Единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкубов

А.А. Лобов

***Аннотация*—В 1976 году J. P. Hayes предложил основанную на теории графов модель построения отказоустойчивой системы. Система моделируется графом, элементы системы – вершинами графа, а связи между элементами – рёбрами или дугами между соответствующими вершинами. В задаче рассматривался отказ заранее заданного количества узлов. Отказ элемента системы соответствует удалению вершины из графа. Устойчивость к k отказам достигается за счёт введения в систему избыточных элементов и связей так, чтобы в каждый граф, полученный удалением из соответствующего системе графа k вершин, вкладывался граф, соответствующий системе без избыточных элементов и связей. Позднее, F. Harary и J. P. Hayes в работе 1993 года перенесли данную модель на случай отказа связи между узлами, что на языке теории графов моделируется удалением ребра. В данной статье устойчивые к отказу k вершин или k рёбер реализации систем называются вершинными или рёберными -расширениями. В своей работе F. Harary и J. P. Hayes предложили схему построения минимального рёберного 1-расширения для гиперкуба. Рёберное k-расширение n-вершинного графа называется минимальным, если количество вершин в нём равно n, и среди всех рёберных k-расширений имеет минимальное число рёбер. N-мерным гиперкубом называют граф, для вершин которого существует такая разметка всеми возможными двоичными N-элементными векторами, что ребро будет соединять две вершины тогда и только тогда, когда расстояние Хемминга между их метками равно 1. Ранее было доказано, что при N равном 2, 3 и 4 существует единственное минимальное рёберное 1-расширение для N-мерного гиперкуба. В данной статье показано, что при $N \geq 2$ для N-мерного гиперкуба существует единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение.**

***Ключевые слова*—гиперкуб, теория графов, полная отказоустойчивость, рёберное расширение**

I. Введение

J. P. Hayes в [1] для исследования отказоустойчивости вычислительной системы в 1976 году предложил модель построения полной отказоустойчивости на основе теории графов. Модель учитывала отказ узлов системы. В 1993 данную модель J. P. Hayes и F. Harary расширили до отказа рёбер [2]. Основные понятия, связанные с данной темой, приведём согласно [3].

Граф G^* называется *рёберным 1-расширением* (Р-1-Р) графа G, если G вкладывается в каждый граф, полученный из G^* путём удаления 1 ребра.

Если Р-1-Р G^* n-вершинного графа G имеет n вершин и при этом среди всех Р-1-Р графа G с n вершинами имеет минимальное количество рёбер, то G^* называется *минимальным рёберным 1-расширением* (МР-1-Р).

Граф Q_N называется N-мерным гиперкубом или N-кубом и определяется рекурсивно:

При $N = 0$: $Q_0 = K_1$ – одновершинный граф.

При $N \geq 1$: $Q_N = Q_{N-1} \times K_2$, где $\times$ – декартово произведение.

Существует особая разметка вершин гиперкуба двоичными векторами, поэтому можно дать и другое определение: $Q_N = (V, \alpha)$, $V = \{0,1\}^N$, $\alpha = \{(a,b) \in V \times V \mid h(a,b) = 1\}$, где $h(a,b)$ – расстояние Хемминга между векторами a и b. Множество вершин с k единицами в метке в гиперкубе будем называть *слоем* k.

В работе [2] была представлена схема построения МР-1-Р гиперкуба. Для Q_N МР-1-Р является граф $Q_N^* = (V, \beta)$, где $V = \{0,1\}^N$ и $\beta = \{(a,b) \in V \times V \mid h(a,b) = 1 \vee h(a,b) = N\}$. Q_N^* является регулярным графом степени $N+1$, поэтому по лемме 1 он является минимальным.

Лемма 1. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то МР-k-Р графа G не содержит вершин степени меньше $d + k$.

Ответ на вопрос, является ли данное МР-1-Р единственным или нет, будет дан далее в статье теоремой 1. Само доказательство будет приведено в разделе III. В разделе II будет приведена лемма 2, необходимая для доказательства.

II. Основная лемма и её доказательство

Лемма 2. При $N \geq 5$ в МР-1-Р N-куба нет дополнительных рёбер, соединяющих вершины с метками, расстояние Хемминга между которыми равно 3.

Доказательство. Будем строить минимальное рёберное 1-расширение для N-куба Q_N путём добавления рёбер. Введём обозначения:

$u = 0\ldots0$, $v = 0\ldots0111$.

$C = \{0\ldots0001, 0\ldots0010, 0\ldots0100\}$.

$W = \{10\ldots00000, \ldots, 00\ldots01000\}$.

Далее шаги доказательства будут проиллюстрированы для случая $N = 5$. Вершинами *типа* k будем называть образы вершин слоя k гиперкуба.

1. Пусть между вершинами $u = 0\ldots0$ и $v = 0\ldots0111$ в МР-1-Р есть ребро.

2. В МР-1-Р гиперкуба к каждой вершине добавляется ровно одно ребро, поэтому в графе больше нет других дополнительных рёбер, соединяющих u или v с другой вершиной графа.

3. Удалим ребро между u и $w_1 = 10\ldots0$ и рассмотрим, как будет происходить вложение в расширение.

4. Пусть u имеет тип 0. После удаления инцидентного этой вершине ребра, её степень равна N, поэтому все

Статья получена 1 мая 2023.

Результат работы был получен при написании кандидатской диссертации.

А.А. Лобов аспирант ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», Саратов, Россия (e-mail: aisanekai@mail.ru).

смежные с ней вершины будут иметь тип 1, в том числе и вершина v. Для Q_5 пример приведён на рисунке 1.

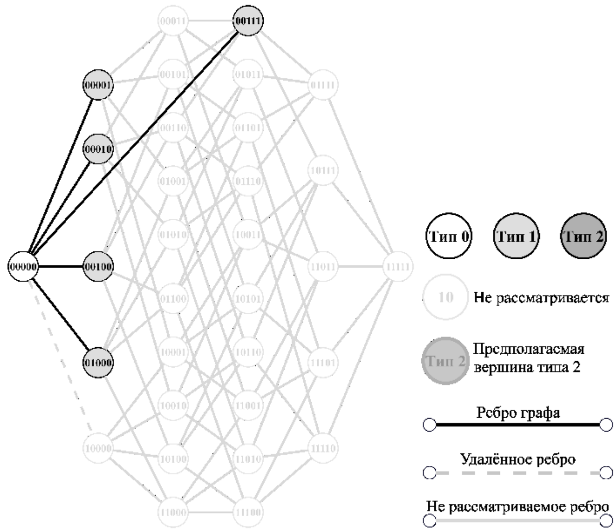


Рис. 1 – Вершины графа типов 0 и 1 при вложении в предполагаемое MP-1-P 5-куба

5. Так как каждая вершина слоя 2 гиперкуба имеет ровно 2 ребра, соединяющих её с вершинами слоя 1, то, учитывая пункт 2, вершины типа 2 выбираются среди тех вершин, которые смежны с вершинами типа 1. Это все вершины с 2-мя единицами в метке и $N-3$ вершины с 4-мя единицами в метке, которые смежны с v. Данная ситуация для 5-куба проиллюстрирована на рисунке 2.

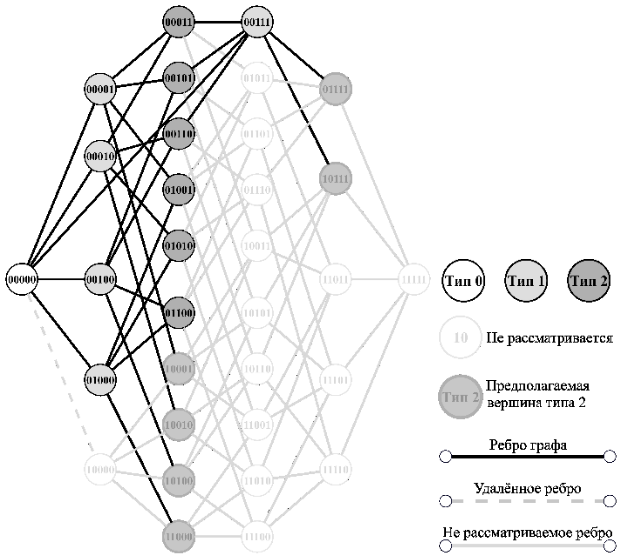


Рис. 2 – Вершины типов 0, 1 и 2 и предполагаемые вершины типа 2 при вложении в предполагаемое расширение 5-куба с удалённым ребром $\{0 \dots 0,\ 10 \dots 0\}$

6. 3 вершины $H_1 = \{0\ldots0110, 0\ldots0101, 0\ldots0011\}$ будут иметь 3 ребра, ведущие к вершинам типа 1: по 2 ребра к вершинам множества $\mathrm{C} = \{0\ldots0001, 0\ldots0010, 0\ldots0100\}$ и ребро к вершине v. Вершины типа 2 должны соединяться $N-2$ рёбрами с вершинами типа 2, но данные вершины имеют только $N-3$ таких ребра, поэтому каждая из этих вершин должна соединяться с ещё одной вершиной типа 3 дополнительным ребром.

7. $N-3$ вершины $\mathbf{00} \dots \mathbf{01}111, \dots, \mathbf{10} \dots \mathbf{00}111$ с 4-мя единицами в метке, смежные с v, обозначим как множество H_2 – они смежны только с одной вершиной типа 1 – это вершина v. Среди смежных с v вершин минимум $N-1$ должна иметь тип 2. Учитывая 3 вершины типа 2 из H_1, которые смежны с v, как минимум $N-4$ вершины из H_2 имеют тип 2.

8. Каждая пара вершин типа 1 должна иметь общую смежную вершину типа 2. Каждая вершина множества H_1 являются общей смежной для v и двух вершин из C. У других вершин типа 1 с одной единицей в метке общих смежных вершин с v нет. Количество таких вершин равно $N-4$ (всего вершин 1-го типа N штук, из них 1 вершина – это v, с 3 вершинами общие смежные у v есть). Это означает, что $N-4$ дополнительных ребра от вершин из H_2 нужно добавлять именно к ним. Обозначим множество этих вершин как W.

9. Покажем, что оставшаяся вершина должна быть соединена с вершиной $10\ldots0$ дополнительным ребром. По пункту 8 $N-4$ ребра были добавлены между вершинами из H_2 и вершинами из W, среди которых есть и $w_2 = 010\ldots0$. Теперь рассмотрим другой граф, полученный удалением из гипотетического MP-1-P гиперкуба ребра между u и $w_2 = 010\ldots0$ (изображение для 5-куба показано на рисунке 3). Пункты 1-8 для него рассматриваются аналогично, при этом множество H_2 остаётся таким же, а W изменяется – в нём не будет вершины w_2, но будет вершина w_1. Если рассматриваемого ребра в расширении не будет, то у вершин v и w_1, имеющих тип 1, не будет общей смежной вершины типа 2, а значит, при удалении ребра между u и w_2 вложение построить будет невозможно.

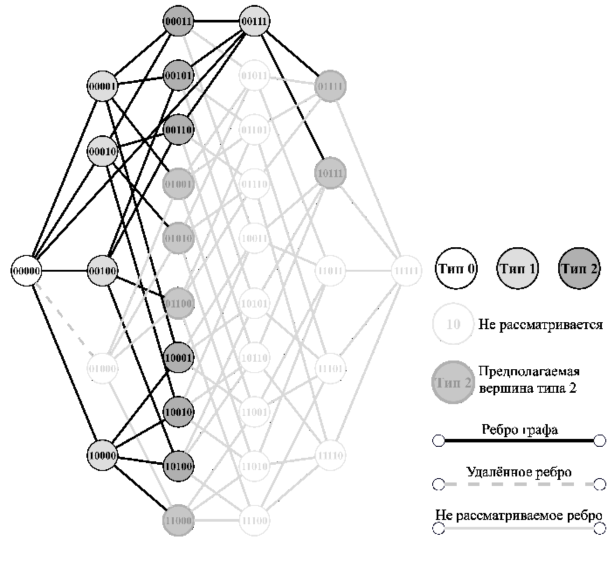


Рис. 3 – Вершины типов 0, 1 и 2 и предполагаемые вершины типа 2 при вложении в предполагаемое расширение 5-куба с удалённым ребром $\{0\ldots0, 010\ldots0\}$

10. Множество H_3 из $N-1$ вершин, которые смежны с w_1 и имеют 2 единицы в метке, а также имеют ровно 1 ребро, имеющее на другом конце образ вершины слоя 1. Эти вершины не смежны с v и имели в гиперкубе 2 ребра, которые их соединяли с вершинами с 1 единицей в метке. Так как одной из них являлась w, то осталась ровно 1 смежная вершина типа 1.

11. Остальные вершины H_4 имеют 2 ребра, соединяющие их с вершинами типа 1, поэтому они

имеют тип 2. Количество таких вершин равно $C_N^2 - (N-1) - 3 = C_N^2 - C_{N-1}^1 - 3 = C_{N-1}^2 - 3$.

12. Количество вершин, имеющих 2 и более смежных вершин типа 1, равно $(C_{N-1}^2 - 3) + 3 = C_{N-1}^2$ – это вершины множеств H_2 и H_3. Таким образом, нужно как минимум $C_N^2 - C_{N-1}^2 = C_{N-1}^1 = N - 1$ дополнительных рёбер, соединяющих образы вершин слоя 1 и вершины из множества $H_2 \cup H_3$, что равно числу образов вершин слоя 1, к которым можно добавить ребро (к последней вершине-образу v ребро уже было добавлено).

13. Учитывая пункты 8, 9, 10 и 12, получается, что от вершин типа 1 $N-4$ дополнительных ребра будут идти к вершинам из H_2 и 3 ребра – к вершинам из H_3.

14. Рассмотрим случай удаления ребра $\{u, w_2\}$. По пункту 9 к вершине w_1 будет добавлено ребро к вершинам из H_2. Таким образом, ко всем вершинам типа 1 уже были добавлены рёбра, но множество H_3 в данном случае будет отличаться. Множество H_3, которое было получено при рассмотрении первого случая, обозначим как H_3^*. Пересечение этих множеств состоит из одной вершины в силу структуры гиперкуба, то есть $H_3 \cap H_3^* = \{110\ldots0\}$. Так как пункты 1-13 без существенных изменений могут быть перенесены и на случай удаления ребра $\{u, w_2\}$, то по пункту 13 получим, что из H_3^* должно быть 3 ребра к вершинам типа 1, но ко всем этим вершинам уже проведены дополнительные рёбра и новые добавлять нельзя. Учитывая, что среди этих вершин может быть только одна $110\ldots0$, к которой уже может быть проведено ребро, то нужно добавить минимум 2 ребра к образам вершин слоя 1, но это сделать невозможно по пункту 2, а значит, если в МР-1-Р гиперкуба присутствует ребро $\{u, v\}$, то расширение построить невозможно.

15. В силу дистанционной транзитивности гиперкуба [4], это будет справедливо для любой пары вершин $\{u, v\}$, расстояние между которыми равно трём, следовательно, в МР-1-Р N-куба для $N \geq 5$ не должно быть ребра между вершинами, расстояние между которыми равно 3. ■

Опираясь на лемму 2, можно доказать теорему 1 о единственности МР-1-Р гиперкуба.

III. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ МР-1-Р ГИПЕРКУБОВ

Теорема 1 (О единственности МР-1-Р гиперкуба). При $N \geq 2$ N-куб имеет единственное с точностью до изоморфизма МР-1-Р.

Доказательство. Случаи с $N = 2$, $N = 3$ и $N = 4$ разобраны в [5]. Рассмотрим случай $N \geq 5$.

N-куб состоит из двух $(N-1)$-кубов, соответствующие вершины которых соединены ребром. Их будем называть ***подкубами***.

Покажем, что каждое вложение Q_N в построенное добавлением рёбер его МР-1-Р G^* с одним удалённым ребром гиперкуба e отображает один из подкубов Q_N в подкуб оставшейся части Q_N из $G = G^* - e$.

Количество вершин в Q_N и G одинаково. Так как Q_N вершинно-симметричный граф, то вложение вершины v графа Q_N в вершину u графа G приведёт к тому, что будет существовать вложение любой другой вершины графа в вершину u. Из-за одинакового количества вершин в графах, они все задействуются во вложении, поэтому можно построить другое вложение, при котором выбранная вершина Q_N может быть отображена в произвольную заданную вершину графа G, поэтому достаточно рассмотреть только одну пару таких вершин – остальные результаты можно получить с помощью композиции автоморфизма и вложения.

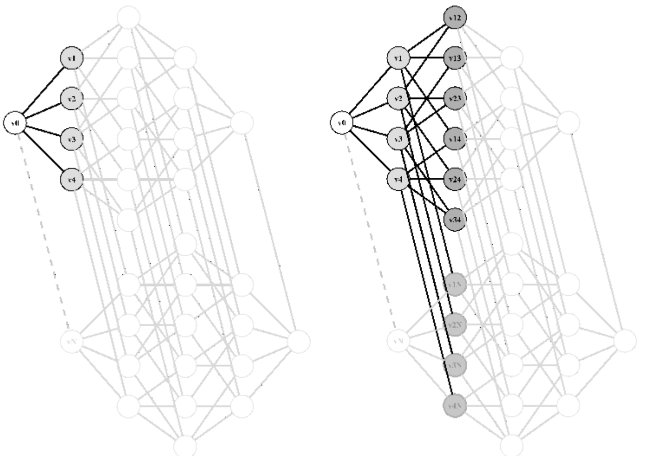
Слоем k N-куба будем называть вершины, в метках которых ровно k единиц. Так как граф G был построен добавлением рёбер, то у его вершин сохранилась разметка гиперкуба. Вершиной типа k будем называть вершину графа G, в метке которой ровно k единиц.

Для иллюстрации доказательства будут даны рисунки на примере 5-куба.

1. Пусть единственная вершина слоя 0 $u_0 = 0 \ldots 0$ гиперкуба вкладывается в вершину $v_0 = 0 \ldots 0$ графа G и ребро e инцидентно вершине v_0.

2. Степени вершин u_0 и v_0 с учётом удалённого ребра равны, поэтому все смежные с u_0 вершины $u_1, \ldots, u_N$ будут отображаться в смежные с v_0 рёбрами гиперкуба вершины $v_1, \ldots, v_{N-1}$, смежные с v_0 и v_N, к которой ведёт дополнительное ребро. Занумеруем их так, чтобы u_i отображалась в v_i (рисунок 4 пункт *а*).

3. Покажем, что вершина u_0 и вершины $u_1 \ldots, u_{N-1}$ являются частью подкуба. Так как $h(u0, ui) = 1$ для $1 \leq i \leq N - i$, то существует ровно $N-1$ координат, в которых данные вершины совпадают с u_0. Через j обозначим номер оставшейся координаты. Вершины, в индексах которых j-тая координата равна 0, образуют один из подкубов Q_N. Остальные вершины образуют второй подкуб. Метки вершин такие же, как и у Q_N, поэтому при отбрасывании j-той компоненты получаются метки гиперкуба Q_{N-1}. Таким образом, все вершины u_i $0 \leq i \leq N-1$ образуют 0 и 1 слои подкуба. Данный подкуб будем называть главным. Второй подкуб этого же графа побочным.



(*а*) (*б*)

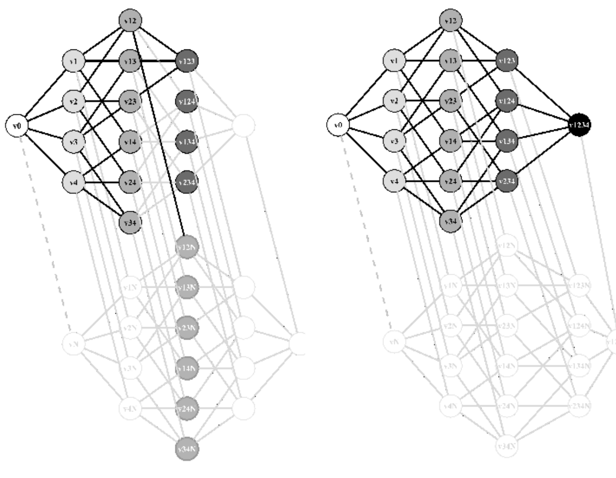
Рис. 4 – Вершины типов 0 и 1 под пунктом *а*, и под пунктом *б* вершины типа 0, 1, 2 и предполагаемые вершины типа 2 при вложении в каждое МР-1-Р 5-куба с удалённым ребром $\{v_0, v_N\}$ при отображении вершины 0 ... 0 гиперкуба в v_0

4. Аналогичным образом для графа G и его вершин $v_0, \ldots, v_{N-1}$ определим множество E, состоящее из вершин, у которых компонента, различная у вершин на концах ребра e в G^*, одинакова с вершиной v_0.

5. Обозначим $V_0 = \{v_0\}$ и $V_1 = \{v_1, \dots, v_{N-1}\}$, $U_0 = \{u_0\}$ и $U_1 = \{u_1, \dots, u_{N-1}\}$.

6. Рассмотрим вершины, которые могут быть образами вершин слоя 2 главного подкуба. Каждая вершина слоя 2 главного подкуба смежна с двумя вершинами этого подкуба слоя 1. Это означает, что каждый кандидат на образ такой вершины должен быть смежен с 2-мя вершинами из V_1. С учётом того, что к вершине можно добавить максимум одно ребро, то в качестве кандидатов могут рассматриваться те незадействованные во вложении вершины, которые соединены ребром оригинального гиперкуба хотя бы с одной вершиной из V_1, так как второе ребро может быть дополнительным. Среди таких вершин только вершины типа 2 графа G. Вершины типа 2 и вершины V_1 имеют по 2 и 1 единице в метке соответственно, то есть они либо смежны (если позиция одной единицы совпадает), либо имеют расстояние Хемминга, равное 3 (если ни одной единицы не совпадает), поэтому по лемме 2 получим, что дополнительного ребра быть между ними не может, и значит, вершины слоя 2 главного подкуба могут отображаться только в те вершины, которые уже имеют 2 смежных среди вершин из V_1. Учитывая то, что в гиперкубе каждая вершина соединена лишь с одной вершиной из другого подкуба, то в качестве образов могут быть только вершины из E. Количество образов и прообразов одинаково, поэтому все вершины будут участвовать во вложении. Будем обозначать вершины типа 2 из E как V_2. На рисунке 4 под буквой *б* проиллюстрирован данный пункт.

7. Пусть $V_0 \dots V_{k-1}$ являются образами вершин слоёв $0, \dots, k-1$ главного подкуба соответственно при $3 \le k < N$, тогда V_k является множеством образов вершин слоя k главного подкуба, где V_k – множество вершин графа G типа k из E. Покажем это. Схема к доказательству проиллюстрирована на рисунке 5 под буквой *а*.



(*а*) (*б*)

Рис. 5 – Вершины типов 0, 1, 2 и 3 и предполагаемые вершины типа 2 при вложении в предполагаемое расширение 5-куба с удалённым ребром $\{v_0, v_N\}$

7.1. Вершины слоя k гиперкуба должны быть смежны с k вершинами слоя $k-1$ из G. Учитывая это, вершины не из множества E не подходят, так как они соединяются с V_{k-1} максимум 2 рёбрами: одно исходное ребро гиперкуба и, возможно, одно дополнительное.

7.2. Незадействованные вершины из E типа $m > k$ могут иметь только 1 ребро.

7.3. Вершины из E типа $m < k$ уже задействованы во вложении.

7.4. Остаются только вершины из E типа k, количество которых равно количеству вершин слоя k главного подкуба.

8. Таким образом, при удалении выбранного ребра e из МР-1-Р G^* получили, что при вложении главного подкуба задействуются все вершины из E – множества вершин, у которых совпадает одна компонента с v_0. Это означает, что к вершинам из E не может вести дополнительное ребро из v_0 (рисунок 5 буква *б*).

9. Удаляя другие инцидентные v_0 рёбра, получим те же самые результаты, но при всех возможных равных компонентах метки: 1-ый, 2-ой, …, N-ный. Это означает, что ни одна вершина из множеств E, формируемых при аналогичном рассмотрении удаления других инцидентных v_0 рёбер, не может соединяться с v_0 дополнительным ребром.

10. В итоге останется единственная вершина, к которой можно добавить ребро от v_0: та, у которой значения всех компонент отличается от v_0. Расстояние до неё превышает любое расстояние между двумя вершинами в $(N-1)$-кубе.

11. Учитывая вершинную симметричность гиперкуба, аналогичные результаты можно получить и для других вершин, поэтому МР-1-Р гиперкуба при $N \ge 5$ единственно с точностью до изоморфизма.

Учитывая, что разобраны все случаи при $N \ge 2$, то для N-куба существует единственное с точностью до изоморфизма МР-1-Р.

0-куб и 1-куб являются полными графами K_1 и K_2, для которых не существует МР-1-Р ввиду невозможности добавления рёбер. ■

IV. Заключение

Таким образом задача о МР-1-Р гиперкуба решена полностью – существует единственное с точностью до изоморфизма МР-1-Р гиперкуба, которое описывается схемой из работы [2].

Библиография

[1] Hayes J.P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Transactions on Computers, 1976. – Vol. 25, № 9. – P. 875-884.

[2] Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. – Vol.23. – P. 135-142.

[3] Абросимов М.Б. Графовые модели отказоустойчивости. // Саратов: Издательство Саратовского университета. – 2012. – 192 с.

[4] Biggs N.L. Distance-Transitive Graphs // Cambridge University Press. – 1993. – P. 155–163. — 205 p.

[5] Лобов А.А., Абросимов М.Б. О единственности минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q4 // Прикладная дискретная математика. – 2022. – № 58. – С. 84-93.

Uniqueness of minimal 1-edge extension of hypercubes

A.A. Lobov

***Annotation*—In 1976 J. P. Hayes proposed a scheme of fault tolerant system construction based on graph theory. In scheme system is modeled by graph. System nodes and links are modeled by graph vertexes and edges or arcs between them. The problem is to build a system which keep functionality after fixed number of nodes fault. Element fault is modeled by corresponding vertex removing. k-fault tolerance is achieved by adding spare nodes and links into system so that original system graph embed to every graph obtained by removing k vertexes from graph corresponding to fault tolerant system. In 1993 F. Harary and J. P. Hayes extended problem to the case of k link faults. Link fault is modeled by edge or arc removing. In the paper we name k-vertex and k-edge fault tolerant system realization vertex and edge k-extension. F. Harary and J. P. Hayes found a scheme of hypercube minimal edge 1-extension construction. Edge k-extension of n-vertex graph is called minimal if it has n vertexes and there are no edge k-extension of that graph with less number of edges exists. N-dimentional hypercube is a graph which vertexes can be labeled by all possible N-element binary vectors so that edge connect two vertexes if and only if Hamming distance between their labels is equals 1. The uniqueness of minimal edge 1-extension of 2-, 3- and 4-dimentional hypercube have been proven. In this paper for $N \geq 2$ the uniqueness of minimal edge 1-extension of N-dimentional hypercube is shown.**

***Key words*—graph extension, graph theory, hypercube, fault tolerance**

References

[1] Hayes J.P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Transactions on Computers, 1976. – Vol. 25, № 9. – P. 875-884.

[2] Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. – Vol.23. – P. 135-142.

[3] Abrosimov M.B. Graphoviye modeli otkazoustoichivosti. // Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta. – 2012. – 192 p. (in Russian)

[4] Biggs N.L. Distance-Transitive Graphs // Cambridge University Press. – 1993. – P. 155–163. — 205 p.

[5] Lobov A.A., Abrosimov M.B. About uniqueness of the minimal 1-edge extension of hypercube Q4 // Prikladnaya diskretnaya matematika. – 2022. – № 58. – P. 84-93 (in Russian).