Трехмерные и двумерные изображения: модели, алгоритмы и области анализа

П.А. Чочиа

Аннотация — **Рассматриваются вопросы модификации двухмасштабной модели и алгоритмов обработки при переходе от двумерных к трехмерным изображениям. Показаны изменения области анализа, алгоритмов фильтрации, декомпозиции изображений и обнаружения объектов. Предложены быстрые алгоритмы вычисления локального среднего и порядковых статистик по скользящему окну для 3D-изображений.**

Ключевые слова — **Обработка изображений, трехмерное изображение, модель изображений, алгоритм обработки, область анализа, быстрые алгоритмы.**

I. Введение

Когда употребляют термин «трехмерное изображение» зачастую понимают совершенно различные виды данных [1]-[3], основные из которых следующие.

1. Данные, задаваемые функцией трех координат и являющиеся гомеоморфным отображением некоторого объемного участка трехмерного пространства, включая все содержащиеся в нем объекты.
2. Стереоскопическое изображение, состоящее из пары двумерных изображений, за счет диспаратности дающих наблюдателю представление о расположении объектов.
3. Изображение, являющееся проекцией трехмерной сцены (например, аксонометрической), позволяющее оценить форму и расположение объектов, но при этом остающееся двумерным.
4. Двумерное изображение, каждая точка которого соответствует некоторым координатам в трехмерном пространстве, например дальности или рельефу.
5. Особым способом сформированные изображения, создающие образы объектов, например голограммы.
6. Видеопоследовательности, содержащие набор кадров объектов. Такие данные могут представляться в виде трехмерного массива, но одна из координат при этом является не пространственной, а координатой времени.

Далее под *трехмерным* или *3D-изображением* (непрерывным или дискретным) будут пониматься изображения исключительно первого типа. По существу, 3D-изображение представляет собой расширение обычного 2D-изображения путем добавления еще одного пространственного измерения.

Способы формирования трехмерного изображения могут быть различными; наиболее известным является томографическое сканирование — рентгеновская компьютерная томография или магнитно-резонансная томография. Возможно получение 3D-изображения в результате сейсморазведки при геологических исследованиях, в микроскопии при использовании объектива с переменным фокусным расстоянием, при компьютерном моделировании трехмерных объектов и сцен, или каким-то иным образом.

Обработка и анализ трехмерных изображений играют в настоящее время существенную роль во многих областях исследований, особенно в медицине и геологии. В настоящей работе рассмотрены вопросы расширения модели двумерного изображения [4] и применения ее к трехмерным изображениям, вопросы модификации операций частотной и пространственной фильтраций при переходе в 3D, вопросы сглаживания и декомпозиции изображений [5],[11], фильтрации помех, обнаружения контуров и объектов, а также вычислительные аспекты реализации некоторых алгоритмов для трехмерных изображений [16].

Большинство алгоритмов фильтрации при переходе от двумерных к трехмерным сигналам модифицируются сравнительно просто. Это будет показано на примерах наиболее распространенных алгоритмов, основанных на частотной и пространственной фильтрациях.

II. Особенности трехмерного изображения

В дискретном виде 3D-изображение представляется массивом $\mathbf{X} = [x_{mnk}]$ размерами $M{\times}N{\times}K$. Как и в 2D, значение каждого элемента x_{mnk} есть квантованное на $(x_{\max}+1)$ градаций значение логарифма яркости (энергии) $0 \le x_{mnk} \le x_{\max}$, которое для краткости будем называть просто *яркостью*. Дискретный элемент 3D-изображения принято называть *во́ксель*. Трехмерное изображение, отображающее некоторую сцену, можно рассматривать состоящим из плотно упакованных связных трехмерных областей (объектов), соответствующих деталям сцены. *Областью* или *объектом* будем называть максимальное по размеру связное множество элементов изображения, имеющих близкие, возможно плавно меняющиеся значения яркости. Области могут соприкасаться произвольным образом, в том числе одна область может быть полностью окружена другой. На границах соседних областей значения яркости должны заметно различаться. Не соприкасающиеся области могут иметь произвольные, в том числе и совпадающие яркости. Пространственные границы между соседними областями, как объектами различающейся яркости, называют *контурами*. 3D-изображения характеризуются

Статья получена 20 ноября 2014.

П.А. Чочиа, к.т.н., с.н.с., Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва. (e-mail: chochia@iitp.ru)).

следующими свойствами:
— 3D-изображение — совокупность объектов, плотно заполняющих пространство изображения;
— контуры в 3D-изображении — пространственные границы между объектами;
— сечение 3D-изображения плоскостью и проекция его на плоскость любого направления дают двумерный сигнал со всеми свойствами обычного 2D-изображения.

III. Области анализа

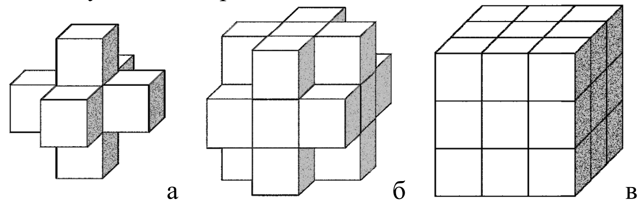
Область анализа — подмножество исходных данных, используемое в оценке параметров. Методы, в которых для каждой точки (или малых фрагментов) изображения используются свои параметры обработки, определяемые по ограниченной и, как правило, центрированной в данной точке области анализа, называют *локальными*.

Рассмотрим связное множество элементов $x_{ijl} \in V_d(x_{mnk})$ таких, которые отстоят от центрального элемента x_{mnk} на расстояние не далее, чем d и вместе составляют фигуру некоторой задаваемой формы. При $d \leq 2 \div 3$ множество $V_d(x_{mnk})$, окружающее центральный элемент (воксель) x_{mnk}, будем называть *окрестностью* и обозначать V_{mnk}, а при $d >> 1$ — *фрагментом* и обозначать W_{mnk}. Отметим, что в зависимости от выполняемых операций сам центральный элемент x_{mnk} может как принадлежать, так и не принадлежать $V_d(x)$. Соответственно, операции вида

$$y_{mnk} = f\{x_{ijl} \mid x_{ijl} \in V_d(x_{mnk})\}, \qquad (1)$$

в которых результат в каждой точке (m,n,k) зависит лишь от значений элементов x_{ijl}, входящих в $V_d(x_{mnk})$, называются *локальными операциями*.

При переходе из 2D в 3D варианты симметричных окрестностей и соседства элементов претерпевают следующие изменения. Окрестность из 2×2 элементов (4 пикселя) становится окрестностью из 2×2×2 элементов (8 вокселей), в которой каждый воксель соседствует с каждым. В двумерной окрестности из 3×3 элементов (9 пикселей), как известно, можно рассматривать два варианта соседства элементов: 4-соседство (только по сторонам пикселей) и 8-соседство (по сторонам и вершинам пикселей) [3]. Аналогом первого из них в 3D будет окрестность с 6-соседством вокселей (Рис. 1,а). Аналогом второго — окрестность с 26-соседством вокселей (Рис. 1,в). Возможен промежуточный вариант с 18-соседством вокселей (Рис. 1,б). Выбор варианта окрестности обычно определяется контекстом задачи и используемым алгоритмом.



а б в

Рис. 1. Окрестности и соседства вокселей в 3D: а) 6-соседство; б) 18-соседство; в) 26-соседство.

В некоторых случаях нас интересует не весь набор точек, попадающих в область анализа, а лишь некоторое его подмножество, включающее центральный элемент, которое будем называть *областью принадлежности*. Способ выбора области принадлежности зависит от задачи; некоторые варианты рассмотрены в разделе VI.

IV. Двухмасштабная многокомпонентная модель трехмерного изображения

Для формулировки сведений об основных свойствах изображений — топологических (форм, размеров областей и контурных перепадов между ними) и статистических (взаимосвязи значений элементов) необходима соответствующая модель изображения. Чтобы быть полезной, она должна описывать свойства изображений на расстояниях, обусловленных особенностями задач, а также давать возможности для построения эффективных алгоритмов обработки и анализа изображений.

Статистические взаимосвязи элементов изображения, находящихся на больших расстояниях, существенно отличаются от аналогичных свойств близлежащих элементов и их не удается описать одними и теми же соотношениями. Для обычного двумерного изображения была разработана двухмасштабная многокомпонентная модель, достаточно хорошо описывающая взаимосвязи элементов и на малых расстояниях в несколько шагов дискретизации, и на больших — соразмерных размерам объектов изображения [4]. Она с успехом может быть перенесена на 3D-изображения.

Значения элементов 3D-изображения $\mathbf{X} = [x_{mnk}]$ при этом будут представляться в виде суммы статистически независимых компонент:

$$x_{mnk} = S_{mnk} + t_{mnk} + \xi_{mnk}. \qquad (2)$$

Первый член суммы — кусочно-гладкая компонента S_{mnk}, определяющая уровни яркости протяженных областей изображения; t_{mnk} — текстурно-детальная компонента, несущая информацию о текстуре и мелких деталях; ξ_{mnk} — шумовая компонента, определяемая шумами регистратора, аналого-цифрового преобразователя и др. Все компоненты предполагаются независимыми и аддитивными, а t_{mnk} и ξ_{mnk} — нормально распределенными и несмещенными.

A. *Масштаб малого размера*

На масштабе малого размера (масштабе элементов окрестности) рассматривается сравнительно небольшое связное множество элементов, расположенных на расстоянии нескольких шагов дискретизации. Как и в двумерной модели [4], элементы трехмерного изображения разделяются на два непересекающихся множества: попадающие на граничные участки (контурные) и не попадающие (внутренние), составляющие вместе полное изображение. Окрестность V_{mnk} элемента x_{mnk} рассматривается как группа из R элементов $x^{r}_{mnk} \in V_{mnk}$, $r = 1,\ldots,R$, ближайших к x_{mnk}, и попадающих в то же множество (контурное или внутреннее), что и элемент x_{mnk} (Рис. 2).

Методом наименьших квадратов проводится гиперплоскость, наиболее близкая значениям элементов из V_{mnk}, составляющая с гиперплоскостью, ориентированной вдоль осей координат **MNK**, некоторый угол, величина и направление которого в точке (m,n,k) характеризуется вектором $\mathbf{g}_{mnk}$. В точке r окрестности проведенная гиперплоскость отличается от значения

x^r_{mnk} на случайную величину γ^r_{mnk}. Такое представление позволяет связать значения элементов окрестности $x^r_{mnk} \in V_{mnk}$ формулой:

$$x^r_{mnk} = \mu_{mnk} + \rho^r g^r_{mnk} + \gamma^r_{mnk}, \quad (3)$$

где μ_{mnk} — значение проведенной гиперплоскости в центральной точке окрестности (m,n,k), ρ^r — расстояние между центральным элементом x_{mnk} и x^r_{mnk}, g^r_{mnk} — величина проекции $\mathbf{g}_{mnk}$ на вектор из x_{mnk} в x^r_{mnk}, а γ^r_{mnk} — случайная величина.

Вводится понятие контурной маски $\mathbf{E} = [e_{mnk}]$: $e_{mnk} = 1$ для контурных и $e_{mnk} = 0$ для внутренних элементов. Обозначая для контурных и внутренних элементов g^r_{mnk} через φ^r_{mnk} и ψ^r_{mnk}, а γ^r_{mnk} через ζ^r_{mnk} и η^r_{mnk} соответственно, представим g^r_{mnk} и γ^r_{mnk} в виде сумм $g^r_{mnk} = e^r_{mnk}\varphi^r_{mnk} + (1-e^r_{mnk})\psi^r_{mnk}$ и $\gamma^r_{mnk} = e^r_{mnk}\zeta^r_{mnk} + (1-e^r_{mnk})\eta^r_{mnk}$. В результате получим формулу модели трехмерной окрестности:

$$x^r_{mnk} = \mu_{mnk} + e^r_{mnk}(\varphi^r_{mnk}\rho^r + \zeta^r_{mnk}) + (1-e^r_{mnk})(\psi^r_{mnk}\rho^r + \eta^r_{mnk}). \quad (4)$$

Здесь ζ^r_{mnk} — стохастическое возбуждение в точке r окрестности для контурных, а η^r_{mnk} — для внутренних элементов. Случайные величины φ_{mnk}, ψ_{mnk}, ζ_{mnk}, и η_{mnk} считаются некоррелированными и несмещенными, а шумовые составляющие ζ_{mnk}, и η_{mnk} — нормально распределенными. Проведенные эксперименты [4],[5] показывают, что значения дисперсий компонент φ и ψ различаются в 10-100 раз.

B. *Масштаб большого размера*

На масштабе большого размера (*масштабе объектов фрагмента*) полагается, что гладкие составляющие S^v тех частей областей u^v ($v = 1,\dots,V$), которые попадают во фрагмент W_{mnk}, задаются полиномом степени не выше, чем ω. Тогда S_{ijl} внутри фрагмента W_{mnk} может быть описана формулой:

$$S^v_{ijl}(W_{mnk}) = \sum_{v=1}^{V}\delta_{u^v}\sum_{p=0}^{\omega}\sum_{q=0}^{\omega-p}\sum_{r=0}^{\omega-p-q} a^v_{pqr} i^p j^q l^r \; ; \quad (5)$$

здесь (i,j,l) — точка области u^v во фрагменте W_{mnk}; $\delta_{u^v} = 1$, если точка $(i,j,l) \in u^v$ и $\delta_{u^v} = 0$ в остальных случаях. Добавляя в (5) текстурную t_{ijl} и шумовую ξ_{ijl} составляющие, получим выражение для значения элементов внутри фрагмента:

$$x^v_{ijl} = \sum_{v=1}^{V}\delta_{u^v}\left(\sum_{p=0}^{\omega}\sum_{q=0}^{\omega-p}\sum_{r=0}^{\omega-p-q} a^v_{pqr} i^p j^q l^r + t^v_{ijl} + \xi^v_{ijl}\right). \quad (6)$$

Это общая формула модели, описывающей значения элементов областей внутри фрагмента. Компоненты t^v_{ijl} и ξ^v_{ijl} считаются нормально распределенными, но значения дисперсий t^v вообще говоря различаются от области к области. Двумерный вариант изображения, содержащего нескольких областей, а также окрестность и фрагмент вокруг элемента x_{mnk}, показаны на Рис. 2. Для 3D-изображения как окрестность с фрагментом, так и сами области будут трехмерными фигурами.

На многих реальных изображениях области, в пределах типичного фрагмента анализа, имеют приблизительно постоянные яркости, не меняющиеся заметно. Поэтому во многих случаях допустимо выбрать минимальную степень полинома: $\omega = 0$. Тогда $S^v_{ijl}(W_{mnk}) = S^v_{mnk}$ и (6) упрощается до следующего вида:

$$x^v_{ijl} = \sum_{u=1}^{V}\delta_{u^v}\left(S^v_{mnk} + t^v_{ijl} + \xi^v_{ijl}\right). \quad (7)$$

Это формула кусочно-постоянной модели фрагмента для представления участков областей изображения, попадающих во фрагмент W_{mnk}.

На масштабе большого размера обычно предполагается, что фрагмент W_{mnk} является прямоугольным параллелепипедом; это вызвано особенностями алгоритмической реализации методов обработки трехмерных изображений.

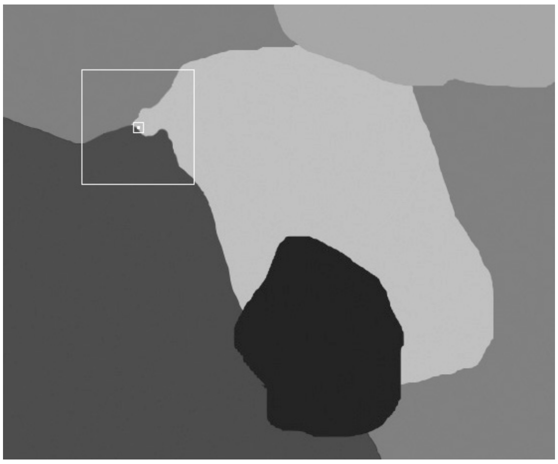


Рис. 2. Участок изображения; обрабатываемый элемент окружен границами окрестности и фрагмента.

V. ИЗМЕНЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ АЛГОРИТМОВ В 3D

Одним из эффективных подходов к обработке сигналов является применение методов фильтрации, использующих ортогональные преобразования: Фурье, Уолша-Адамара, косинусное, и др. [6]. Наиболее распространен класс преобразований, обеспечивающих разложение сигналов по гармоническим функциям, из которых важнейшим является преобразование Фурье; на его примере и покажем модификацию преобразования.

При переходе от 2D- к 3D-изображениям трехмерными становятся как пространственная, так и частотная области представления данных, т.е. вместо двумерного получаем трехмерное Фурье-преобразование; основные свойства преобразования Фурье при этом сохраняются.

Пусть $f(x,y,z)$ — непрерывная функция трех переменных x, y и z. Пара трехмерных непрерывных преобразований Фурье (прямое и обратное) задается следующими выражениями:

$$F(u,v,w) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)e^{-i2\pi(xu+yv+zw)}dx\,dy\,dz \quad (8)$$

и $$f(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v,w)e^{i2\pi(xu+yv+zw)}du\,dv\,dw, \quad (9)$$

где u, v и w — непрерывные частотные, а x, y и z — непрерывные пространственные переменные.

Трехмерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) может быть записано в виде:

$$F(u,v,w)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K-1} f(m,n,k)\,e^{-i2\pi(um/M+vn/N+wk/K)}\,, \quad (10)$$

где $f(m,n,k)$ — трехмерный массив размерами $M\times N\times K$. Обратное трехмерное дискретное преобразование Фурье будет иметь вид:

$$f(m,n,k)=\frac{1}{MNK}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\sum_{w=0}^{K-1} F(u,v,w)\,e^{i2\pi(um/M+vn/N+wk/K)} \quad (11)$$

для $0\le m<M$, $0\le n<N$ и $0\le k<K$, а также $0\le u<M$, $0\le v<N$ и $0\le w<K$.

Как и в двумерном случае, частотная фильтрация трехмерного сигнала осуществляется выполнением прямого преобразования Фурье (10), модификацией полученного спектра $F(u,v,w)$, и последующим обратным преобразованием (11). По аналогии с преобразованием Фурье, другие ортогональные преобразования при переходе к трехмерному сигналу также несложно видоизменяются добавлением размерности.

VI. Изменение пространственных алгоритмов в 3D

Пространственная фильтрация обычно осуществляется локальными операторами согласно формуле (1) с определенными ограничениями на размеры локальной области анализа $V_d(x)$, поскольку в случае функции $f(\cdot,\cdot)$ в (1) общего вида, объем необходимых вычислений возрастает как минимум пропорционально числу элементов, попадающих в $V_d(x)$. Окрестности, которые в 2D-случае содержат порядка $(2d)^2$ пикселей, в 3D будут содержать уже порядка $(2d)^3$ вокселей. Тем не менее для некоторых преобразований в трехмерном случае, как и в двумерном, удается построить быстрые алгоритмы.

A. Алгоритмы, использующие оценку среднего по фрагменту

Ряд алгоритмов обработки двумерных изображений, связанных со сглаживанием, выделением низко- или высокочастотных составляющих, улучшением изображения, обобщаются следующей формулой [5],[7]:

$$y_{mn}=f(x_{mn}-S_{mn},D_{mn})+bS_{mn}+c, \quad (12)$$

где x_{mn} — значение центрального элемента, S_{mn} — оценка сглаженного значения для точки (m,n) (например, значение арифметического среднего или медианы по фрагменту), D_{mn} — оценка дисперсии по фрагменту, $f(u,v)$ — зависимость усиления контраста, b и c — параметры преобразования. Так, при $f(u,v)=0$ и $c=0$ получаем выделение низкочастотной составляющей (сглаживание), при $f(u,v)=u$, $b=0$ и $c=0{,}5$ — выделение высокочастотной составляющей, а при $f(u,v)>u$, $b\le 1$ и $c\approx(1-b)/2$ — улучшение изображения [5],[7].

Преобразования вида (12) легко переносятся на 3D-изображения добавлением размерности, но с учетом того, что S_{mnk}, а также u и v в $f(u,v)$ должны определяться уже не по двумерному, а по трехмерному фрагменту (прямоугольному параллелепипеду) с центром в точке (m,n,k):

$$y_{mnk}=f(x_{mnk}-S_{mnk},D_{mnk})+bS_{mnk}+c. \quad (13)$$

Модификации алгоритмов быстрого вычисления арифметического среднего или медианы S_{mnk}, а также дисперсии D_{mnk} рассмотрены в конце статьи.

B. Операторы контурных перепадов

В основе большинства алгоритмов обнаружения контуров на изображении лежат операторы контурных перепадов, использующие оценки значений либо первой, либо второй производной [3],[8]. Для 2D-изображений контуры объектов суть линии, разделяющие плоские области; в случае, когда линии не имеют разрывов, получаем контурную карту изображаемой сцены.

В трехмерном пространстве контурное изображение представляет собой множество разделяющих объекты поверхностей произвольной формы, и здесь возможно возникновение различных конфигураций контуров, например, становятся допустимыми самопересечения и узлы. Сечение 3D-контурного изображения плоскостью представляет собой двумерную карту контуров. Однако такая карта не обязана совпадать с картой, получаемой проведением контуров по 2D-изображению, являющемуся сечением 3D-изображения той же плоскостью.

Рассмотрим модификации базовых операторов контурных перепадов на основе первой и второй производных при переходе от 2D- к 3D-изображениям в рамках рассмотренных выше трехмерных окрестностей.

1) На основе первой производной: оператор Робертса

Оператор Робертса для двумерного изображения формулируется как сумма модулей разностей значений диагональных элементов по квадрату 2×2 пикселей:

$$y(m,n)=\{|x(m,n)-x(m+1,n+1)|+|x(m+1,n)-x(m,n+1)|\}/2. \quad (14)$$

Для трехмерного изображения оператор Робертса [9] можно представить в виде суммы модулей разностей элементов в диагоналях куба из 2×2×2 пикселей:

$$\begin{aligned} y(m,n,k) &= \qquad (15)\\ &=\{|x(m,n,k)-x(m+1,n+1,k+1)|+|x(m+1,n,k)-x(m,n+1,k+1)|+\\ &+|x(m,n+1,k)-x(m+1,n,k+1)|+|x(m,n,k+1)-x(m+1,n+1,k)|\}/4. \end{aligned}$$

2) На основе первой производной: оператор Собела

Для двумерного изображения оператор Собела задается выражением:

$$\begin{aligned} y(m,n) = \{&|x(m-1,n-1)+2x(m-1,n)+x(m-1,n+1)-\\ &-x(m+1,n-1)-2x(m+1,n)-x(m+1,n+1)|+\\ &+|x(m-1,n-1)+2x(m,n-1)+x(m+1,n-1)- \qquad (16)\\ &-x(m+1,n-1)-2x(m+1,n)-x(m+1,n+1)|\}/8. \end{aligned}$$

Чтобы построить оператор Собела [3] (и аналогичные ему) для 3D-изображения, первоначально определим частные отклики как модули разностей значений элементов для каждого из направлений m, n и k, что соответствует выражению под одним из знаков модуля в (16). Для направления m такую зависимость $y_m(m,n,k)$ с точностью до коэффициентов a, b и c можно выразить формулой:

$$\begin{aligned} &y_m(m,n,k) =\\ &=|ax(m-1,n-1,k-1)+bx(m-1,n-1,k)+ax(m-1,n-1,k+1)+\\ &+bx(m-1,n,k-1)\quad +cx(m-1,n,k)\quad +bx(m-1,n,k+1)+\\ &+ax(m-1,n+1,k-1)+bx(m-1,n+1,k)+ax(m-1,n+1,k+1)-\\ &-ax(m+1,n-1,k-1)-bx(m+1,n-1,k)-ax(m+1,n-1,k+1)-\\ &-bx(m+1,n,k-1)\quad -cx(m+1,n,k)\quad -bx(m+1,n,k+1)-\\ &-ax(m+1,n+1,k-1)-bx(m+1,n+1,k)-ax(m+1,n+1,k+1)|/\\ &/(4a+4b+c). \qquad (17) \end{aligned}$$

Аналогичным образом записываются модули разностей $y_n(m,n,k)$ и $y_k(m,n,k)$ для составляющих n и k.

Трехмерный оператор, аналогичный оператору Собела, выразим через корень из суммы квадратов откликов по трем направлениям:

$$y(m,n,k)=\{[y_m(m,n,k)]^2+[y_n(m,n,k)]^2+[y_k(m,n,k)]^2\}^{1/2}. \quad (18)$$

Коэффициенты a, b и c рекомендуется выбирать как 1, 2 и 3 соответственно.

3) На основе второй производной: оператор Лапласа

Оператор Лапласа (лапласиан) для двумерного изображения задается следующей формулой [3]:

$$y(m,n) = \{x(m-1,n-1)+x(m-1,n)+x(m-1,n+1)+x(m,n-1)+x(m,n+1) + +x(m+1,n-1)+x(m+1,n)+x(m+1,n+1)\}/8 - x(m,n). \qquad (19)$$

Для 3D-изображения модификация лапласиана может быть выражена через набор элементов окрестности:

$$y_{mnk} = \left(\frac{1}{Q_V} \sum_{x_{ijl} \in V_{mnk}} x_{ijl} \right) - x_{mnk}\,, \qquad (20)$$

где V_{mnk} — окрестность точки x_{mnk}, не включающая саму центральную точку x_{mnk}, Q_V — число точек в такой окрестности, $\{x_{ijl}\}$ — набор элементов окрестности V_{mnk}. В качестве V_{mnk} может выступать одна из окрестностей, показанных на Рис. 1; для окрестности (а) $Q_V = 6$, для (б) $Q_V = 18$, для (в) $Q_V = 26$.

4) Другие контурные операторы

Как и для двумерного случая, возможно построение и других детекторов, позволяющих обнаруживать контурные перепады, например, разности максимума и минимума значений элементов окрестности V_{mnk}:

$$y_{mnk} = \max\{x_{ijl} \mid x_{ijl} \in V_{mnk}\} - \min\{x_{ijl} \mid x_{ijl} \in V_{mnk}\}.$$

C. Фильтрация импульсных помех

Импульсными помехами называют сравнительно редкие искажения отдельных элементов изображения, когда значения помехи значительно отличаются от истинных значений сигнала и не коррелированны с ними. Модель искажения изображения импульсными помехами проста. Значение каждого из элементов x_{mnk} с вероятностью p заменяется на случайное значение ξ_{mnk} независимо от значений остальных элементов. Обозначим через $\mathbf{X}' = [x'_{mnk}]$ исходное неискаженное изображение, через $\mathbf{X} = [x_{mnk}]$ — искаженное импульсной помехой, а через $\mathbf{Y} = [y_{mnk}]$ — результат фильтрации. Процесс искажения представится в виде:

$$x_{mnk} = \begin{cases} x'_{mnk} & \text{с вероятностью } (1-p); \\ \xi_{mnk} & \text{с вероятностью } p. \end{cases} \qquad (21)$$

Как правило полагается, что значения импульсных помех ξ_{mnk} распределены равномерно в диапазоне яркостей $[0,x_{\max}]$. Фильтрация импульсных помех сводиться к обнаружению помех и коррекции искаженных отсчетов яркости.

Наиболее распространенные алгоритмы фильтрации основываются на предсказании значения элемента $\tilde{x}_{mnk}$ по окружающей его окрестности V_{mnk}. При этом используются локальные корреляционные связи близлежащих элементов изображения и учитывается, что шум пространственно декоррелирован. При обнаружении сравниваются наблюдаемое x_{mnk} и предсказываемое $\tilde{x}_{mnk}$ значения. Если они отличаются более, чем на величину некоторого порога обнаружения δ, считается, что x_{mnk} — помеха и осуществляется ее исправление на значение $\tilde{x}_{mnk}$ [10].

Общая формула вычисления $\tilde{x}_{mnk}$ в целом повторяет формулу (1):

$$\tilde{x}_{mnk} = f\{x_{ijl} \mid x_{ijl} \in V_{mnk}\}. \qquad (22)$$

Значение функции $f\{\cdot\}$ будем находить следующим образом. Выберем из набора элементов окрестности $x_{ijl} \in V_{mnk}$ усеченное множество $\{x'_{ijl}\}$ путем отбрасывания $2n$ точек с наименьшими и наибольшими значениями ($n \approx Q_V/8$). Множество точек $\{x'_{ijl}\}$ будет соответствовать так называемой *области принадлежности*. Проведем через точки $\{x'_{ijl}\}$ ближайшую гиперплоскость и возьмем ее значение в точке (m,n,k). Полученная величина и будет искомым предсказываемым значением $\tilde{x}_{mnk}$.

Обобщенная формула фильтрации для большинства алгоритмов будет следующей:

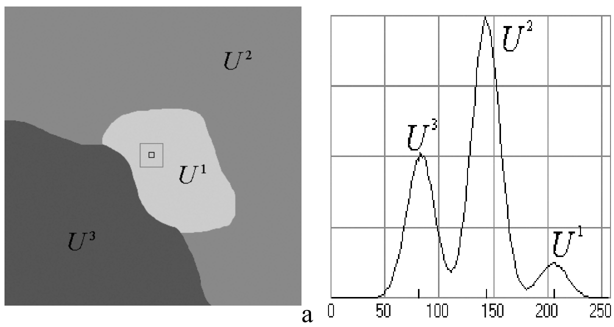
$$y_{mnk} = \begin{cases} x_{mnk}\,, & \text{если } |x_{mnk} - \tilde{x}_{mnk}| < \delta; \\ \tilde{x}_{mnk}\,, & \text{если } |x_{mnk} - \tilde{x}_{mnk}| \ge \delta. \end{cases} \qquad (23)$$

При больших p, когда вероятность искажения пары соседних вокселей достаточно высока, рекомендуется итеративный процесс фильтрации: первоначально с большим значением порога δ, затем с постепенным его уменьшением. Рекомендуется для первой итерации применять окрестность на Рис. 1,а, а для последующих — окрестности на Рис. 1,б и (в).

D. Декомпозиция изображения

Для двумерного изображения вопросы декомпозиции, означающей в терминах модели (2) разделение изображения на сглаженную S и текстурно-детальную компоненты $(t + \xi)$, были рассмотрены в [5],[7],[11]. Суть изложенного в них алгоритма заключается в том, что для каждой точки изображения (m,n) на основе последовательного анализа окрестности V_{mn} и фрагмента W_{mn}, окружающих элемент x_{mn}, выбирается часть точек W_{mn} в качестве *области принадлежности*, и значение S_{mn} оценивается по выбранному множеству.

Алгоритм декомпозиции использует анализ распределений вероятностей значений элементов по окрестности V_{mn} и фрагменту W_{mn}. Пример фрагмента, охватывающего три области, а также распределение значений элементов по фрагменту (гистограмма) показаны на Рис. 3. Областью принадлежности в данном случае является множество точек объекта U^1.



а б

Рис. 3. а) Область анализа (фрагмент); б) распределение вероятностей значений элементов по фрагменту.

Поскольку используемый подход основан на анализе распределений вероятностей, то он позволяет легко перейти от 2D- к 3D-изображению — достаточно лишь вместо двумерных окрестности V_{mn} и фрагмента W_{mn} подставить в формулы трехмерные окрестность V_{mnk} и фрагмент W_{mnk}. В нотации [12], алгоритм декомпозиции трехмерного изображения формулируется следующим образом.

При заданных размерах $l{\times}l{\times}l$ окрестности V_{mnk} и $L{\times}L{\times}L$ фрагмента W_{mnk} ($l < L$), центрированных в точке (m,n,k), ширине яркостных интервалов анализа Δ^V и Δ^W, а также ранговых параметрах $n^V < l^3/2$ и $n^W < L^3/2$ соответственно, значение сглаженной компоненты S_{mnk} в (2) находится выполнением следующих операций для каждой точки (m,n,k) изображения:

1. Подсчитываются вероятности распределения (гистограммы) по трехмерным окрестности $H^V_{mnk} = \{\ h^V_{mnk}(i)\ \}$ и фрагменту $H^W_{mnk} = \{\ h^W_{mnk}(i)\ \}$ с центром в (m,n,k).

2. По гистограмме окрестности H^V_{mnk} и параметру n^V находятся значения $R^V_1 = R^V(n^V/l^3)$ и $R^V_2 = R^V(1 - n^V/l^3)$; здесь ранговые значения $R(x)$ определяются как решения уравнения $\sum_{i=0}^{R(x)} h^V_{mnk}(i) = x$, где $h^V_{mnk}(i)$ — гистограмма значений элементов в окрестности V_{mnk}. Промежуточное значение $\tilde{x}^V$ находится сравнением x_{mnk} с R^V_1 и R^V_2: $\tilde{x}^V = x_{mnk}$, если $R^V_1 \le x_{mnk} \le R^V_2$; $\tilde{x}^V = R^V_1$, если $x_{mnk} < R^V_1$; и $\tilde{x}^V = R^V_2$, если $x_{mnk} > R^V_1$.

3. Из элементов V_{mnk} выбираются z таких $x^r_{mnk} \in V_{mnk}$ ($r = 1,\dots, z$), что попадают в интервал ($\tilde{x}^V - \Delta^V$, $\tilde{x}^V + \Delta^V$), где Δ^V — его полуширина. По значениям x^r_{mnk} из данного интервала, подсчитывается среднее [13]:

$$\bar{x}_{mnk} = \mathrm{A}(V_{mnk}, x_{mnk}, n^V, \Delta^V) = \frac{1}{z}\sum_{r=1}^{z} x^r_{mnk}\,, \qquad (24)$$

где $\tilde{x}^V - \Delta^V \le x^r_{mnk} \le \tilde{x}^V + \Delta^V$.

4. Аналогично п. 2, по гистограмме фрагмента H^W_{mnk} и заданному n^W находятся значения $R^W_1 = R^W(n^W/L^3)$ и $R^W_2 = R^W(1 - n^W/L^3)$. Значение $\tilde{x}^W$ находится сравнением $\bar{x}_{mnk}$ с R^W_1 и R^W_2: $\tilde{x}^W = \bar{x}_{mnk}$, если $R^W_1 \le \bar{x}_{mnk} \le R^V_2$; $\tilde{x}^W = R^W_1$, если $\bar{x}_{mnk} < R^W_1$; и $\tilde{x}^W = R^W_2$, если $\bar{x}_{mnk} > R^W_2$.

5. Сглаженное значение S_{mnk} находится как медиана по усеченной гистограмме фрагмента H^W_{mnk} — той ее части, которая расположена в интервале ($\tilde{x}^W - \Delta^W$, $\tilde{x}^W + \Delta^W$):

$$S_{mnk} = \mathrm{med}(W_{mnk}, \bar{x}_{mnk}, n^W, \Delta^W)\,. \qquad (25)$$

Рис. 4. Результат декомпозиции: исходное изображение (слева), сглаженная компонента S_{mn} (справа) и графики отмеченной строки.

Полученное значение S_{mnk} считается искомой сглаженной компонентой. Упрощенный вариант данного алгоритма был позже опубликован в [14] под названием *билатеральная фильтрация*. Пример декомпозиции двумерного изображения размерами 256×256 элементов с фрагментом сглаживания W_{mnk} размерами 15×15 элементов показан на Рис. 4.

E. Обнаружение объектов заданного объема

В [12] показано, что изложенный выше алгоритм декомпозиции можно использовать для обнаружения объектов на изображении. Аналогично 2D-изображениям, для которых решается задача обнаружения объектов по их площади, в трехмерной модификации ставится задача обнаружения объектов по их объему.

По аналогии с двумерной, трехмерная задача также допускает формулировку в трех вариантах: обнаружение объектов с объемом (т.е. числом элементов) N^j меньше заданного T_1, больше заданного T_2, и обнаружение объектов, имеющих объем в интервале $T_1 < N^j < T_2$.

1) Обнаружение объектов с $N^j > T$

Предполагается, что изображение состоит из достаточно ровного фона (большая область U^0), на которой имеется набор небольших областей $U^1,\dots,U^J$, отстоящих друг от друга достаточно далеко, и можно выбрать некоторый размер фрагмента L ($L^3/2 > T$) такой, что в любой фрагмент W_{mnk} попадает не более одной области с $N^j > T$, либо несколько меньших, но при условии $\Sigma N^j < T$ (U^j _ W). В п. 5 алгоритма декомпозиции (25) выберем $n^W = T$, а $R^W_1 = R(T/L^3)$ и $R^W_2 = R(1{-}T/L^3)$. Обработкой изображения с данными значениями R^W_1 и R^W_2 получим:

$$y_{mnk} = S_{mnk}, \qquad (26)$$

т.е. сглаженную компоненту исходного изображения, на которой остались области с $N^j > T$, обнаруживаемые детектором со значением порога $S(U^0) \pm \delta$, где $S(U^0)$ — средняя яркость фона, а $\delta < \min_j\{|S(U^j) - S(U^0)|\}$; ($S(U^j)$ — яркости соответствующих областей).

2) Обнаружение объектов с $N^j < T$

Сглаженная компонента S_{mnk}, в (25) содержит лишь области с $N^j > T$, а области с $N^j < T$ содержатся в разностной компоненте $t_{mn} = (x_{mn} - \xi_{mn}) - S_{mn}$. Детекция объектов с $N^j < T$ достигается пороговым обнаружением в точках, где $|t_{mn}| \ge \delta$ (δ — порог обнаружения).

3) Обнаружение объектов с $T_1 < N^j < T_2$

Возможны два варианта решения.

В *первом случае* сначала выберем $n^W = T_1$. Тогда сглаженная компонента S_{mnk} в (25) будет содержать объекты с $N^j > T_1$. Осуществим повторную ее обработку алгоритмом (25) с $n^W = T_2$ ($T_2 > T_1$). Очевидно, во вновь полученной сглаженной компоненте S'_{mnk} будут содержаться лишь объекты с $N^j > T_1$. Взяв разность $y_{mnk} = |S_{mnk} - S'_{mnk}|$ получим сигнал, содержащий объекты в диапазоне $T_1 < N^j < T_2$. Недостаток данного решения — алгоритм получается двухпроходовым.

Второй вариант. Обратим внимание, что при анализе гистограмм по окрестности и фрагменту используются два разных порога (n^V и n^W). Выберем размеры окрестности l и фрагмента L больше обычного — такими, чтобы $l^3 > 2T_1$ и $L^3 > 2T_2$. Задав R^V_1 и R^V_2 как

$R_1^V = R^V(T_1/l^2)$ и $R_2^V = R^V(1 - T_1/l^2)$, после операции (24) будем иметь $\bar{x}_{mnk}$, которое уже не содержит области с $N^j < T_1$. Далее в п. 5 алгоритма декомпозиции, при анализе H_{mn}^W, зададим R_1^W и R_2^W как $R_1^W = R^W(T_2/L^3)$ и $R_2^W = R^W(1 - T_2/L^3)$. Получив значение S_{mnk} в (25), возьмем разность $y_{mnk} = |\bar{x}_{mnk} - S_{mnk}|$, на которой объекты выделяются пороговым обнаружением.

Отметим, что как понятие площади в двумерном случае, так и понятие объема в трехмерном варианте алгоритма используются в несколько необычном смысле — как «локальный» объем, т.е. объем той части объекта, которая попадает внутрь фрагмента W_{mnk}.

VII. Некоторые вычислительные алгоритмы

A. *Сумма по прямоугольному параллелепипеду*

Введем обозначение для суммы по фрагменту 2D-изображения:

$$S_{(ij)(mn)} = \sum_{u=i}^{m-1}\sum_{v=j}^{n-1} x_{uv} ,$$

т.е. $S_{(ij)(mn)}$ — сумма значений элементов x_{uv}, попадающих в прямоугольный фрагмент, диагональные точки которого имеют координаты (i, j) и $(m-1,n-1)$. Обратим внимание, что фрагмент при этом не включает точку с координатами (m,n) и соответствующие ей строку и столбец. Аналогично для трехмерного изображения, $S_{(ijl)(mnk)}$ — сумма значений элементов x_{ijl} в прямоугольном параллелепипеде с координатами углов (i,j,l) и $(m-1,n-1,k-1)$:

$$S_{(ijl)(mnk)} = \sum_{u=i}^{m-1}\sum_{v=j}^{n-1}\sum_{w=l}^{k-1} x_{uvw} .$$

Для двумерного изображения классический способ вычисления суммы $S_{(mn)(m+H,n+L)}$ по скользящему прямоугольному фрагменту размерами $H\times L$ элементов при переходе от элемента (m,n) к элементу $(m,n+1)$ сводится к формуле

$$S_{(m,n+1)(m+H,n+L+1)} = S_{(m,n)(m+H,n+L)} - S_{(m,n)(m+H,n+1)} + S_{(m,n+L)(m+H,n+L+1)}, \quad (26)$$

где последние два члена — суммы элементов по левому (удаляемому) и правому (добавляемому) столбцам фрагмента. Алгоритм требует 4 операции независимо от размеров фрагмента — 2 операции в выражении (26) и две операции на пересчет каждой из сумм по столбцу $S_{(m,n)(m+H,n+1)}$ при переходе от строки m к строке $m+1$. Дополнительно требуется N ячеек для хранения сумм по столбцам.

При переходе к 3D–изображению, формула (26) будет модифицирована для скользящего прямоугольного параллелепипеда размерами $H\times L\times J$:

$$S_{(m,n,k+1)(m+H,n+L,k+J+1)} = S_{(m,n,k)(m+H,n+L,k+J)} - S_{(m,n,k)(m+H,n+L,k+1)} + S_{(m,n,k+J)(m+H,n+L,k+J+1)}, \quad (27)$$

где последние два члена — суммы элементов по левой (удаляемой) и правой (добавляемой) граням параллелепипеда. Данный алгоритм требует уже 6 арифметических операции независимо от размеров фрагмента — 2 операции в выражении (27), две операции на пересчет каждой из сумм по граням и две на пересчет сумм по столбцам. Кроме того, требуется K ячеек для хранения массива сумм по граням и $N\times K$ ячеек для хранения сумм по столбцам.

Для двумерного изображения известен и другой алгоритм вычисления суммы по прямоугольнику произвольного размера. Пусть для каждой точки (m,n) подсчитаны суммы $S_{mn} = S_{(0,0)(m,n)}$ по прямоугольнику с диагональными элементами x_{00} и $x_{m-1,n-1}$. Тогда сумма $S_{(ij)(mn)}$ значений элементов внутри прямоугольника с угловыми координатами (i, j) и $(m-1,n-1)$ будет:

$$S_{(ij)(mn)} = S_{mn} - S_{m,j} - S_{i,n} + S_{ij}, \quad (28)$$

что в среднем для каждого элемента изображения требует 2 операции для вычисления суммы S_{mn} и 3 операции для вычислений по формуле (28). Однако для хранения сумм S_{mn} требуется уже $M\times N$ ячеек, равное размеру изображения. Преимуществом является то, что за те же 3 операции можно вычислять $S_{(ij)(mn)}$ для любых значений координат, а не только по скользящему фрагменту.

Алгоритм (28) также может быть модифицирован для трехмерного изображения. Пусть для каждой точки (m,n,k) подсчитаны суммы S_{mnk} по прямоугольному параллелепипеду с диагональными элементами x_{000} и $x_{m-1,n-1,k-1}$, т.е. $S_{mnk} = S_{(000)(mnk)}$. Нетрудно показать, что в таком случае сумма $S_{(ijl)(mnk)}$ значений элементов внутри параллелепипеда с угловыми координатами (i, j, l) и $(m-1,n-1,k-1)$ вычисляется при помощи следующей операции:

$$S_{(ijl)(mnk)} = S_{mnk} - S_{mjk} - S_{mnl} - S_{ink} + S_{mjl} + S_{ijk} + S_{inl} - S_{ijl}. \quad (29)$$

Таким образом с учетом того, что для вычисления каждого из значений S_{mnk} требуется 3 арифметических операции, для вычисления суммы $S_{(ijl)(mnk)}$ для каждого элемента трехмерного изображения потребуется в среднем 10 арифметических операций. Объем дополнительно требуемой памяти составит $M\times N\times K$ ячеек с разрядностью, достаточной для значений сумм S_{mnk}.

Аналогично можно находить дисперсии по фрагменту $D_{(ijl)(mnk)}$, вычисляя значения сумм квадратов $S_{(mnk)}(x^2)$ для каждой из точек (m,n,k) и для прямоугольного параллелепипеда $S_{(ijl)(mnk)}(x^2)$, и затем пользуясь формулой

$$D_{(ijl)(mnk)} = \{S_{(ijl)(mnk)}(x^2) - (S_{(ijl)(mnk)})^2\}/N_{(ijl)(mnk)}, \quad (30)$$

где $S_{(ijl)(mnk)}(x^2)$ — сумма квадратов значений элементов, попадающих в параллелепипед, а общее число точек в параллелепипеде равно $N_{(ijl)(mnk)} = (m-i)\times(n-j)\times(k-l)$.

B. *Порядковые статистики по прямоугольному параллелепипеду*

Основой для вычисления порядковых статистик по фрагменту W как 2D- так и 3D-изображения служит гистограмма распределения значений яркости по этому фрагменту $h^W(x)$, а также ее интегральная характеристика $F^W(x)$:

$$F^W(x) = \sum_{i=0}^{x} h^W(i); \quad F^W(x_{\max}) = N^W, \quad (31)$$

где $x_{\max}$ — максимально возможное значение яркости, а N^W — число точек во фрагменте W. Порядковые статистики вида $R^W(n)$, где $0 \le n \le N^W$, представляют собой зависимость:

$$R^W(n) = z, \quad \text{если} \quad F^W(z-1) < n \le F^W(z). \quad (32)$$

Алгоритм скользящего вычисления гистограммы по фрагменту строится аналогично формулам (26) и (27), т.е. при смещении фрагмента к следующей точке производится удаление точек на одной грани фрагмента и добавление точек на противоположной грани [15]. В двумерном случае алгоритм скользящего вычисления гистограммы по фрагменту при переходе от точки (m,n) к соседней точке $(m,n+1)$ требует в среднем $2H$ числа операций (H — число строк во фрагменте). В трехмерном случае при переходе от точки (m,n,k) к точке $(m,n,k+1)$ потребуется уже $2H\times L$ операций, где $H\times L$ — число точек в грани параллелепипеда, перпендикулярной направлению смещения K.

В трехмерном случае число требуемых операций растет пропорционально произведению $H\times L$. Однако, если $(H\times L) > (x_{\max}+1)$, то вместо операций со значениями отдельных точек выгодно заранее сформировать гистограммы для граней параллелепипеда $h^F_{(ijk)(m,n,k+1)}(x)$, а затем осуществлять операции вычитания и прибавления таких гистограмм:

$$h^W_{(i,j,k+1)(m,n,k+J+1)}(x) = h^W_{(ijk)(m,n,k+J)}(x) - h^F_{(ijk)(m,n,k+1)}(x) + \\ + h^F_{(i,j,k+J)(m,n,k+J+1)}(x)\,, \qquad (33)$$

где J — размер фрагмента в направлении смещения K. Действия по формуле (33) требуют в среднем $2(x_{\max}+1)$ арифметических операций на одну точку изображения независимо от размера параллелепипеда. Для пересчета гистограмм по граням параллелепипеда $h^F_{(ijk)(m,n,k+1)}(x)$ нужно дополнительно в среднем $2L$ операций на точку и $(x_{\max}+1)\times K$ ячеек памяти для хранения K гистограмм.

Число операций $(x_{\max}+1)$, требуемое для прибавления/вычитания каждой из гистограмм по граням параллелепипеда $h^F_{(ijk)(m,n,k+1)}(x)$, можно уменьшить, если воспользоваться пространственной корреляцией обрабатываемых данных. На участках с медленным изменением яркости, которых на реальных изображениях обычно большинство, размах значений элементов сравнительно невелик — в несколько раз меньше полного диапазона в $(x_{\max}+1)$ градаций. Добавив к каждой из гистограмм $h^F_{(ijk)(m,n,k+1)}(x)$ по 2 ячейки для запоминания минимального и максимального значений распределения, и, соответственно, обрабатывая лишь указываемый диапазон градаций, удается дополнительно в несколько раз сократить общее число операций.

VIII. Заключение

Рассмотрены вопросы модификации двумерных модели и алгоритмов обработки изображений в применении к трехмерным изображениям. Показаны варианты изменения области анализа, алгоритмов фильтрации, декомпозиции изображений и обнаружения объектов, которые сравнительно несложно модифицируются при переходе от 2D- к 3D-изображениям. Предложены вычислительные алгоритмы, сокращающие количество операций при определении значений среднего и порядковых статистик по скользящему фрагменту для 3D-изображения.

Библиография

[1] Toriwaki J., Yoshida H. *Fundamentals of Three-Dimensional Digital Image Processing*. New York: Springer, 2009.

[2] Красильников Н. *Цифровая обработка 2D и 3D изображений*. СПб.: BHV-Петербург, 2011.

[3] Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений*. М.: Техносфера, 2012.

[4] Чочиа П.А. “Двухмасштабная модель изображения”. В кн. *Кодирование и обработка изображений*. М.: Наука, 1988, С. 69-87.

[5] Чочиа П.А. *Обработка и анализ изображений на основе двухмасштабной модели: Препринт ИППИ АН СССР*. М.: ВИНИТИ, 1986.

[6] Ахмед Н., Рао К. *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов*. М.: Связь, 1980.

[7] Chochia P.A. “Image Enhancement Using Sliding Histograms”. *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, 1988, vol. 44, no. 2, pp. 211-229.

[8] Прэтт У. *Цифровая обработка изображений*. М.: Мир, 1982. Т. 1, 2.

[9] Робертс Л. “Автоматическое восприятие трехмерных объектов”. В кн. *Интегральные роботы*. М.: Мир, 1973, С. 162–208.

[10] Чочиа П.А. “Цифровая фильтрация импульсных помех на телевизионных изображениях”. *Техника средств связи: сер. Техника телевидения*, 1984, вып.1, С. 26–36.

[11] Чочиа П.А. “Сглаживание изображения при сохранении контуров”. В кн. *Кодирование и обработка изображений*. М.: Наука, 1988, С. 87-98.

[12] Чочиа П.А. “Некоторые алгоритмы обнаружения объектов на основе двухмасштабной модели изображения”. *Информационные процессы*, 2014, Т. 14, № 2, С. 117-136.

[13] Lee J.S. “Digital Image Smoothing and the Sigma Filter”. *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, 1983, vol. 24, no. 2. pp. 255-269.

[14] Tomasi C., Manduchi R. “Bilateral filtering for gray and color images”. *Proc. IEEE 6th Int. Conf. on Computer Vision*, Bombay, India, 1998, pp. 839-846

[15] Чочиа П.А. “Параллельный алгоритм вычисления скользящей гистограммы”. *Автометрия*, 1990, № 2, С. 40-44.

[16] Чочиа П.А. “Модификация модели и алгоритмов обработки при переходе от двумерных к трехмерным изображениям.” В кн. *IX Международная научно-практическая конференция “Современные информационные технологии и ИТ-образование.” Сборник избранных трудов*. М.: МГУ, 2014, С. 820-833.

Three-dimensional and two-dimensional images: modification of image model, analysis area processing algorithms

P.A. Chochia

Abstract – The specificities of three dimensional images are formulated. The adaptation of analysis area and two-scale image model to 3D-images is studied. The modifications of various image processing algorithms to 3D-images are demonstrated. Fast algorithms for calculating local average and order statistics in the moving window for 3D-images are proposed.

Keywords — Image processing, three-dimensional image, image model, image processing algorithm, analysis area, fast algorithms.