, всегда были и остаются актуальными для нашей многонациональной и многоконфессиональной страны. Особенно важны они сейчас, в период кардинальных социально-экономических и общественно-политических перемен, либерализации всех форм социальных отношений. В современной России религиозные организации начинают играть существенную общественную роль, превращаясь в политический фактор [1, 2, 3, 4, 5].

Проводимые в последние годы исследования в области изучения религиозного сознания и межконфессиональных отношений идентифицируют, в основном, их текущее состояние, его ретроспективные изменения и обуславливающие эти изменения причины. Что касается работ, связанных с перспективами развития религиозного сознания и межконфессиональных отношений, то сегодня они представлены значительно слабее и опираются, в основном, на прямые методы оценки мнений респондентов и специалистов [6, 7].

В работе предложено использование марковских процессов для прогнозирования уровня религиозного сознания и межконфессиональных отношений в России. С этой целью разработана социологическая анкета, по которой проведен опрос порядка 6000 респондентов 78-ми субъектов РФ. В предложенной респондентам анкете, помимо ряда социально-демографических вопросов, вопросов о политических предпочтениях респондентов, было задано одиннадцать вопросов, характеризующих уровень религиозного сознания россиян и состояние межконфессиональных отношений в стране.

Ниже эти вопросы представлены. В целях компактности изложения они приведены без вариантов ответов и без описания некоторой специфики самого опроса:

1. Каковы, на Ваш взгляд, отношения между людьми разных вероисповеданий в городе (сельском районе), в котором Вы живете?

2. Как изменилось Ваше отношение к религии за

последние годы?

3. Какие изменения произошли, по Вашим наблюдениям, в отношениях между людьми разных религий, конфессий в Вашем городе (сельском районе)?

4. Если Вы считаете, что отношения на религиозной почве в Вашем городе (сельском районе) в последнее время остаются напряженными или ухудшились, то что, по Вашему мнению, является причиной этого?

5. Что, по Вашему мнению, в наибольшей степени способствует обострению отношений между представителями различных вероисповеданий в Вашем городе (сельском районе)?

6. Как Вы считаете, Вы готовы или не готовы отстаивать свою веру?

7. Как Вы считаете, возможен ли серьезный конфликт на религиозной почве в Вашем городе (сельском районе)?

8. Как изменилось Ваше вероисповедание за последние годы?

9. Если Ваше вероисповедание изменилось, то почему?

10. Считаете ли Вы, что интересы представителей Вашей религии, конфессии в нынешней России ущемлены?

11. Как Вы относитесь к тому, если в Вашей семье появится представитель другого вероисповедания (муж, жена, зять, невестка или др.)?

Все перечисленные выше вопросы, кроме четвертого и пятого, допускают лишь один ответ из заданных в анкете. По четвертому и пятому вопросам возможны несколько ответов из предложенных.

Совокупность ответов респондентов позволяет оценить текущее состояние по всем заложенным в вопросах показателям в виде соответствующих частот ответов на вопросы, представленных десятичной дробью или ее процентным выражением.

## II. ФОРМАЛИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ РЕЛИГИОЗНОГО СОЗНАНИЯ И МЕЖКОНФЕССИОНАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ В ВИДЕ ДИСКРЕТНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Принципиальными с точки зрения получения прогнозных оценок являются два базовых показателя – отношение к религии, т.е. веры - неверия в Бога респондентов, и вероисповедание опрашиваемых. Эти показатели определяются с помощью второго и восьмого вопросов, отличающихся от других тем, что ответы на них заданы в форме матриц перетоков  $\|M\| = \|m_{ij}\|$ . На основе матриц перетоков  $\|M\| = \|m_{ij}\|$  рассчитываются матрицы совместных частотных распределений  $\|F\| = \|f_{ij}\|$ , а также матрицы вероятностей переходов  $\|P\| = \|p_{ij}\|$ . Элементы матрицы переходов  $\|p_{ij}\|$  являются квазиинвариантами, то есть практически не зависят от времени и характеризуют устойчивые сформировавшиеся межконфессиональные отношения в России. Это обстоятельство и позволяет провести формализованное описание их развития в виде дискретных марковских цепей, для исследования которых существует хорошо разработанный математический аппарат. Ответы на остальные вопросы представляются векторами частот. Матрицы перетоков  $\|M\|$  и совместных частотных распределений  $\|F\|$

построены по принципу: «был» (боковик) – «стал/остался» (шапка). Учитывая, что обработка матриц  $\|F\|$ , построенных на основе ответов на второй и восьмой вопросы анкеты одинакова, рассмотрим вначале работу с более компактной матрицей  $\|F\|$ , соответствующей второму вопросу (таблица 1).

Таблица 1. Матрица частотных распределений (в процентах)

| Ваше отношение                          | Стал/остался верующим | Стал/остался неверующим | Стал/остался колеблющимся между верой в Бога и неверием | Затрудняюсь ответить |
|---|-----------------------|-------------------------|---|----------------------|
| Был верующим                            | 47,7                  | 1,4                     | 1,0   | 1,2                  |
| Был неверующим                          | 4,6                   | 16,4                    | 3,2   | 0,7                  |
| Колебался между верой в Бога и неверием | 3,2                   | 0,3                     | 8,6   | 0,4                  |
| Затруднялся ответить                    | 1,1                   | 0,3                     | 0,4   | 9,5                  |

Из матрицы совместного частотного распределения сложением ее элементов по столбцам рассчитывается текущий («стал/остался») вектор-столбец  $\overline{B^0}$ , компоненты которого  $b_i^0 (i = 1, 4)$  соответствуют доле респондентов верующих в Бога, неверующих в Бога, колеблющихся между верой и неверием и затрудняющихся с ответом. Значение компонент этого вектора приведены в первом столбце таблицы 3.

Приватно из этой же матрицы сложением ее элементов по строкам можно получить вектор  $\overline{B^{-1}}$ , характеризующий состояние веры в «последние годы».

Однако заметим, что вектор  $\overline{B^{-1}}$ , интересный лишь в смысле сравнения его с  $\overline{B^0}$ , т.е. оценки «короткой» ретроспективы, в дальнейших выкладках не участвует.

На втором этапе прямым подсчетом совместных частот определяется матрица вероятностей переходов  $\|P_{ij}\|$

(таблица 2), где элемент матрицы  $p_{ij} (i = \overline{1, 4},$

$j = \overline{1, 4})$  означает условную вероятность (частоту) перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  (веры – неверия в Бога, колебания между верой и неверием и затруднения с ответом). Будем считать, что матрица  $\|P_{ij}\|$ , используемая в данной работе в качестве матрицы перехода марковской цепи, стационарна, т.е. не изменяется во времени.

Таблица 2. Матрица вероятностей переходов (верующие–неверующие)

| Ваше отношение                          | Стал/остался верующим | Стал/остался неверующим | Стал/остался колеблющимся между верой в Бога и неверием | Затрудняюсь ответить |
|---|-----------------------|-------------------------|---|----------------------|
| Был верующим                            | 0,930                 | 0,027                   | 0,020   | 0,023                |
| Был неверующим                          | 0,185                 | 0,659                   | 0,128   | 0,028                |
| Колебался между верой в Бога и неверием | 0,256                 | 0,024                   | 0,688   | 0,032                |
| Затруднялся ответить                    | 0,097                 | 0,027                   | 0,035   | 0,841                |

Для марковских процессов вероятность перейти из текущего состояния в то же или какое-либо другое состояние (из конечного множества допустимых состояний) зависит только от текущего состояния и не

зависит от состояний в более ранние моменты времени. Это свойство исследуемых процессов, называемое свойством марковости, дает возможность применить для них уравнение Чепмена-Колмогорова:

$$\bar{B}^k = \bar{B}^{k-1} \cdot \|P_{ij}\|, \quad (1)$$

где  $\bar{B}^k, \bar{B}^{k-1}$  – векторы состояния веры на  $k$ -м и  $(k-1)$  шагах,  $k=1, 2, 3, \dots$

Рекуррентная формула (1) позволяет последовательно вычислять векторы состояний веры на любом шаге, если известно начальное состояние  $\bar{B}^0$ .

В соответствии с теоремой о предельных вероятностях для цепей Маркова [1, 2] с возвратными ненулевыми состояниями существует некоторый вектор  $\vec{\pi}$ , для которого выполняется равенство

$$\vec{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{B}^k \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^4 \pi_i = 1 \quad (2)$$

Применительно к рассматриваемому случаю вектор  $\vec{\pi}$  можно интерпретировать как предельное равновесное состояние отношения населения к вере (таблица 3, 2-й столбец), т.е. как оценку перспективы веры – неверия в России.

Таблица 3. Предельные равновесные состояния (в процентах)

| Отношение к религии                       | Текущие показатели в среднем по России ( $\bar{B}^0$ ) | Оценка на перспективу ( $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{B}^k$ ) |
|---|--|---|
| Верующие                                  | 56,6   | 76,0  |
| Неверующие                                | 18,4   | 7,9   |
| Колблющиеся между верой в Бога и неверием | 13,2   | 9,0   |
| Затрудняюсь ответить                      | 11,8   | 7,1   |

Считается, что процесс (2) сходится после завершения  $k$ -й итерации, если совокупность условий:  $|b_i^k - b_i^{k-1}| \leq \delta$  выполняется для всех  $i$  ( $\delta$  – критерий сходимости, некоторая заданная малая величина). В этом случае  $\bar{B}^k$  тождественно равен вектору  $\vec{\pi}$ .

Другой способ нахождения вектора  $\vec{\pi}$ , не использующий начальное состояние  $\bar{B}^0$ , заключается в многократном умножении матрицы  $\|P_{ij}\|$  самой на себя до получения результирующей матрицы, состоящей только из векторов  $\vec{\pi}$ . Однако первый способ вычисления вектора  $\vec{\pi}$  более предпочтителен по соображениям быстройдействия.

Как было сказано выше, действия, аналогичные перечисленным выше, можно распространить и на работу с матрицей совместного частотного распределения ответов на восьмой вопрос.

Следует обратить внимание на возникшую при вычислении вектора  $\vec{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{B}^k$  проблему, носящую

принципиальный характер. Обусловлена она наличием некоторых диагональных элементов, равных 1, в матрице вероятностей переходов  $\|P_{ij}\|$ , элементы которой рассчитываются по результатам ответов на восьмой вопрос анкеты при относительно небольшом

количестве респондентов (порядка 6000 чел.). Наличие таких элементов в матрице  $\|P_{ij}\|$  в свою очередь приводит к, так называемым, поглощающим состояниям, не отражающим реальный потенциал конфессий. При проведении расчетов обычно не учитываются перетоки в поглощающие состояния, что существенно снижает при прогнозе относительную долю лиц тех конфессий, которые соответствуют поглощающим состояниям, и в некоторых случаях значительно изменяют относительную долю лиц других конфессий, например мусульман.

Для борьбы с этим явлением необходимо разработать методический подход, позволяющий осуществить регуляризацию задачи путем корректировки элементов матрицы перетоков, введения мегасостояний, связанных с объединением различных конфессий в группы таким образом, чтобы избежать поглощающих состояний в матрице вероятностей переходов. Кроме того, учитывая недостаточную выборку при проведении социологических опросов, необходимо проводить интервальные оценки точности элементов матрицы вероятностей переходов и интервальные оценки точности прогнозирования будущего состояния конфессий с помощью марковских моделей.

#### Двухэтапный подход прогнозирования межконфессиональных процессов на базе марковских моделей

Далее описывается методический двухэтапный подход прогнозирования социальных (межконфессиональных) процессов с помощью марковских моделей, позволяющий осуществить регуляризацию задачи (избавить поглощающих состояний) и провести интервальные оценки точности расчетов при различных выборках социологических исследований.

При дальнейшем исследовании межконфессиональных отношений на основе ответов на вопросы анкеты не учитывались респонденты, затруднившиеся с ответом на восьмой вопрос анкеты.

Данные по общей выборке ответов респондентов на восьмой вопрос анкеты (выборка – 5318) распределялись между конфессиями следующим образом: православные – 3151, старообрядцы – 57, католики – 21, мусульмане – 314, буддисты – 11, иудаисты – 11, протестанты – 7, другого вероисповедания – 32, верующие, но ни к какому вероисповеданию себя не относящие – 360, неверующие – 1354.

Матрица вероятностей переходов  $\|P\| = \|p_{ij}\|$  при этом имеет вид (таблица 4):

Таблица 4. Матрица вероятностей переходов между конфессиями

|             | Правосл | Старообряд | Католик | Мусульм | Буддист | иудаист | Протест | Другой веры | В б в  | невер  |
|-------------|---------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|--------|--------|
| Правосл     | 0,9622  | 0,0013     | 0,0013  | 0,0029  | 0,0003  | 0,0006  | 0,0019  | 0,0032      | 0,0184 | 0,0079 |
| Старообряд  | 0,0877  | 0,8772     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0           | 0      | 0,0351 |
| Католик     | 0,1429  | 0          | 0,8095  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0           | 0      | 0,0476 |
| Мусульм     | 0,0159  | 0          | 0,0032  | 0,9586  | 0,0096  | 0,0033  | 0,0064  | 0           | 0,0032 | 0      |
| Буддист     | 0       | 0          | 0       | 0       | 1       | 0       | 0       | 0           | 0      | 0      |
| Иудаист     | 0       | 0          | 0       | 0       | 0       | 1       | 0       | 0           | 0      | 0      |
| Протест     | 0       | 0          | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 0           | 0      | 0      |
| Другой веры | 0,0937  | 0,0313     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0,875       | 0      | 0      |
| В б в       | 0,1722  | 0          | 0,0056  | 0,0194  | 0,0028  | 0,0028  | 0       | 0,0167      | 0,7139 | 0,0667 |

|       |        |        |        |        |        |   |   |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|---|---|--------|--------|--------|
| Исвер | 0,1455 | 0,0015 | 0,0007 | 0,0044 | 0,0015 | 0 | 0 | 0,0066 | 0,0583 | 0,7814 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|---|---|--------|--------|--------|

Широкое использование аппарата дискретных марковских цепей для прогнозирования развития вероятностных процессов базируется на предельной теореме [3].

**Теорема:** Для дискретной, неприводимой, апериодической цепи Маркова с конечным числом состояний ( $j=1, J$ ) всегда существуют предельные вероятности  $\pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_j^{(k)})$  ( $k$ -число переходов) не зависящие от начального распределения вероятностей-вектора состояний  $\vec{B}^{(0)} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots, b_J^{(0)})$ . Стационарные вероятности  $\pi_j$  однозначно определяются равенствами:

$\vec{\pi} = \vec{\pi} \|P\|$ ,  $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$   $\|P\| = \|p_{ij}\|$  – матрица вероятностей переходов.

Скорость сходимости вектора состояний  $\vec{B}^{(k)} = (b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_J^{(k)})$  ( $k$ -число переходов) к стационарному значению  $\vec{\pi}$  определяется характеристическими числами матрицы  $\|P\|$  ( $\lambda_j$ ,  $j=1, J$ ). Супремальная погрешность вычислений компонентов вектора  $\vec{B}^{(k)} = \vec{B}^{(0)} \|P\|^k$  через  $k$  шагов будет определяться формулой  $\max_j [(\pi_j - b_j^{(k)}) / (\pi_j - b_j^{(0)})]^2 < A^k$  ( $j=1, J$ ), где  $A = \prod_{j=1}^J \lambda_j$  / (3)

Элементы матрицы переходов  $\|P\|$  и компоненты вектора  $\vec{B}^{(0)}$  определяются статистическими методами на основании данных социологических опросов. Прогнозирование развития межконфессиональных отношений по данным социологических опросов предлагается осуществлять с помощью дискретных марковских цепей с конечным числом состояний.

### III. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦ ПЕРЕХОДОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Погрешности определения элементов матрицы  $\|P\|$  и вектора  $\vec{B}^{(0)}$  должны оцениваться с помощью метода доверительных интервалов. Относительная погрешность  $\delta_{ij}$  оценки элементов  $p_{ij}$  по относительной частоте  $W_{ij} = m_{ij}/n_i$ ,  $W_{ij} \neq 0$  ( $m_{ij}$  -число переходов при  $n_i$  испытаниях из состояния  $i$  в состояние  $j$ ) дается соотношением  $\delta_{ij} = t[(1 - W_{ij}) / (n_i W_{ij})]^{0.5}$ , где  $t$  – квантиль нормального распределения, определяется из соотношения  $\Phi(t) = \nu/2$ ,  $\Phi(t)$  – функция Лапласа,  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2} dz$ ,  $\nu$  – надежность оценки. При  $W_{ij} = 0$

доверительный интервал с надежностью  $\nu$  для  $p_{ij}$  имеет вид:  $0 \leq p_{ij} \leq \frac{\nu^2}{t^2 + n_i}$ . При  $W_{ij} = 1$  доверительный интервал с надежностью  $\nu$  для  $1 - p_{ij}$  определяется соотношением  $0 \leq 1 - p_{ij} \leq \frac{\nu^2}{t^2 + n_i}$ . Осуществим регуляризацию задачи прогнозирования с возможными (в пределах точности) поглощающими

состояниями  $i$  ( $W_{ii} = 1$ ). В матрице перетоков  $\|M\| = \|m_{ij}\|$  увеличивается на несколько единиц (в пределах доверительного интервала) значение  $m_{ij}$ , соответственно на это же количество единиц увеличивается значение  $m_{ji}$ . При этом на каждом шаге дополнительные оттоки из состояния  $i$  компенсируются дополнительными притоками в состояние  $i$ . После регуляризации задачи осуществляется нахождение первоначального приближенного решения. При этом рассматривается некоторое  $i$ -е состояние ( $i=1, J$ ), а все остальные состояния представляют собой некоторое 2-ое мегасостояние системы. Определяется стационарная вероятность  $\pi_i$  такой обобщенной марковской системы. Находятся собственные значения матрицы переходов, оцениваются скорость сходимости  $b_i^{(0)}$  к стационарной вероятности  $\pi_i$  и доверительный интервал для  $\pi_i$ . Однако при таком подходе может получиться несогласованная оценка стационарных вероятностей  $\pi_i$ . Чтобы получить согласованное решение формируется новая матрица переходов, в которой рассматриваются только те состояния  $i$ , для которых на предыдущем шаге были получены стационарные вероятности  $\pi_i$  большие некоторого граничного значения  $p_0$ ,  $\pi_i > p_0$  (например,  $p_0 = 0.05$ ), остальные состояния объединяются в одно мегасостояние. Затем решается задача нахождения собственного вектора ( $\lambda=1$ ) этой матрицы, компоненты которого и определяют согласованные стационарные значения  $\pi_i$ . Согласованные значения  $\pi_i$  с заданной надежностью находятся внутри доверительного интервала, полученного на первом этапе предварительных оценок  $\pi_i$ .

### IV. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ РАЗВИТИЕ МЕЖКОНФЕССИОНАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Применим предложенный подход к прогнозированию развития межконфессиональных отношений на основе проведенного социологического опроса (выборка 5318). При регуляризации задачи увеличиваются на 1 перетоки от состояния «православные» к поглощающим состояниям «иудаисты» и «протестанты» и соответственно вводятся перетоки равные 1 из состояний «иудаисты» и «протестанты» в состояния «православные». Кроме того, увеличивается на 1 переток из состояния «мусульмане» в поглощающее состояние «буддисты» и вводится переток равный 1 из состояния «буддисты» в состояние «мусульмане». Результаты 1 этапа предварительных расчетов показывают, что после регуляризации задачи доля православных  $\pi_n$  будет в будущем составлять 0.76 (то есть 76%), причем относительная погрешность прогноза с надежностью 0.99 не превысит 10%. Прогнозируемое значение количества православных с доверительной вероятностью 0.99 будет принадлежать диапазону 69–82%. При этом погрешность за счет регуляризации задачи не превышает 0.3%.

Супремальная погрешность вычислений  $\max[(\pi_n - b_n^{(k)}) / (\pi_n - b_n^{(0)})]^2$ , независимо от начального распределения вероятностей  $b_n^{(0)}$ , при использовании итерационной процедуры расчетов уже через 15 итераций ( $k=15$ ) будет отличаться не более, чем на 7% от значения, полученного при расчете компонентов

собственного вектора  $(\pi_n, 1-\pi_n)$  матрицы переходов «православные» - «другие» при собственном значении  $\lambda=1$ . Здесь мегасостояние «другие» объединяет все конфессии кроме православных. Результат по сходимости очевиден, если учесть, что матрица вероятностей переходов в этом случае имеет два собственных значения  $\lambda_1=1$  и  $\lambda_2=0.835$ . Отметим, что в соответствии с предложенным методическим подходом для оценки прогнозируемых значений доли различных конфессий используется не итерационная процедура расчетов, а рассчитываются собственные вектора матриц вероятностей перехода, соответствующие собственному значению  $\lambda=1$ . Если необходимо оценить скорость сходимости начального распределения к соответствующей компоненте собственного вектора матрицы вероятностей переходов, то определяются собственные значения матрицы переходов и проводится оценка супремальной погрешности.

Доля мусульман в соответствии с предварительным прогнозом 1 этапа составит **9.4%**, при этом, если бы состояние «мусульмане» не участвовало в процедуре регуляризации состояния «буддизм», доля мусульман при прогнозе составила бы **9.6%**. То есть ошибка за счет предлагаемой в работе процедуры регуляризации задачи незначительна.

Отметим, что если бы были просто исключены из рассмотрения поглощающие состояния «буддисты», «иудаисты», «протестанты» путем исключения перетоков в эти состояния из других, включая состояние «мусульмане», то доля мусульман на этапе предварительного прогноза составила бы **16%**.

В то же самое время следует отметить, что относительная погрешность оценки вероятности переходов из состояния «мусульмане» в другие состояния с надежностью 0.95 составляет **53%**, а переходов из мегасостояния, объединяющего все другие состояния системы, в состояние «мусульмане» с доверительной вероятностью **0.95** составляет **42%**. Учитывая эти погрешности и проведя интервальные оценки при расчете доли мусульман, получаем следующий результат – с доверительной вероятностью **0.99** доля мусульман в России в будущем (по данным имеющегося социологического опроса) будет принадлежать интервалу  $0.04 < \pi_{\text{мус}} < 0.24$  или  $4\% < \pi_{\text{мус}} < 24\%$ . То есть имеющиеся статистические данные не позволяют делать достаточно точные прогнозы. Поэтому необходимо провести социологические опросы с выборкой, хотя бы на порядок большей, чем была проведена ранее, и уточнить расчеты.

Приведем результаты расчетов 1 этапа для предварительного прогнозирования развития различных конфессий, исходя из данных социологических исследований и интервальных оценок точности расчетов.

Старообрядцы в России составляют порядка **1.1%**. При этом, как показывают данные социологических исследований, перетоки из других состояний системы в состояние «старообрядцы» равны перетоку из состояния «старообрядцы» в мегасостояние, объединяющее остальные состояния. Собственный вектор  $\vec{\pi}$ , соответствующий матрице переходов  $\|P_{\text{ст}}\|$  (таблица 5) и

собственному значению  $\lambda=1$  равен -  $\vec{\pi} = (0.011, 0.989)$ . Матрица  $\|P_{\text{ст}}\|$  имеет вид:

Таблица 6. Матрица вероятностей перехода (буддисты – другие)

|            | Старообряд | Другие  |
|------------|------------|---------|
| Старообряд | 0,87719    | 0.12281 |
| Другие     | 0.00133    | 0,99867 |

То есть количество старообрядцев в будущем не изменится и составит также **1.1%**. Однако относительная погрешность вероятности переходов «другие» → «старообрядцы» составляет  $\delta=0.74$  с доверительной вероятностью **0.95**. Интервальная оценка количества старообрядцев в будущем с учетом этой погрешности дает следующий результат – с доверительной вероятностью **0.95** доля старообрядцев будет находиться в интервале  $0.003 < \pi_{\text{ст}} < 0.019$  или  $0.3\% < \pi_{\text{ст}} < 1.9\%$ .

Количество католиков (их доля в настоящее время составляет **0.4%** в будущем должно возрасти до **0.8%**). Однако, если учесть, что относительная погрешность вероятности переходов из мегасостояния «другие» в состояние «католики» составляет  $\delta=0.75$  с надежностью **0.95**, можно с доверительной вероятностью **0.95** утверждать, что доля католиков в будущем будет находиться в интервале  $0.2\% < \pi_{\text{кат}} < 1.4\%$ .

Доля буддистов (в настоящее время их доля – **0.2%**) возрастет до **1.6%**. Этот результат легко получить, вычислив собственный вектор матрицы вероятностей переходов «буддисты» → «другие»  $\|P_{\text{буд}}\|$  при собственном значении  $\lambda=1$ . После регуляризации матрица  $\|P_{\text{буд}}\|$  имеет вид:

Таблица 5. Матрица вероятностей перехода (старообрядцы – другие)

|          | Буддисты | Другие   |
|----------|----------|----------|
| Буддисты | 0,909091 | 0.090909 |
| Другие   | 0.001507 | 0,998493 |

Учитывая, что относительная погрешность вероятности переходов из мегасостояния «другие» в состояние «буддисты» составляет более **70%**, можно дать следующую интервальную оценку доли буддистов в будущем – с доверительной вероятностью **0.95** доля буддистов будет находиться в интервале  $0.4\% < \pi_{\text{буд}} < 2.8\%$ .

Аналогично можно получить прогнозные значения и интервальные оценки для состояний «иудаисты» и «протестанты».

Доля иудаистов возрастет с **0.2%** до **1%**. Учитывая большую погрешность оценки вероятности переходов (малая выборка) из других состояний в состояние «иудаисты», можно только утверждать, что с доверительной вероятностью **0.95** доля иудаистов будет находиться в интервале  $0.2\% < \pi_{\text{иуд}} < 1.8\%$ .

Доля протестантов возрастет с **0.13%** до **1.2%**. При этом учитывая статистические погрешности определения вероятностей переходов можно утверждать, что с доверительной вероятностью **0.95** прогнозируемая доля протестантов будет  $0.45\% < \pi_{\text{прот}} < 1.95\%$ .

Имеющиеся данные социологических опросов позволяют дать только достаточно грубые оценки.

В результате предварительных оценок 1 этапа предложенной методики легко показать, что относительное количество людей другой веры возрастет с **0.6%** до **3.6%**. Причем с доверительной вероятностью **0.95** относительная погрешность прогноза будет не более **40%**.

Доля верующих, но ни к какому вероисповеданию себя не относящих ( $\pi_{\text{бв}\%}$ ), при предварительной оценке равна **8.8%**, что несколько выше существующего в настоящее время значения **6.8%**. Однако точность оценки элементов матрицы переходов такова, что позволяет сделать только следующий вывод – с доверительной вероятностью **0.99** прогнозное значение **5.6% <  $\pi_{\text{бв}\%}$  < 12%**.

Предварительная прогнозная оценка доли неверующих ( $\pi_{\text{нев}\%}$ ) показывает, что доля неверующих уменьшится с **25.4%** до **5.7%**. Интервальная оценка для прогнозируемого значения  $\pi_{\text{нев}\%}$  показывает, что с надежностью **0.95**  $\pi_{\text{нев}\%}$  лежит в диапазоне **4.2% <  $\pi_{\text{нев}\%}$  < 7.2%**.

При всех предварительных оценках 1 этапа не учитывались респонденты, которые затруднились ответить на вопросы анкеты (неопределившиеся). Учет неопределившихся не изменяет качественной картины на 1 этапе предварительных оценок. Так, например, доля неверующих  $\pi_{\text{нев}\%}$  с учетом неопределившихся респондентов при предварительном прогнозе уменьшается с **24%** (в настоящее время) до **5.2%** в будущем.

Оценки, проведенные на 1 этапе, позволяют выделить значимые классы – «православные», «мусульмане», «верующие, не относящие себя ни к какому вероисповеданию», «неверующие» - предварительные прогнозные значения для этих классов превышают пороговое значение **5%**. Все другие классы – старообрядцы, католики, буддисты, иудаисты, протестанты и другого вероисповедания на 2 этапе объединяются в один мегакласс «другие». Для данных 5-и состояний рассчитывается матрица переходных вероятностей (таблица 7).

Таблица 7. Матрица вероятностей переходов для 5 значимых классов

|         | Правосл | Мусульм | В б в  | невер  | Другие |
|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| Правосл | 0,9622  | 0,0029  | 0,0184 | 0,0079 | 0,0086 |
| Мусульм | 0,0159  | 0,9586  | 0,0032 | 0      | 0,0223 |
| В б в   | 0,1722  | 0,0194  | 0,7139 | 0,0667 | 0,0278 |
| Невер   | 0,1455  | 0,0044  | 0,0583 | 0,7814 | 0,0103 |
| Другие  | 0,0791  | 0,0072  | 0      | 0,0216 | 0,8921 |

Для данной матрицы переходов определяется собственный вектор  $\vec{\pi}$ , соответствующий

собственному значению  $\lambda=1$ :  $\vec{\pi}=(0.708, 0.082, 0.057, 0.053, 0.100)$ . Компоненты собственного вектора определяют прогнозируемую в будущем долю православных (**70.8%**), мусульман (**8.2%**), верующих, но ни к какому вероисповеданию себя не относящих (**5.7%**), неверующих (**5.3%**), старообрядцев, католиков, буддистов, протестантов, другого вероисповедания (суммарно **10%**).

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика использования марковских процессов для прогнозирования уровня религиозного сознания и межконфессиональных отношений в России.

На основе марковских моделей получены прогнозные значения показателей, характеризующих изменение религиозного сознания и межконфессиональных отношений. Определены интервальные оценки прогнозных значений этих показателей.

Отметим, что предварительные оценки, полученные на 1-ом этапе, не являются согласованными, то есть сумма долей различных конфессий в % может отличаться от 100%. На втором этапе для значимых конфессий (классов) получают согласованные оценки их относительной доли. Интервальные оценки точности вычислений доли различных конфессий проводятся на 1 этапе расчетов.

Следует отметить, что согласованные оценки доли каждой из конфессий принадлежат доверительным интервалам, определенным на 1 этапе. Однако их значения, как правило не совпадают со средним значением соответствующего доверительного интервала.

Применение рассмотренного выше подхода к прогнозированию развития межконфессиональных отношений на основе данных проведенного социологического опроса (выборка 5318) показывает, что в России ожидается значительный рост числа православных с 59,3 до 70,8% (с доверительной вероятностью 0.99 относительная ошибка прогноза не превышает 10%), мусульман с 5.9 до 8.2% (с вероятностью 0.01 относительная ошибка прогнозируемого значения может превысить 100%, недостаточная выборка при проведении опроса). В будущем возможен резкий рост (в несколько раз, примерно в 4 раза) радикальных верований (выборка, как и в случае с мусульманами, недостаточна для надежного прогноза).

## БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Максимова С.Г., Суртаева О.В., Ноянзена О.Е., Омельченко Д.А. Концептуальная модель социального механизма обеспечения социальной безопасности в сфере межнациональных и межконфессиональных отношений в условиях трансформации миграционных процессов// Society and Security Insights, 2019, 2(1), 13-30.
- [2] Набиев Р.А. Власть и религиозное возрождение. Серия «Культура, религия и общество», вып. 24. – Казань: Казан. ун-т, 2014. – 304 с.
- [3] Зорин В.Ю., Орешин С.А. Государственная национальная политика России: от традиций к инновациям/ Исследования по прикладной и неотложной этнологии. – М.: ИЭА РАН, 2019. – Вып. 269. – 45 с.
- [4] Топчиев М.С. Религиозная идентичность и конфессиональная безопасность в поликультурном регионе// Каспийский регион: политика, экономика, культура. – 2010. – № 4(10). – С. 20-25.
- [5] Слободникова В.С., Маковский А.А. Современная модель государственно-конфессиональных отношений в Нижнем Поволжье как механизм обеспечения религиозной безопасности// Известия Иркутского государственного университета. Серия Политология. Религиоведение. 2021. Т. 35. С. 138-147. DOI <https://doi.org/10.26516/2073-3380.2021.35.138>.
- [6] Сулов И.В., Маковский А.А. Современные тенденции в области исследования религиозной безопасности в Нижнем Поволжье// Вестник Поволжского института управления. 2019. № 4. С. 99-105.

- [7] Грачев С.И., Товашев А.В., Завьялов А.И. Проблемы и особенности использования информационно-пропагандистского фактора в системе антитерроризма// Вестник Казанского юридического института МВД России.– 2014. – № 2(16). С. 62-65.
- [8] Галажинская О.Н., Моисеева С.П. Теория случайных процессов. Ч.2: Марковские процессы: учеб. пособие. – Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2016. – 126 с.
- [9] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения в 2-х т. – Т.1. – М.: «ЛИБРОКОМ», 2010. – 528 с.
- [10] Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания. – 3-е изд. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 520 с.
- [11] Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. – 368 с.
- [12] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.– 1987. – 336 с.
- [13] Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
- [14] Нагаев С.В. Эргодические теоремы для марковских процессов с дискретным временем// Сиб. мат. ж. – 1965. – Т. 6, № 2. – С. 413-432.
- [15] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика// Учебное пособие для вузов. Изд. 5-е перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1977. – 479 с.
- [16] Белов А.И. Теория вероятностей и статистика. – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2019. – 235 с.
- [17] Мицель А.А. Прикладная математическая статистика// Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – 2022. – 118 с.
- [18] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 816 с.

# Study of the interfaith relations development based on the mathematical apparatus of Markov processes

A.S. Leontiev, K.V. Gusev, S.A. Golovin

**Abstract**— A sociological survey was conducted, including questions characterizing the level of religious consciousness of Russians and the state of interfaith relations in the country. Answers to questions concerning attitudes towards religion and beliefs of the respondents are presented in the form of flow matrices. Based on flow matrices, frequency distributions matrices are calculated, as well as matrices of transition probabilities. The elements of the transition matrices are practically independent of time and characterize the stable, formed inter-confessional relations in Russia. This circumstance makes it possible to carry out a formalized description of their development in the form of discrete Markov chains, for the study of which there is a well-developed mathematical apparatus. For a discrete, irreducible aperiodic Markov chain with a finite number of states, there always exist limiting state probabilities that do not depend on the initial state probability distribution. This fundamental property is used in the development of a methodology for studying interfaith relations. A technique for using Markov processes to predict the level of religious consciousness and interfaith relations in Russia is proposed. The transition matrices of discrete Markov processes are determined based on the results of a survey, and a procedure for regularizing the transition matrices is proposed, which makes it possible to significantly increase the accuracy of forecasts. Based on Markov models, predictive values of indicators characterizing the change in religious consciousness and interfaith relations were obtained, and interval estimates of the predictive values of these indicators were determined based on mathematical statistics methods.

**Keywords**—Interfaith relations, religious consciousness, sociological survey, Markov processes, forecasting, transition matrices, confidence intervals, eigenvector, forecasting problem regularization.

## References

[1] Maksimova S.G., Surtaeva O.V., Nojanzena O.E., Omel'chenko D.A. Konceptual'naja model' social'nogo mehanizma obespečenija social'noj bezopasnosti v sfere mezhnacional'nyh i mezhkonnessional'nyh otnoshenij v

uslovijah transformacii migracionnyh processov// Society and Security Insights, 2019, 2(1), 13-30.

[2] Nabiev R.A. Vlast' i religioznoe vozrozhdenie. Serija «Kul'tura, religija i obshhestvo», vyp. 24. – Kazan': Kazan. un-t, 2014. – 304 s.

[3] Zorin V.Ju., Oreshin S.A. Gosudarstvennaja nacional'naja politika Rossii: ot tradicij k innovacijam/ Issledovanija po prikladnoj i neotloznoj jetnologii. – M.: IJeA RAN, 2019. – Vyp. 269. – 45 s.

[4] Topchiev M.S. Religioznaja identichnost' i konfessional'naja bezopasnost' v polikul'turnom regione// Kaspijskij region: politika, jekonomika, kul'tura. – 2010. – # 4(10). – S. 20-25.

[5] Slobozhnikova V.S., Makovskij A.A. Sovremennaja model' gosudarstvenno-konnessional'nyh otnoshenij v Nizhnem Povolzh'e kak mehanizm obespečenija religioznoj bezopasnosti// Izvestija Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija Politologija. Religiovedenie. 2021. T. 35. S. 138-147. DOI <https://doi.org/10.26516/2073-3380.2021.35.138>.

[6] Suslov I.V., Makovskij A.A. Sovremennye tendencii v oblasti issledovanija religioznoj bezopasnosti v Nizhnem Povolzh'e// Vestnik Povolzhskogo instituta upravljenija. 2019. # 4. S. 99-105.

[7] Grachev S.I., Tovashev A.V., Zav'jalov A.I. Problemy i osobennosti ispol'zovanija informacionno-propagandistskogo faktora v sisteme antiterrorizma// Vestnik Kazanskogo juridicheskogo instituta MVD Rossii. – 2014. – # 2(16). S. 62-65.

[8] Galazhinskaja O.N., Moiseeva S.P. Teorija sluchajnyh processov. Ch.2: Markovskie processy: ucheb. posobie. – Tomsk: Izdatel'skij dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, 2016. – 126 s.

[9] Feller V. Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee prilozhenija v 2-h T. – T.1. – M.: «LIBROKOM», 2010. – 528 s.

[10] Saati T.L. Jelementy teorii massovogo obsluzhivanija. – 3-e izd. – M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2010. – 520 s.

[11] Ventcel' E.S. Teorija sluchajnyh processov i ee inzhenernye prilozhenija. – M.: Nauka, 1991. – 368 s.

[12] Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Vvedenie v teoriju massovogo obsluzhivanija. – 2-e izd., pererab. i dop. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.– 1987. – 336 s.

[13] Klejnrok L. Teorija massovogo obsluzhivanija. – M.: Mashinostroenie, 1979. – 432 s.

[14] Nagaev S.V. Jergodicheskie teoremy dlja markovskih processov s diskretnym vremenem// Sib. mat. zh. – 1965. – T. 6, # 2. – S. 413-432.

[15] Gmurman V.E. Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika// Uchebnoe posobie dlja vtuzov. Izd. 5-e pererab. i dop. – M.: Vysshaja shkola, 1977. – 479 s.

[16] Belov A.I. Teorija verojatnostej i statistika. – Ekaterinburg: Ural'skij federal'nyj universitet, 2019. – 235 s.

[17] Micel' A.A. Prikladnaja matematicheskaja statistika// Uchebnoe posobie. – Tomsk: Tomskij gosudarstvennyj universitet sistem upravljenija i radiojelektroniki. – 2022. – 118 s.

[18] Kobzar' A.I. Prikladnaja matematicheskaja statistika. Dlja inzhenerov i nauchnyh rabotnikov. – M.: FIZMATLIT, 2012. – 816 s.