

# Обратная задача восстановления параметров математической модели с заданной погрешностью данных

Лэ Ван Хуен, Л. В. Черненкокая

**Аннотация** — Данная работа посвящена обратным задачам восстановления параметров математической модели с заданной погрешностью исходных данных. Цель работы – нахождение приближения к параметрам математической модели. Рассмотрена математическая модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформирована обратная задача: по измеренным данным свойств или поведения изучаемого объекта, т.е. по заданным значениям неизвестных функций математической модели, определить значения её параметров. Для решения обратной задачи использована методика, построенная с помощью метода регуляризации Тихонова. Для выбора параметра регуляризации использован метод обобщенной невязки. В качестве численного примера рассмотрена математическая модель, описывающая кинетику процесса нефтепереработки. С заданной погрешностью исходных данных решена обратная задача восстановления математической модели. В результате расчетов найдены приближения к параметрам рассмотренной математической модели. Результаты нашей работы заключаются не только в восстановлении параметров математической модели, но и имеют следующее практическое значение. С найденными приближенными параметрами можно прогнозировать изменение с течением времени свойств или поведения исследуемого объекта, например, изменение концентрации веществ и продукта в процессе нефтепереработки.

**Ключевые слова** — восстановление параметров, математическая модель, метод регуляризации Тихонова, обратная задача.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Обратная задача – это новая область исследований, возникшая с середины 20 века. Первые постановки обратных задач можно найти в физике, астрономии, геофизике. Процесс определения неизвестных параметров задачи непосредственно на основе информации, полученной из серии наблюдений, можно рассматривать как простой пример обратной задачи [1]–[5]. По причинно-следственной связи под обратной задачей понимается задача, которая начинается с

Статья получена 3 апреля 2023.

Лэ Ван Хуен, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, аспирант высшей школы киберфизических систем и управления (huyenlevan120193@gmail.com).

Черненкокая Людмила Васильевна, д-р техн. наук, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, профессор высшей школы киберфизических систем и управления (ludmila@qmd.spbstu.ru).

следствий, а затем вычисляет причину. В работе [6] автором исследована и показана тенденция развития научной области, связанной с обратными задачами. В целом обратная задача относится к областям прикладной математики (в мире) и системного анализа (в России). Сегодня обратная задача становится междисциплинарной наукой, которая интегрируется с другими научными областями и развивается как новое перспективное направление исследований. Нетрудно увидеть участие ученых в других областях, таких как медицина, оптика, экономика, геология, и т.д., в этой области исследований.

Сложность в решении обратных задач заключается в том, что обратные задачи часто являются некорректными задачами [1]–[5]. В частности, обратные задачи могут не иметь решения, могут иметь несколько решений, или их решение может не зависеть непрерывно от исходных данных. Непрерывность решения задачи объясняется следующим образом: при малых изменениях исходных данных решение задачи также нужно менять малым. В практических задачах малое изменение исходных данных неизбежно. Потому что погрешность измерения и погрешность округления приведут к малым изменениям исходных данных. В статьях [7]–[13] авторами поставлена и решена обратная задача восстановления параметра математической модели при отсутствии информации об погрешности исходных данных. В данной работе мы продолжаем рассматривать и решать ту же обратную задачу при наличии дополнительной информации о погрешности исходных данных.

## II. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Будет рассмотрена следующая математическая модель:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t), \\ \dots, \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$  –

параметры математической модели;  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  – неизвестные функции, зависящие от времени  $t$  [7]–[13].

Предположим, что нам известны значения функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в начальный момент времени  $t=0$ :  $x_1(t)_{t=0} = x_1(0), x_2(t)_{t=0} = x_2(0), \dots, x_n(t)_{t=0} = x_n(0)$ .

В рамках математической модели (1) будут сформированы две задачи [7]–[13].

**Прямая задача.** По заданным значениям параметров  $a_{ij} = a_{ij}^0$ , где  $i, j = 1, 2, \dots, n$  и значениям  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ , определить неизвестные функции  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ .

По отношению к прямой задаче будет поставлена обратная задача восстановления параметров математической модели (1).

**Обратная задача.** По заданным (измеренным) значениям функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  в разные моменты времени  $t_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ , определить значения параметров  $a_{ij} = a_{ij}^0$ , где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Решение обратной задачи будет обозначено символом  $\mathbf{K}^0$ , где  $\mathbf{K}^0 = (a_{11}^0, a_{12}^0, \dots, a_{1n}^0, \dots, a_{n1}^0, a_{n2}^0, \dots, a_{nn}^0)^T$ . В данной работе  $\mathbf{K}^0$  будет рассматриваться как искомое (точное) решение обратной задачи.

### III. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ЗАДАННОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Решить вышесказанную обратную задачу непросто, потому что обратные задачи в общем случае часто являются некорректными задачами [1]–[5]. В практических задачах значения  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$  часто будут содержать погрешность измерения и погрешность округления, так что знать точные значения  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$  невозможно.

В работе [8] разработана методика решения вышесказанной обратной задачи. Будут выполнены следующие шаги.

**Шаг 1.** Преобразование (1) в систему алгебраических уравнений  $\mathbf{X}\mathbf{K} = \mathbf{V}$  относительно параметров  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , где  $\mathbf{X}$  – матрица с элементами  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ;  $\mathbf{K}$  – вектор с элементами  $a_{ij}$ ;  $\mathbf{V}$  – вектор свободных членов [8].

**Шаг 2.** Формирование «точной» системы уравнений  $\mathbf{X}_0\mathbf{K} = \mathbf{V}_0$ , где  $\mathbf{X}_0$  – матрица с «точными» значениями  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$ ;  $\mathbf{V}_0$  – вектор «точных» свободных членов [8].

Здесь значения  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$  считаются идеальными, т.е. не содержат погрешности измерения или погрешности округления. Вот почему  $\mathbf{X}_0\mathbf{K} = \mathbf{V}_0$  называется «точной» системой уравнений. Решение

системы  $\mathbf{X}_0\mathbf{K} = \mathbf{V}_0$  обозначается  $\mathbf{K}^0$ .

**Шаг 3.** Формирование «приближенной» системы уравнений  $\mathbf{X}_\eta\mathbf{K} = \mathbf{V}_\delta$ , где  $\mathbf{X}_\eta$  и  $\mathbf{V}_\delta$  – приближения к матрице  $\mathbf{X}$  и вектору  $\mathbf{V}$  по отношениям:  $\|\mathbf{X}_\eta - \mathbf{X}_0\| \leq \eta$ ,  $\|\mathbf{V}_\delta - \mathbf{V}_0\| \leq \delta$ ; погрешности  $\eta, \delta$  – маленькие положительные числа [8].

На практике знать матрицы  $\mathbf{X}_0$  и вектор  $\mathbf{V}_0$  невозможно. Мы можем знать только их приближения. Здесь  $\mathbf{X}_\eta$  – матрица с «приближенными» значениями  $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$ ;  $\mathbf{V}_\delta$  – вектор «приближенных» свободных членов.

**Шаг 4.** Построение регуляризирующего уравнения (регуляризирующей системы уравнений) Тихонова из системы  $\mathbf{X}_\eta\mathbf{K} = \mathbf{V}_\delta$ , полученной в результате шага 3 [8].

Решить систему  $\mathbf{X}_\eta\mathbf{K} = \mathbf{V}_\delta$  не просто. Поскольку она может не иметь решения, может иметь много решений или её решение не зависит непрерывно от исходных данных  $\{\mathbf{X}_\eta; \mathbf{V}_\delta\}$ .

Будет превращена система  $\mathbf{X}_\eta\mathbf{K} = \mathbf{V}_\delta$  в систему уравнений Тихонова:

$$(\mathbf{X}_\eta^*\mathbf{X}_\eta + \alpha\mathbf{E})\mathbf{K} = \mathbf{X}_\eta^*\mathbf{V}_\delta, \quad (2)$$

где  $\mathbf{X}_\eta^*$  – сопряженная матрица к  $\mathbf{X}_\eta$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации [1]–[5].

Решение  $\mathbf{K}^\alpha = (\mathbf{X}_\eta^*\mathbf{X}_\eta + \alpha\mathbf{E})^{-1}\mathbf{X}_\eta^*\mathbf{V}_\delta$  системы (2) называется регуляризованным решением системы  $\mathbf{X}_\eta\mathbf{K} = \mathbf{V}_\delta$ . В работах [1]–[5] было доказано, что при каждом фиксированном значении  $\alpha$  решение  $\mathbf{K}^\alpha$  единственно и непрерывно зависит от  $\{\mathbf{X}_\eta; \mathbf{V}_\delta\}$ . Однако  $\mathbf{K}^\alpha$  не аппроксимирует  $\mathbf{K}^0$  при всех значениях  $\alpha$ .

**Шаг 5.** Нахождение параметра регуляризации и определение регуляризованного решения, являющегося приближением к  $\mathbf{K}^0$ .

В работе [10] была решена обратная задача восстановления параметров математической модели (1) в случае, когда нам не известны погрешности  $\eta, \delta$ . В рамках данной работе будет решена обратная задача с заданной погрешностью исходных данных.

Пусть имеем, что  $\eta = \eta_0$  и  $\delta = \delta_0$ . Рассмотрим метод обобщенной невязки [1]–[5]. Для любого возможного решения  $\mathbf{K}^0$  системы  $\mathbf{X}_0\mathbf{K} = \mathbf{V}_0$  имеется  $\|\mathbf{X}_\eta\mathbf{K}^0 - \mathbf{V}_\delta\| \leq \delta_0 + \eta_0\|\mathbf{K}^0\|$ . Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_\eta\mathbf{K}^0 - \mathbf{V}_\delta\| &= \|(\mathbf{X}_\eta\mathbf{K}^0 - \mathbf{X}_0\mathbf{K}^0) + (\mathbf{X}_0\mathbf{K}^0 - \mathbf{V}_\delta)\| \\ &\leq \|(\mathbf{X}_\eta\mathbf{K}^0 - \mathbf{X}_0\mathbf{K}^0)\| + \|(\mathbf{X}_0\mathbf{K}^0 - \mathbf{V}_\delta)\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Имеются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^0 - \mathbf{X}_0 \mathbf{K}^0) \right\| &\leq \left\| \mathbf{X}_\eta - \mathbf{X}_0 \right\| \left\| \mathbf{K}^0 \right\| = \eta_0 \left\| \mathbf{K}^0 \right\|, \\ \left\| (\mathbf{X}_0 \mathbf{K}^0 - \mathbf{B}_\delta) \right\| &\leq \delta_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что  $\left\| \mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^0 - \mathbf{B}_\delta \right\| \leq \delta_0 + \eta_0 \left\| \mathbf{K}^0 \right\|$  с любыми возможным решением  $\mathbf{K}^0$  системы  $\mathbf{X}_0 \mathbf{K} = \mathbf{B}_0$  (с любым возможным оператором  $\mathbf{X}_0$  и вектором  $\mathbf{B}_0$ , где  $\left\| \mathbf{X}_\eta - \mathbf{X}_0 \right\| \leq \eta$  и  $\left\| \mathbf{B}_\delta - \mathbf{B}_0 \right\| \leq \delta$ ).

Идея метода обобщенной невязки состоит в нахождении значения параметра  $\alpha_0$  так, чтобы:

$$\left\| \mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^{\alpha_0} - \mathbf{B}_\delta \right\| = \delta_0 + \eta_0 \left\| \mathbf{K}^{\alpha_0} \right\|, \quad (5)$$

где  $\mathbf{K}^{\alpha_0}$  – решение системы (2) с определенным значением параметра регуляризации  $\alpha = \alpha_0$  [1]–[5].

В [1]–[5] было доказано, что решение  $\mathbf{K}^{\alpha_0}$  системы (5) аппроксимирует искомого (точное) решение  $\mathbf{K}^0$ , т.е.  $\left\| \mathbf{K}^{\alpha_0} - \mathbf{K}^0 \right\| \approx 0$ .

Решить систему уравнений (5) непросто. Поэтому в данной работе мы будем искать другой вектор, который аппроксимирует вектор  $\mathbf{K}^0$ . Будет использован алгоритм, включающий в себя три шага.

**Шаг 1.** Выбор маленьких значений параметра регуляризации  $\alpha_i = \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-5}\}$ ;

**Шаг 2.** Вычисление решения системы (2):  $\mathbf{K}^{\alpha_i} = (\mathbf{X}_\eta^* \mathbf{X}_\eta + \alpha_i \mathbf{E})^{-1} \mathbf{X}_\eta^* \mathbf{B}_\delta$  при каждом значении параметра регуляризации  $\alpha_i = \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-5}\}$ ;

**Шаг 3.** Определение значения погрешностей  $\eta_i$ ,  $\delta_i$ , чтобы  $\mathbf{K}^{\alpha_i}$  аппроксимировало вектор  $\mathbf{K}^0$ . Согласно методу обобщенной невязки имеются уравнения  $\delta_i + \eta_i \left\| \mathbf{K}^{\alpha_i} \right\| = \left\| \mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^{\alpha_i} - \mathbf{B}_\delta \right\|$  относительно  $\eta_i$ ,  $\delta_i$ . В качестве параметров регуляризации будет выбрано значение  $\alpha_i$ , удовлетворяющее условиям:  $\eta_0 \leq \eta_i$ ,  $\delta_0 \leq \delta_i$ ,  $|\eta_i - \eta_0| \approx 0$ ,  $|\delta_i - \delta_0| \approx 0$ .

Будут выбраны значения  $\eta_i$ ,  $\delta_i$  такими, что  $\eta_0 \leq \eta_i$ ,  $\delta_0 \leq \delta_i$ . Если  $\eta_0 > \eta_i$ ,  $\delta_0 > \delta_i$ , то мы могли непреднамеренно пропустить возможные точные данные  $\{\mathbf{X}_0; \mathbf{B}_0\}$ , которые находятся в множествах  $o_{\delta_0}(\mathbf{B}_\delta) \setminus o_{\delta_i}(\mathbf{B}_\delta)$  и  $o_{\eta_0}(\mathbf{A}_\eta) \setminus o_{\eta_i}(\mathbf{A}_\eta)$ , где  $o_{\delta_i}(\mathbf{B}_\delta)$  – окрестность с центром в точке  $\mathbf{B}_\delta$  и диаметром  $\delta_i$ ;  $o_{\delta_0}(\mathbf{B}_\delta)$  – окрестность с центром в точке  $\mathbf{B}_\delta$  и диаметром  $\delta_0$ .

Будут выбраны значения такими, что  $|\eta_0 - \eta_i| \approx 0$ ,  $|\delta_0 - \delta_i| \approx 0$ . Эти условия предназначены для того, чтобы количество возможных искомого (точных) решений  $\mathbf{K}^0$ , т.е. количество возможных точных матриц  $\mathbf{X}_0$  и точных векторов  $\mathbf{B}_0$ , не увеличилось слишком сильно.

#### IV. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В работах [10], [14]–[16] исследована динамика химических реакций в процессе нефтепереработки в случае, когда исходная смесь состоит из одного тяжелого углеводорода **C**. Математическая модель, описывающая этот процесс нефтепереработки, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = k_5 x_2(t) + k_1 x_3(t) + k_4 x_4(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -k_5 x_2(t) + k_1 x_3(t) + k_4 x_4(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -(k_1 + k_2) x_3(t) + k_3 x_4(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} = k_2 x_3(t) - (k_2 + k_4) x_4(t), \end{cases} \quad (6)$$

где  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$  – неизвестные функции, выражающие зависимость от времени  $t$  концентрации веществ **A**, **B**, **C**, **D**,  $\frac{\text{моль}}{л}$ ;  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$  – константы скорости химических реакций в процессе нефтепереработки,  $c^{-1}$  [10], [14]–[16].

Пусть нам известны концентрации веществ в начальный момент времени  $t = 0$ :  $x_1(t)|_{t=0} = x_1(0)$ ,  $x_2(t)|_{t=0} = x_2(0)$ ,  $x_3(t)|_{t=0} = x_3(0)$ ,  $x_4(t)|_{t=0} = x_4(0)$  [10], [14]–[16]. Будут поставлены две задачи.

**Прямая задача.** По заданным значениям параметров  $k_1 = k_{10}$ ,  $k_2 = k_{20}$ ,  $k_3 = k_{30}$ ,  $k_4 = k_{40}$ ,  $k_5 = k_{50}$  и концентрациям вещества в момент времени  $t = 0$ :  $x_1(t)|_{t=0} = x_1(0)$ ,  $x_2(t)|_{t=0} = x_2(0)$ ,  $x_3(t)|_{t=0} = x_3(0)$ ,  $x_4(t)|_{t=0} = x_4(0)$ , определить функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$ .

**Обратная задача.** По заданным (измеренным) концентрациям вещества в моменты времени  $t_k$ :  $x_1(t_k)$ ,  $x_2(t_k)$ ,  $x_3(t_k)$ ,  $x_4(t_k)$ , где  $k = 1, 2, \dots, m$ , определить значения параметров  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$  математической модели (6) (т.е. найти  $k_{10}$ ,  $k_{20}$ ,  $k_{30}$ ,  $k_{40}$ ,  $k_{50}$ ).

Пусть нам известны концентрации веществ в моменты времени  $t_k = \{0, 30, 60, \dots, 210\}$ , где  $k = 1, 2, \dots, 8$  (таблица 1) [10].

Таблица 1. Заданные (измеренные) концентрации веществ в моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$

$k$	$t(c)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
1	0	0	0	90	10
2	30	77.76206	12.47561	48.11464	6.76653
3	60	132.29327	7.46789	25.74512	4.37430
4	90	162.81084	4.12939	13.78771	2.74217
5	120	179.58861	2.26780	7.39035	1.68145
6	150	188.79792	1.24467	3.96468	1.01403



Регуляризирующая система уравнений Тихонова  $(\mathbf{X}_\eta^* \mathbf{X}_\eta + \alpha \mathbf{E}) \mathbf{K} = \mathbf{X}_\eta^* \mathbf{B}_\delta$  имеет вид:

$$\begin{cases} (9728.39430 + \alpha)k_1 + 3242.79810k_2 - \\ -493.72610k_3 + 987.45221k_4 = 218.36912, \\ 3242.79810k_1 + (5574.80385 + \alpha)k_2 - \\ -493.72610k_3 - 417.06624k_4 = 62.06117, \\ -493.72610k_1 - 493.72610k_2 + \\ + (76.65986 + \alpha)k_3 = -10.35196, \\ 987.45221k_1 - 417.06624k_2 + (229.97958 + \alpha)k_4 \\ = 24.04407, \\ (471.24164 + \alpha)k_5 = 44.43530. \end{cases} \quad (11)$$

**Шаг 5.** Нахождение параметра регуляризации и определение регуляризованного решения, являющегося приближением к  $\mathbf{K}^0$ .

На этом шаге:

– будут выбраны маленькие значения параметра регуляризации  $\alpha_i = \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-5}\}$  ( $\alpha_i = 10^{-i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ );

– будут вычислены решения системы уравнений (2):

$\mathbf{K}^{\alpha_i} = (\mathbf{X}_\eta^* \mathbf{X}_\eta + \alpha_i \mathbf{E})^{-1} \mathbf{X}_\eta^* \mathbf{B}_\delta$  при каждом значении  $\alpha_i$ ;

– будут определены значения погрешностей  $\eta_i, \delta_i$ , чтобы  $\mathbf{K}^{\alpha_i}$  было приближением к  $\mathbf{K}^0$ . Согласно методу обобщенной невязки имеются уравнения  $\delta_i + \eta_i \|\mathbf{K}^{\alpha_i}\| = \|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^{\alpha_i} - \mathbf{B}_\delta\|$  относительно  $\eta_i, \delta_i$ .

В качестве параметра регуляризации мы будем выбирать только что значения  $\alpha_i$ , для которых выполняются условия:  $\eta \leq \eta_i, \delta \leq \delta_i, |\eta_i - \eta| \approx 0, |\delta_i - \delta| \approx 0$ .

Для простоты будут выбраны значения  $\eta_i = \eta = 0.1$ . Значения  $\delta_i$  определяются по уравнениям  $\delta_i + 0.1 \|\mathbf{K}^{\alpha_i}\| = \|\mathbf{X}_\eta \mathbf{K}^{\alpha_i} - \mathbf{B}_\delta\|$ . Результат расчетов представляется в таблице 2.

Таблица 2. Найденные значения погрешностей  $\eta_i, \delta_i$

$i$	$\alpha_i$	$\eta_i$	$\delta_i$
1	$10^{-1}$	0.1	0.136893751153758
2	$10^{-2}$	0.1	0.136886367963180
3	$10^{-3}$	0.1	0.136885795453981
4	$10^{-4}$	0.1	0.136885739909920
5	$10^{-5}$	0.1	0.136885734372633

Видно, что для значений  $\alpha_i = \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-5}\}$  имеются  $\eta \leq \eta_i, \delta \leq \delta_i, |\eta_i - \eta| \approx 0, |\delta_i - \delta| \approx 0$ . Из таблицы 2 следует, что:

– при  $\alpha = \alpha_i = 0.1$  имеем, что  $\mathbf{K}^\alpha$  является приближением к искомому (точному) решению  $\mathbf{K}^0$  системы уравнений  $\mathbf{X}_0 \mathbf{K} = \mathbf{B}_0$ , где  $\|\mathbf{X}_\eta - \mathbf{X}_0\| \leq 0.1$ ,

$$\|\mathbf{B}_\delta - \mathbf{B}_0\| \leq 0.136893751153758;$$

– при  $\alpha = \alpha_2 = 0.01$  имеем, что  $\mathbf{K}^\alpha$  является приближением к искомому (точному) решению  $\mathbf{K}^0$  системы уравнений  $\mathbf{X}_0 \mathbf{K} = \mathbf{B}_0$ , где  $\|\mathbf{X}_\eta - \mathbf{X}_0\| \leq 0.1$ ,

$$\|\mathbf{B}_\delta - \mathbf{B}_0\| \leq 0.136886367963180;$$

– при  $\alpha = \alpha_3 = 0.001$  имеем, что  $\mathbf{K}^\alpha$  является приближением к искомому (точному) решению  $\mathbf{K}^0$  системы уравнений  $\mathbf{X}_0 \mathbf{K} = \mathbf{B}_0$ , где  $\|\mathbf{X}_\eta - \mathbf{X}_0\| \leq 0.1$ ,

$$\|\mathbf{B}_\delta - \mathbf{B}_0\| \leq 0.136885795453981;$$

– и т.д.

Будет построен график, на котором показывается изменение с течением времени концентрации веществ с найденными приближенными значениями параметров математической модели (6).

1. Рассмотрим первый случай:  $\alpha = \alpha_1 = 0.1$ . При  $\alpha = 0.1$  имеются  $k_1^\alpha = 0.02058, k_2^\alpha = 0.00051, k_3^\alpha = 0.00081, k_4^\alpha = 0.01711, k_5^\alpha = 0.09427$ .

На рис. 1 кривые  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$  выражают изменение с течением времени прогнозированной (расчетной) концентрации веществ  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ . Концентрации веществ, измеренные в разное время  $t_k$ , отмечены звездочками. Видно, что измеренные значения очень близки к кривым.

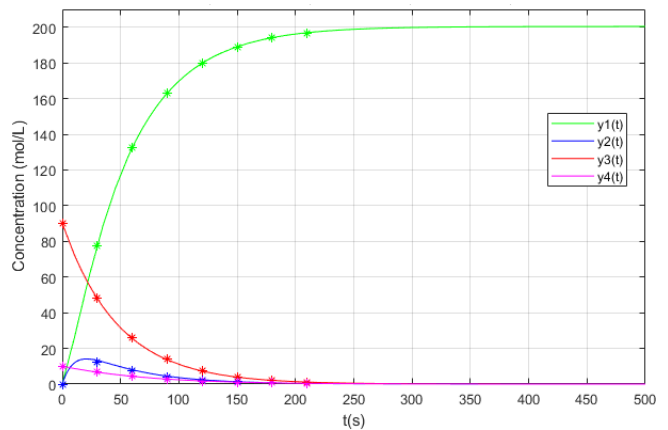


Рис. 1. Изменение концентрации вещества при  $k_1^\alpha = 0.02058, k_2^\alpha = 0.00051, k_3^\alpha = 0.00081, k_4^\alpha = 0.01711, k_5^\alpha = 0.09427$

На основе решения прямой задачи можно вычислить концентрации веществ  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  в моменты времени  $t_k, k = 1, 2, \dots, 8$  (таблица 3).

Таблица 3. Расчетные концентрации веществ в моменты времени  $t_k, k = 1, 2, \dots, 8$  при  $\alpha = 0.1$

$k$	$t(c)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
1	0	0	0	90	10
2	30	77.65548	13.25986	47.94507	6.67059
3	60	132.42334	8.00978	25.55972	4.34539
4	90	163.04790	4.42088	13.63673	2.78177

$k$	$t(c)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
5	120	179.84401	2.42327	7.28183	1.75729
6	150	189.05858	1.33049	3.89209	1.09861
7	180	194.12638	0.73245	2.08247	0.68113
8	210	196.92139	0.40437	1.11550	0.41944

Сравнивая измеренные и рассчитанные концентрации веществ, мы находим, что отклонение между измеренными и расчетными значениями очень малое.

Итак,  $k_1^\alpha = 0.02058$ ,  $k_2^\alpha = 0.00051$ ,  $k_3^\alpha = 0.00081$ ,  $k_4^\alpha = 0.01711$ ,  $k_5^\alpha = 0.09427$  являются приближенными параметрами математической модели (6), которые могут быть использованы в качестве замены искомых (точных) значений.

2. Рассмотрим второй случай  $\alpha = \alpha_2 = 0.01$ . При  $\alpha = 0.01$  имеются  $k_1^\alpha = 0.02054$ ,  $k_2^\alpha = 0.00056$ ,  $k_3^\alpha = 0.00086$ ,  $k_4^\alpha = 0.01736$ ,  $k_5^\alpha = 0.09429$ .

На рис. 2 кривые  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$  выражают изменение с течением времени прогнозированной (расчетной) концентрации веществ **A**, **B**, **C**, **D**. Концентрации веществ, измеренные в разное время  $t_k$ , отмечены звездочками. Видно, что измеренные значения очень близки к кривым.

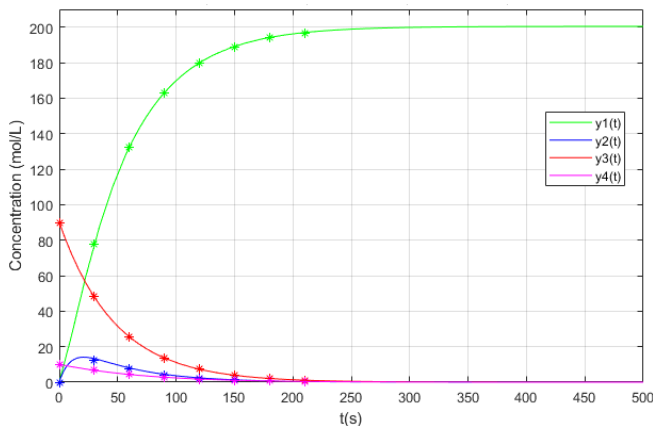


Рис. 2. Изменение концентрации вещества при  $k_1^\alpha = 0.02054$ ,  $k_2^\alpha = 0.00056$ ,  $k_3^\alpha = 0.00086$ ,  $k_4^\alpha = 0.01736$ ,  $k_5^\alpha = 0.09429$

На основе решения прямой задачи можно вычислить концентрации веществ **A**, **B**, **C**, **D** в моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  (таблица 4).

Таблица 4. Расчетные концентрации веществ в моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$  при  $\alpha = 0.01$

$k$	$t(c)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
1	0	0	0	90	10
2	30	77.63919	13.25596	47.94345	6.68264
3	60	132.41277	8.00979	25.55912	4.35188
4	90	163.04882	4.42190	13.63711	2.78118
5	120	179.85337	2.42398	7.28267	1.75220
6	150	189.07193	1.33068	3.89301	1.09171

$k$	$t(c)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
7	180	194.14040	0.73227	2.08326	0.67417
8	210	196.93420	0.40400	1.11609	0.41333

Сравнивая измеренные и рассчитанные концентрации веществ, мы находим, что отклонение между измеренными и расчетными значениями очень малое.

Итак,  $k_1^\alpha = 0.02054$ ,  $k_2^\alpha = 0.00056$ ,  $k_3^\alpha = 0.00086$ ,  $k_4^\alpha = 0.01736$ ,  $k_5^\alpha = 0.09429$  являются приближенными параметрами математической модели (6), которые могут быть использованы в качестве замены искомых (точных) значений.

3. Рассмотрим третий случай  $\alpha = \alpha_3 = 0.001$ . При  $\alpha = 0.001$  имеются  $k_1^\alpha = 0.02054$ ,  $k_2^\alpha = 0.00056$ ,  $k_3^\alpha = 0.00086$ ,  $k_4^\alpha = 0.01739$ ,  $k_5^\alpha = 0.09429$ .

На рис. 3 кривые  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$  выражают изменение с течением времени прогнозированной (расчетной) концентрации веществ **A**, **B**, **C**, **D**. Концентрации веществ, измеренные в разное время  $t_k$ , отмечены звездочками. Видно, что измеренные значения очень близки к кривым.

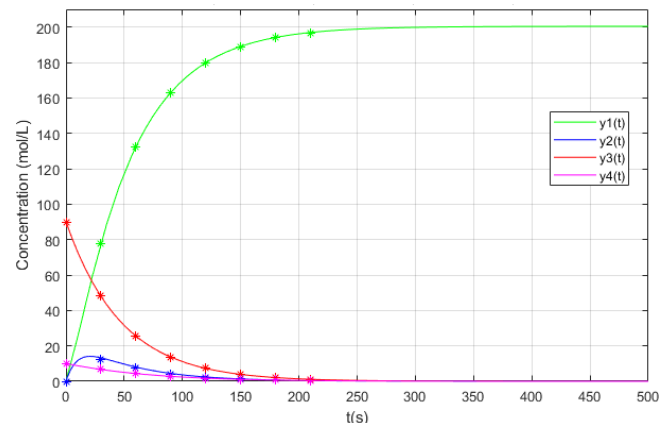


Рис. 3. Изменение концентрации вещества при  $k_1^\alpha = 0.02054$ ,  $k_2^\alpha = 0.00056$ ,  $k_3^\alpha = 0.00086$ ,  $k_4^\alpha = 0.01739$ ,  $k_5^\alpha = 0.09429$

На основе решения прямой задачи можно вычислить концентрации веществ **A**, **B**, **C**, **D** в моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  (таблица 5).

Таблица 5. Расчетные концентрации веществ в моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$  при  $\alpha = 0.001$

$k$	$t(c)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$
1	0	0	0	90	10
2	30	77.63754	13.25556	47.94329	6.68386
3	60	132.41171	8.00979	25.55906	4.35253
4	90	163.04893	4.42201	13.63715	2.78111
5	120	179.85434	2.42405	7.28276	1.75168
6	150	189.07329	1.33070	3.89310	1.09101
7	180	194.14183	0.73225	2.08334	0.67347
8	210	196.93549	0.40396	1.11616	0.41272

Сравнивая измеренные и рассчитанные концентрации веществ, мы находим, что отклонение между измеренными и расчетными значениями очень малое.

Итак,  $k_1^\alpha = 0.02054$ ,  $k_2^\alpha = 0.00056$ ,  $k_3^\alpha = 0.00086$ ,  $k_4^\alpha = 0.01739$ ,  $k_5^\alpha = 0.09429$  являются приближенными параметрами математической модели (6), которые могут быть использованы в качестве замены искоемых (точных) значений.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена обратная задача восстановления параметров математической модели с заданной погрешностью исходных данных. Для решения обратной задачи были использованы метод регуляризации Тихонова и метод обобщенной невязки. Цель работы была достигнута. Именно, были найдены приближения к параметрам исследуемой математической модели. В результате численного примера была рассмотрена и решена обратная задача восстановления параметров математической модели кинетики процесса нефтепереработки. В результате расчетов были найдены приближения к константам скоростей химических реакций. Теоретически наша работа является базой для устранения случаев больших отклонений решений в обратных задачах восстановления параметров математической модели, когда в процессе измерения и обработки данных неизбежны малые погрешности данных. На практике наша работа может быть использована в нефтехимических предприятиях. Восстановление параметров математической модели может помочь прогнозировать и контролировать количество продукта, получаемого в процессе производства.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. – 1979. – 285 с.
- [2] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ. – 1994. – 208 с.
- [3] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука. – 1978. – 206 с.
- [4] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирский федеральный университет. – 2009. – 457 с.
- [5] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука. – 1980. – 289 с.
- [6] Хуен Л.В. Исследование тенденции развития научной области, связанной с обратными задачами // Метрологическое обеспечение инновационных технологий: V Междунар. форум: сб. ст., СПб., 02 марта 2023 г. – СПб.: ГУАП, 2023. – С. 84–86.
- [7] Хуен Л.В. Постановка обратной задачи восстановления параметров в математической модели // Метрологическое обеспечение инновационных технологий: V Междунар. форум: сб. ст., СПб., 02 марта 2023 г. – СПб.: ГУАП, 2023. – С. 87–88.
- [8] Хуен Л.В., Черненькая Л.В. Методика нахождения приближенного решения для коэффициентной обратной задачи // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2022. – № 10. – С. 274–282.
- [9] Хуен Л.В. Коэффициентная обратная задача в математической модели кинетики процесса нефтепереработки // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2022. – Т. 18. – № 5. – С. 64–72.
- [10] Хуен Л.В., Фирсов А.Н. Метод регуляризации Тихонова для

решения обратной задачи в математической модели кинетики процесса нефтепереработки // Вестник кибернетики. – 2022. – Т. 48. – № 4. – С. 49–58.

- [11] Хуен Л.В. Устойчивость динамической системы с приближенными параметрами, найденными методом регуляризации Тихонова // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2022. – № 12. – С. 429–435.
- [12] Хуен Л.В., Черненькая Л.В. Исследование устойчивости регуляризованных решений коэффициентной обратной задачи. Часть 1 // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – № 1. – С. 8–14.
- [13] Хуен Л.В., Черненькая Л.В. Исследование устойчивости регуляризованных решений коэффициентной обратной задачи. Часть 2 // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – № 1. – С. 239–247.
- [14] Лысенкова С.А. О математическом моделировании каталитического крекинга // Вестник кибернетики. – 2018. – № 4. – С. 107–110.
- [15] Микшина В.С. и др. О математическом моделировании каталитического крекинга: монография. СПб.: Научное издание. – 2021. – 120 с.
- [16] Заикин П.В., Лысенкова С.А., Микшина В.С. Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений математической модели кинетики процесса нефтепереработки // Вестник кибернетики. – 2018. – № 2. – С. 120–126.

# The inverse problem of restoring the parameters of a mathematical model with a given data error

Le Van Huyen, L. V. Chernenkaya

**Abstract** — This work is devoted to inverse problems of restoring the parameters of a mathematical model with a given error in the initial data. The purpose of the work is to find an approximation to the parameters of the mathematical model. A mathematical model in the form of a system of ordinary differential equations is considered. An inverse problem has been formed: according to the measured data of the properties or behavior of the object under study, i.e. according to the given values of the unknown functions of the mathematical model, determine the values of its parameters. To solve the inverse problem, a technique constructed using the Tikhonov regularization method was used. The generalized residual method was used to select the regularization parameter. As a numerical example, a mathematical model is considered that describes the kinetics of the oil refining process. With a given error of the initial data, the inverse problem of restoring the mathematical model is solved. As a result of the calculations, approximations to the parameters of the considered mathematical model were found. The results of our work consist not only in restoring the parameters of the mathematical model, but also have the following practical significance. With the found approximate parameters, it is possible to predict a change in the properties or behavior of the object under study over time, for example, a change in the concentration of substances and products during oil refining.

**Keywords** — parameter recovery, mathematical model, Tikhonov's regularization method, inverse problem.

## REFERENCES

- [1] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. M.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury [The main edition of physical and mathematical literature]. – 1979. – 285 p.
- [2] Denisov A.M. *Vvedeniye v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. M.: Izd-vo MGU [M.: Publishing House of Moscow State University]. – 1994. – 208 p.
- [3] Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ejo prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. M.: Nauka [M.: Science]. – 1978. – 206 p.
- [4] Kabanikhin S.I. *Obratnyye i nekorrektnyye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Siberian Federal University. – 2009. – 457 p.
- [5] Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. *Nekorrektnyye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. M.: Nauka [M.: Science]. – 1980. – 289 p.
- [6] Le Van Huyen. Research of the development trend of the scientific field related to inverse problems // *Metrological support of innovative technologies: V Intern. forum: collection of articles*, St. Petersburg, March 02, 2023. St. Petersburg: GUAP, 2023. – P. 84–86.
- [7] Le Van Huyen. Formulation of the inverse problem of parameter recovery in a mathematical model // *Metrological support of innovative technologies: V Intern. forum: collection of articles*, St. Petersburg, March 02, 2023. St. Petersburg: GUAP, 2023. – P. 87–88.
- [8] Le Van Huyen, Chernenkaya L.V. Method for finding an approximate solution for the coefficient inverse ill-posed problem // *News of the Tula State University. Technical Sciences.* – 2022. – No. 10. – P. 274–282.
- [9] Le Van Huyen. Coefficient inverse problem in the mathematical model of the refining process kinetics // *Bulletin of the Voronezh State Technical University.* – 2022. – Vol. 18. – No. 5. – P. 64–72.
- [10] Le Van Huyen, Firsov A.N. Tikhonov's regularization method for solving the inverse problem in a mathematical model of the kinetics of oil refining process // *Proceedings in Cybernetics.* – 2022. – Vol. 48. – No. 4. – P. 49–58.
- [11] Le Van Huyen. Stability of a dynamical system with approximate parameters found by the Tikhonov regularization method // *News of the Tula State University. Technical Sciences.* – 2022. – No. 12. – P. 429–435.
- [12] Le Van Huyen, Chernenkaya L.V. Investigation of the stability of regularized solutions of the coefficient inverse problem. Part 1 // *News of the Tula State University. Technical Sciences.* – 2023. – No. 1. – P. 8–14.
- [13] Le Van Huyen, Chernenkaya L.V. Investigation of the stability of regularized solutions of the coefficient inverse problem. Part 2 // *News of the Tula State University. Technical Sciences.* – 2023. – No. 1. – P. 239–247.
- [14] Lysenkova S.A. On mathematical modeling of catalytic cracking // *Proceedings in Cybernetics.* – 2018. – No. 4. – P. 107–110.
- [15] Mikshina V.S. and others. *O matematicheskom modelirovani kataliticheskogo krekinga* [About mathematical modeling of catalytic cracking]. St. Petersburg: Naukoyemkiye tekhnologii [SPb.: Science-intensive technologies]. – 2021. – 120 p.
- [16] Zaikin P.V., Lysenkova S.A., Mikshina V.S. Analytical solution of differential equation system of mathematical model of refining process kinetics // *Proceedings in Cybernetics.* – 2018. – No. 2. – P. 120–126.