

Моделирование социодинамических процессов на основе использования диффузионного уравнения с дробными производными

Константин К. Отрадных, Динара И. Сабирова и Дмитрий О. Жуков

Аннотация: на примере активности пользователей сетевых масс-медиа была рассмотрена социодинамика процессов в сложных системах с участием человеческого фактора. Временные ряды изученных процессов имеют фрактальный характер и обладают антиперсистентностью (имеют краткосрочную память, показатель Хёрста меньше 0,5).

Статистическая обработка наблюдаемых данных показала, что в распределении амплитуд изменения активности пользователей замечается незначительная величина асимметрии, распределение амплитуд является практически симметричным; так же отмечается «тяжёлый хвост»: графики плотности распределений лежат выше графика нормального распределения.

Фрактальность временных рядов исследуемых процессов связана с тем, что описывающие их переменные характеризуются дробными переменными измерениями, а значит, при выводе аппроксимирующих функций плотности вероятности распределения их параметров уместно использовать дробно-дифференциальные уравнения, например, диффузионного типа. В статье рассмотрено построение такой модели, её анализ и сравнение результатов моделирования с наблюдаемыми данными.

Ключевые слова: социодинамические процессы, активность пользователей сетевых масс-медиа, временные ряды, показатель Хёрста, фрактальность временного ряда, дифференциальные уравнения с дробными производными.

I. ВВЕДЕНИЕ

Интернет занимает большое место в жизни человека. Он позволяет смотреть кино и читать книги; открывать своё дело и оформлять покупки, не выходя из дома; позволяет пользователю находить необходимую

информацию. Значимую роль играют сетевые масс-медиа ресурсы, поскольку комментарии пользователей, которые те оставляют на сайтах или в блогах, характеризуют их активность и играют роль индикаторов общественного мнения. И чем более резонансной является новость, тем выше активность пользователей сети. Анализ активности пользователей в сети является одной из актуальных научных тем.

С одной стороны, исследования процессов сетевых масс-медиа должно основываться на использовании междисциплинарных подходов, а с другой стороны такие исследования приводят к появлению новых инженерных решений в системах сетевого общения пользователей.

Изменения активности пользователей в социальных сетях и масс-медиа образуют временные ряды, анализ динамики которых и характеристик играет важную роль в прогнозировании направленности социодинамических процессов и общественных настроений.

Социальные сети и сетевые масс-медиа относятся к сложным системам, которые можно определить, как структуры, где хотя бы одним из элементов выступает человек. Действие множества случайных факторов приводит к стохастичности свойств таких систем. Помимо стохастичности еще возникает и неопределенность, которая связана с иррациональностью поведения человека в определенных ситуациях. С другой стороны, наличие человеческого фактора создает предпосылки для самоорганизации систем и может определять существование памяти о ее предыдущих состояниях. Всё это приводит к эмерджентности, появление которой нужно рассматривать не как итог простого суммирования характеристик элементов, а как результат возникновения системных связей и адаптивного перераспределения функций между элементами.

Стоит принять во внимание, что большинство процессов, наблюдаемых в сложных социальных и экономических системах, может быть описано только нестационарными временными рядами, из-за нелинейности и изменчивости характеристик которых традиционные методы анализа и моделирования, например, такие как интегрированная модель авторегрессии - скользящего среднего (ARIMA, модель Бокса-Дженкинса) и многие другие, часто приводят к

Статья получена 3 марта 2023. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант № 22-21-00109 «Разработка моделей прогнозирования динамики социальных настроений на основе анализа временных рядов текстового контента социальных сетей с использованием уравнений Фоккера-Планка и нелинейной диффузии».

К. К. Отрадных, Институт кибербезопасности цифровых технологий, РТУ МИРЭА, Москва, Россия (e-mail: const.otradnov@yandex.ru).

Д. И. Сабирова, Институт кибербезопасности цифровых технологий, РТУ МИРЭА, Москва, Россия (e-mail: diinartrochka@gmail.com).

Д. О. Жуков Институт кибербезопасности цифровых технологий, РТУ МИРЭА, Москва, Россия (e-mail: zhukovdm@yandex.ru).

неточным или ошибочным результатам.

Исследования временных рядов социодинамических процессов с помощью R/S анализа показывают, что во многих случаях они имеют фрактальный характер. Если исследовать зависимости амплитуд отклонений уровней временных рядов от интервала времени их расчета, то наблюдается нестационарность и так называемый «тяжёлый хвост», который показывает, что графики плотности распределений лежат выше графика нормального распределения.

Фрактальность временных рядов связана с тем, что описывающие их переменные характеризуются дробными переменными измерения, это значит, что при выводе аппроксимирующих функций плотности вероятности распределения их параметров целесообразно использовать дробно-дифференциальные уравнения, например, диффузионного типа.

В представленной работе мы хотим дать описание построения одной из таких моделей, её анализ и сравнение результатов моделирования с наблюдаемыми данными.

II. ОБЗОР ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

В большинстве практических задач если процесс не является стационарным, то число ошибок в принятии той или иной статистической гипотезы оказывается в разы больше, чем уровень значимости, на котором принимается решение по заданному критерию.

В случае нестационарных временных рядов все асимптотические критерии, гарантирующие увеличение точности аппроксимации с увеличением объема выборки, оказываются не подходящими. Схожие трудности появляются при использовании сглаженного скользящего усреднения. Если ряд нестационарный, то средние не являются состоятельными оценками моментов распределения, так как сходимости по вероятности в общем случае нет.

При исследовании стационарных случайных процессов, согласно теореме Гливенко, чем больше будет учтено наблюдаемых значений, тем точнее будут полученные теоретические характеристики распределения случайной величины из определенного промежутка. Для нестационарных случайных процессов данное условие не может быть выполнено, из-за чего возможность применения результатов их анализа для последующего прогнозирования отпадает. При анализе стационарного процесса полученные значения математического ожидания и дисперсии случайной величины могут быть использованы для построения прогноза на любых интервалах времени наблюдения, в случае нестационарных временных рядов возникает момент разладки, после которого полученные прежде характеристики распределения не могут показывать точный прогноз дальнейшего поведения временного ряда.

Описанные выше ограничения существующих моделей анализа и описания нестационарных временных рядов привели к поиску новых путей их

изучения.

В этой связи можно упомянуть такие направления исследований, как использование нейронных сетей [1 – 4], использование методов нечёткой логики [5], непараметрические модели на основе применения теории хаоса и метода опорных векторов регрессии [6], использование наборов правил на основе генетических алгоритмов [7, 8], самоорганизующихся адаптивных моделей [9] и многие другие.

Можно рассмотреть отдельные из работ, близких к тематике наших исследований.

Авторы статьи [10] досконально изучают две концепции временного анализа настроений и причинно-следственной связи настроений. Анализ временных настроений полезен для обобщения событий на основе настроений и времени. Причинно-следственная связь полезна для нахождения причинно-следственных связей событий, а также полезна для прогнозирования событий. Эти две концепции в сочетании приводят к модели прогнозирования событий, которая может прогнозировать период времени между событиями и настроение предстоящих событий. Эта работа вводит обобщенную модель прогнозирования, основанную на анализе временных настроений, чтобы определить причинно-следственную связь между событиями, которая может быть использована для прогнозирования настроения события и продолжительности между событиями. Предлагаемый метод оценивается с применением показателей производительности, точности и отзыва.

Авторы статьи [11] рассматривают всевозможные проблемы прогнозирования, связанные с сетью, обобщают и классифицируют соответствующие методы прогнозирования, анализируют их преимущества и недостатки и указывают на передовые, а также критические проблемы в этой области.

В статье [12] представлена модель прогнозирования новостных событий в новостных лентах, разработанная на основе стохастической динамики изменений структуры новостных кластеров с памятью предшествующих состояний и самоорганизацией их структуры. Прогнозирование событий выполняется на основе их текстового описания, векторизации текста и вычисления косинусов углов между вектором данного текста и центроидами всевозможных семантических кластеров в информационной системе. При создании модели строятся вероятностные схемы переходов из состояния в состояние на ИС, учитывающие набор предыдущих шагов. На основе предложенного подхода получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, сформулирована и решена краевая задача прогнозирования новостных событий. Это позволяет получить теоретическую зависимость от времени функции распределения плотности вероятности параметров нестационарного временного ряда, описывающих эволюцию информационной безопасности. Экспериментальная проверка разработанной модели показала ее надежность и адекватность.

В статье [13] описана модель прогнозирования

событий в новостных лентах, которая основана на использовании стохастической динамики изменений структуры нестационарных временных рядов в новостных кластерах на основе применения диффузионной аппроксимации. Прогнозирование событий в ленте новостей базируется на их текстовом описании, векторизации и нахождении значения косинуса угла между заданным вектором и центроидами различных семантических кластеров информационного пространства.

Изменения со временем значения косинуса таких углов между вектором и центроидами можно изобразить в виде точки, блуждающей по отрезку $[0, 1]$. Этот сегмент включает ловушку в пороговой точке возникновения события, в которую в конечном итоге может попасть блуждающая точка. При создании модели авторы учитывали вероятностные закономерности переходов между состояниями в информационном пространстве.

На основе данного подхода было выведено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, сформулирована и решена задача прогнозирования новостных событий, что позволило получить теоретическую временную зависимость функции плотности вероятности распределения параметров нестационарных временных рядов, описывающих эволюцию информационного пространства. Итоги исследования, которые были представлены в статье, позволили сделать ряд очень важных выводов. Разработанная модель прогнозирования событий в ленте новостей является адекватной и последовательной (все новостные события, использованные для испытания модели, произошли с высокой вероятностью (около 80%) или, если они являются вымышленными новостями, они могут произойти только через неприемлемо долгое время). Анализ модели прогнозирования событий в ленте новостей на основе простой диффузионной модели подтверждает возможность прогнозирования событий ленты новостей на основе их текстового описания, векторизации и нахождения значения косинуса угла между этим вектором и центроидами всевозможных информационных кластеров. Изменение этого косинуса с течением времени можно рассматривать как блуждание точки на отрезке $[0, 1]$, который включает в себя ловушку, в которую блуждающая точка может в конечном итоге попасть. Результат моделирования временной зависимости вероятности наступления события с экспериментально определенными наборами значений параметров разработанной модели не является противоречивым с точки зрения вероятностного поведения. Оценки точности и надежности прогнозирования новостей разрешают предположить, что разработанная модель может быть использована для прогнозирования, а относительная точность прогнозирования может быть выше 70 %.

В работе [14] авторы показали на примере финансового временного ряда вероятность получения важных повсеместных физических характеристик при

учете агрегации многих систем. Рассмотрели возможность получения не только аномального процесса диффузии, но и нелинейного уравнения диффузии, которое приводит к распределению вероятности при использовании набора немарковских процессов. Это распределение вероятности показывает поведение по закону мощности в структуре своих хвостов. Оно также отображает аномальные транспортные характеристики ансамбля частиц. Это повсеместное поведение, с законом мощности в диффузионном переносе и структуре распределения вероятности, связано с быстрым флуктуационным явлением, представленным в параметре шума.

III. ВЫБОР ИСТОЧНИКОВ ДАННЫХ, И СБОР СТАТИСТИКИ АКТИВНОСТИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ НОВОСТНЫХ РЕСУРСОВ

Для сбора данных и исследований были выбраны портал российской радиостанции «Эхо Москвы» и информационный ресурс «РИА Новости», а также сетевое сообщество социальной сети «ВКонтакте» посвященное обсуждению новостей (<https://vk.com/ria>).

Оба новостных портала были выбраны по причине узнаваемости и популярности.

С помощью специально разработанных программных приложений, так называемых парсеров, используя API сети, была скачана вся нужная для исследования информация. У каждого поста есть свой уникальный адрес. Кроме того, у каждой новости присутствует ряд таких параметров: текст поста, дата и время публикации, количество просмотров и комментариев. Комментарии, в свою очередь, имеют уникальный идентификатор в сообществе, дату и время появления, а также связь по уровню комментирования с родительским комментарием.

В среднем количество новостей колебалось от 160 до 190 в день. В процессе сбора данных также были загружены сведения о том, кто из пользователей комментировал кого из других пользователей при обсуждении новости.

Из-за того что комментарии могли оставлять чат-боты, спамеры и пользователи, которые пишут комментарии на профессиональной основе, необходимо было ввести правила очистки данных. К недобросовестным были отнесены те, кто написали в среднем более 20 комментариев за сутки или писали их с частотой более 1-го комментария в 5 минут.

На основе полученных данных была создана база данных архива новостей, которую мы использовали для анализа и разработки моделей.

На рисунке 1 в качестве примера представлен временной ряд суточной активности пользователей портала «РИА Новости» по комментированию новостей с января 2013 по декабрь 2020 года. Активность определялась как отношение общего числа комментариев, оставленных пользователями, ко всем новостям в течение суток к общему количеству просмотров пользователями в течение суток.

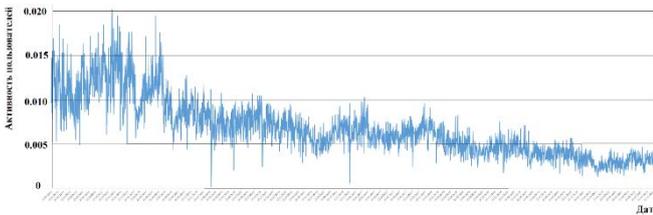


Рисунок 1 – Временной ряд активности пользователей портала «РИА Новости» по комментированию новостей с января 2013 по декабрь 2020 года.

IV. ОБРАБОТКА ДАННЫХ И АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Для предварительного исследования и анализа динамики временных рядов и определения их характеристик можно использовать метод нормированного размаха Хёрста [15], позволяющий установить их фрактальную размерность и классифицировать их тип поведения. Пронормировать размах величин уровней ряда R стандартным отклонением значений величин уровней ряда S и изобразить их отношение в виде уравнения: $R/S=C\tau^H$, где C – некоторая константа, τ – число наблюдений, составляющих рассматриваемый временной ряд, а показатель степени H – это так называемый коэффициент или показатель Хёрста. Наличие изломов в зависимости R/S (τ) свидетельствует о наличии характерных временных масштабов и/или периодичностей. Величина H позволяет дать классификацию временных рядов по характеру их поведения.

Используя стандартный алгоритм метода Хёрста [15] для зависимости величины логарифма R/S от логарифма величины выборки уровней временного ряда активности пользователей портала «РИА Новости» по комментированию новостей (см. рисунок 2, прямая 1) может быть получено следующее линейное уравнение: $y=0,25x-1,12$ со значением коэффициента корреляции $R^2=0,99$.

В данном случае $H=0,25$, и это значит, что наблюдаемый временной ряд является антиперсистентным (эргодическим). Так как величина коэффициента Хёрста меньше 0,5, то структура данного ряда обладает фрактальностью, а описываемые им процессы могут иметь краткосрочную память.

Для портала «Эхо Москвы» по комментированию новостей (см. рисунок 2, прямая 2) получено следующее линейное уравнение: $y=0,18x+0,27$ со значением коэффициента корреляции $R^2=0,89$. В данном случае $H=0,18$ так же является меньше 0,5, что делает наблюдаемый временной ряд антиперсистентным (эргодическим).

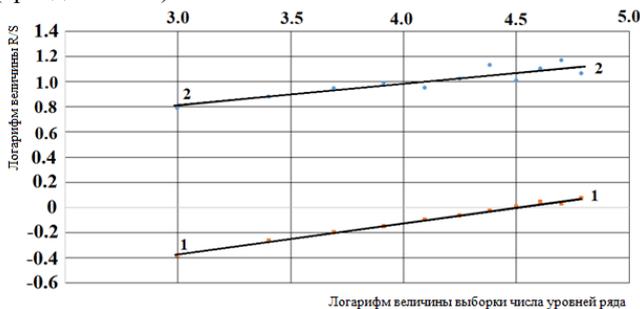


Рисунок 2 – Определение показателя Хёрста ненормированных временных рядов активности пользователей портала «РИА Новости» – прямая 1 и «Эхо Москвы» – прямая 2 по комментированию новостей за наблюдаемые периоды времени.

То, что показатель Херста отличается от величины равной 0,5, говорит о том, что наблюдаемый временной ряд отличается от нормального закона распределения. Но чтобы уверенно говорить об этом, стоит провести дополнительную проверку.

Для дальнейшей обработки данных используется амплитудный алгоритм:

1) для начала стоит задать размер "скользящего окна", так называемый интервал времени между наблюдаемыми значениями, например сутки, двое суток, десять дней и т.д. После чего выбрать из временного ряда данные по активности для заданного временного диапазона;

2) далее по выбранным данным нужно рассчитать амплитуды изменения величины активности пользователей для выбранных временных интервалов, эти данные показаны на рисунке 3;

3) в конце полученные для каждого из измеряемых интервалов наборы значений необходимо отсортировать по возрастанию и для каждого построить гистограммы плотности распределения амплитуд отклонений величины активности пользователей;

4) по полученным гистограммам можно будет рассчитать моменты распределения (математическое ожидание, дисперсию, асимметрию, эксцесс). Математическое ожидание, дисперсию, асимметрию и эксцесс можно вычислить по следующим формулам:

$$\mu(t) = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{\sum_{l=1}^M n_l} \quad \sigma(t) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N \{x_j - \mu(t)\}^2}{\sum_{l=1}^M n_l}}$$

$$As(t) = \frac{\sum_{j=1}^N \{x_j - \mu(t)\}^3}{\sigma^3 \sum_{l=1}^M n_l} \quad Ex(t) = \frac{\sum_{j=1}^N \{x_j - \mu(t)\}^4}{\sigma^4 \sum_{l=1}^M n_l}$$

а $\sum_{l=1}^M n_l$ – вычисляется по числу значений амплитуд n_l ;

5) построить зависимости для математического ожидания (см. рисунок 4), дисперсии (см. рисунок 5) амплитуд отклонений активности пользователей сетевых ресурсов от интервалов времени расчета (размеров «скользящего окна»).

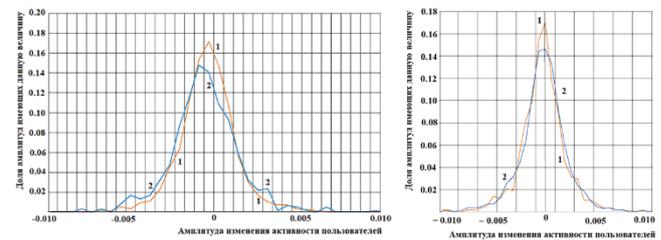


Рисунок 3 – Гистограммы распределений амплитуд изменения активности пользователей портала «РИА Новости» – линия 1 и «Эхо Москвы» – линия 2 при комментировании новостей по своим величинам для «скользящего окна» равного одному дню – левый рисунок и 20 – правый.

Исследование полученных гистограмм позволяет определить, являются ли временные ряды нестационарными.

На рисунке 3 представлены гистограммы распределения величин амплитуд изменения активности

пользователей для скользящего окна, равного одному дню, на рисунке слева и 20 дней справа. Распределения амплитуд имеют острые пики, высота которых не зависит от интервала времени расчета. Даже при увеличении интервала времени вид гистограммы хоть и увеличивается по ширине, но их высота и положение относительно нуля остается практически постоянным, что было бы обычным, если эти распределения являлись стационарными. Но в таком случае математическое ожидание должно равняться нулю или быть постоянным.

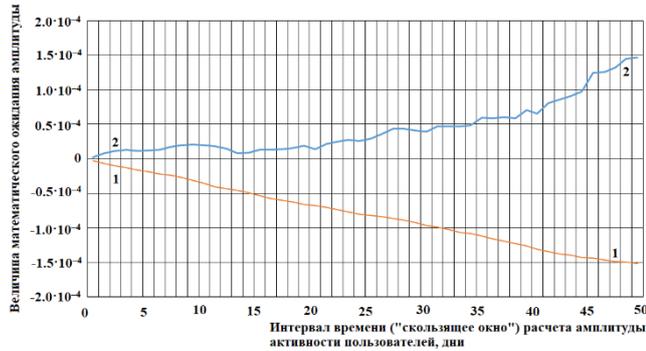


Рисунок 4 – Зависимость величины математического ожидания амплитуд изменения активности пользователей портала «РИА Новости» – линия 1 и «Эхо Москвы» – линия 2 при комментировании новостей от интервала времени расчета этих амплитуд («скользящего окна»).

Однако, данные показывают, что величины математического ожидания амплитуд зависят от интервала времени расчета этих амплитуд, что говорит о том, что исследуемые временные ряды являются нестационарными, а их параметры не могут быть определены нормальным законом распределения (см. рисунок 4)

Например, если обозначить величину амплитуды как x , а интервал времени её расчета, как t (величина «скользящего окна»), то при выполнении нормального закона распределения $\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4at}}$, величина математического ожидания $\mu(t)$ будет равна нулю:

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \rho(x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{4at}} dx = 0$$

Чтобы подтвердить полученную версию, стоит отметить, что дисперсия амплитуд имеет сложный нелинейный характер (см. рисунок 5). При выполнении нормального закона для дисперсии амплитуд должна была наблюдаться линейная зависимость от величины скользящего окна. Поэтому отклонение от линейного закона в данном случае подтверждает наши выводы о том, что рассматриваемый временной ряд является нестационарным.

При выполнении нормального закона для дисперсии амплитуд должна была бы наблюдаться линейная зависимость от величины «скользящего окна»:

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho(x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4at}} dx = 2at = at$$

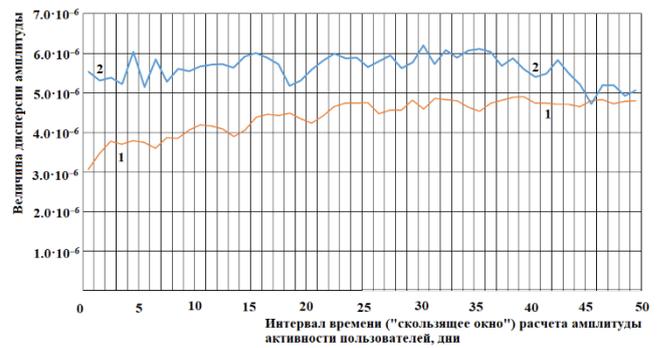


Рисунок 5 – Зависимость величины дисперсии амплитуд изменения активности пользователей портала «РИА Новости» – линия 1 и «Эхо Москвы» – линия 2 при комментировании новостей от интервала времени расчета этих амплитуд («скользящего окна»).

Асимметрия характеризует «скошенность» функции распределения и для симметричных функций должна равняться нулю. В нашем случае наблюдается небольшая величина асимметрии, что говорит о том, что распределение амплитуд является почти симметричным.

Экссесс характеризует «хвост» распределения. Если величина больше 3, то для функции распределения характерно медленное убывание при удалении от среднего значения. Такой график лежит выше графика нормального распределения, будет наблюдаться так называемый «тяжелый хвост». При значении меньше трех график будет находиться ниже графика нормального распределения.

Проанализировав все полученные данные, можно сделать ряд выводов:

1) временные ряды, используемые в этом исследовании, являются нестационарными. Об этом говорят: математическое ожидание и дисперсия амплитуд изменения активности пользователей при комментировании новостей (т.к. данные величины зависят от интервала времени).

2) с помощью метода Хёрста было определено, что данные временные ряды обладают краткосрочной памятью, т.к. показатель Хёрста меньше 0.5.

3) отмечается «тяжелый хвост» - графики плотности распределения лежат выше графика нормального распределения, об этом сообщает величина эксцесса, превышающая значение 3. Из чего следует, что данные процессы не могут быть описаны законом нормального распределения.

4) в распределении амплитуд замечается небольшая величина асимметрии, и распределение является почти симметричным.

Таким образом, модель аппроксимирующих функций плотности распределения параметров нестационарных временных рядов обязана учитывать всё вышеизложенное.

Нормальный закон распределения $\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4at}}$ может быть получен из рассмотрения изменения состояния x некоторой системы, при котором эти состояния могут случайным образом изменяться с течением времени на бесконечном множестве. Такие процессы подобает относить к процессам обычного диффузионного типа, и они описываются дифференциальным уравнением типа: $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$.

В этом случае для дисперсии $\sigma^2(t)$ будет наблюдаться линейный закон её зависимости от времени ($\sigma^2(t) \sim t$). Однако в ряде случаев [17–21] наблюдается существенное отклонение от линейного закона. При этом может происходить как более “медленный” рост $\sigma^2(t)$ от t ($\sigma^2(t) \sim \sqrt[t]{t}$, где $0 < \beta < 1$) и такой процесс квалифицируется как субдиффузия [17, 18], так и более “быстрый” рост $\sigma^2(t)$ от t ($\sigma^2(t) \sim t^\beta$, где $1 < \beta < 2$), и такой процесс квалифицируется как супердиффузия [19]. Функция распределения, описывающая процессы субдиффузионного типа, получается из решения дробно–дифференциального уравнения вида: $\frac{\partial^\beta \rho(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}$, а супердиффузионного из уравнения: $\frac{\partial^\beta \rho(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha \rho(x,t)}{\partial x^\alpha}$, где α и β показатели степеней дробных производных, а D – некоторый коэффициент (коэффициент диффузии). Также могут наблюдаться и процессы аномальной диффузии [20], описываемые дробно–дифференциальным уравнением общего вида: $\frac{\partial^\beta \rho(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha \rho(x,t)}{\partial x^\alpha}$. Следует также отметить, что в данных случаях можно рассматривать фрактальность как по переменной t (время), так и по переменной x , которая в диффузионных процессах рассматривается как пространственная координата, однако в общем случае переменную x можно рассматривать как некий параметр, описывающий состояние процесса или системы.

Дробный характер производных операторов по времени t и переменной состояния x позволяет охарактеризовать нелокальные процессы, в которых переход в данное состояние системы x зависит не только от локальных характеристик процесса или поведения системы в окрестности рассматриваемой точки x , но и от принимаемых ею значений x на всём исследуемом интервале значений, т.е. зависит глобально от распределения по всем состояниям x и от предыстории процесса. Уравнения дробного порядка как по времени, так и по координате могут быть использованы для учёта эффектов памяти. Влияния нелокальности по времени t и нелокальности по состоянию x на плотность вероятности обнаружения системы или процесса в состоянии x качественно отличаются. Нелокальность по времени воздействует на плотность вероятности в начальное время, а нелокальность по x влияет на асимптотическое поведение плотность вероятности при больших временах [17 - 21].

V. МОДЕЛЬ СОЦИОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

A. Вывод основного уравнения модели

Для построения модели обозначим плотность вероятности этого распределения, как $\rho(x,0)$ (начальное условие: $\rho(x, t)|_{t=0} = \rho(x, 0)$).

В качестве исходного уравнения будем использовать дифференциальное диффузионное уравнение с дробными производными:

$$\frac{\partial^\beta \rho(x,t)}{\partial t^\beta} = D \cdot \frac{\partial^\alpha \rho(x,t)}{\partial x^\alpha} \tag{1}$$

где α и β – показатели дробной производной ($0 < \beta < 1$ и $1 < \alpha < 2$) функции $\rho(x,t)$ плотности вероятности амплитуд изменения активности пользователей от времени t (интервал времени расчета амплитуд) и состоянию x (величина отклонения), D – некий постоянный коэффициент.

Рисунок 3 показывает, что амплитуды изменения активности пользователей масс–медиа ресурсов имеют небольшие величины и очень быстро спадают при удалении от 0. Поэтому, не нарушая общности при решении уравнения (1), можно для плотности вероятности использовать следующие граничные условия:

$$\rho(x, t)|_{x \rightarrow -\infty} = \rho(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

Сделаем по t преобразование Лапласа уравнения (1) [21, 22]:

$$s^\beta \overline{G(x, s)} - \frac{\rho(x, 0)}{s^{1-\beta}} = D \frac{d^\alpha \overline{G(x, s)}}{dx^\alpha} \tag{2}$$

Сделаем по x преобразование Фурье уравнения (2). Заметим, что:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^\alpha \overline{G(x, s)}}{dx^\alpha} \cdot e^{-ixk} dx = (-ik)^\alpha \cdot \overline{G(k, s)}$$

$$\rho(\overline{k, 0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, 0) \cdot e^{-ixk} dx$$

$$\overline{G(k, s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G(x, s)} \cdot e^{-ixk} dx$$

Подставив полученные Фурье образы в уравнение (2) получим:

$$s^\beta \cdot \overline{G(k, s)} - \frac{\rho(\overline{k, 0})}{s^{1-\beta}} = (-ik)^\alpha D \overline{G(k, s)}$$

Далее можно записать:

$$\overline{G(k, s)} = \frac{\rho(\overline{k, 0})}{s^{1-\beta} \cdot \{s^\beta - (-ik)^\alpha D\}} = \frac{\rho(\overline{k, 0})}{s \cdot \left\{1 - \frac{(-ik)^\alpha D}{s^\beta}\right\}}$$

Обозначим $z = \frac{(-ik)^\alpha D}{s^\beta}$ и проведем биномиальное разложение:

$$\frac{1}{1 - \frac{(-ik)^\alpha D}{s^\beta}} = \frac{1}{1 - z}$$

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-ik)^\alpha D}{s^\beta} \right\}^q$$

$$\overline{G(k, s)} = \frac{\rho(\overline{k, 0})}{s \cdot \left\{1 - \frac{(-ik)^\alpha D}{s^\beta}\right\}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\{(-ik)^\alpha D\}^q}{s^{\beta q + 1}} \rho(\overline{k, 0})$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа и перейдем от изображения s к оригиналу t :

$$\begin{aligned} \overline{G(k, t)} &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\{(-ik)^\alpha \cdot D \cdot t^{\beta q}\}}{\Gamma(\beta q + 1)} \rho(\overline{k, 0}) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (-ik)^{\alpha q} \rho(\overline{k, 0}) \frac{D^q \cdot t^{\beta q}}{\Gamma(\beta q + 1)} \end{aligned}$$

Сделаем обратное преобразование Фурье. Заметим, что преобразование Фурье для дробной производной $\rho(x,0)$ имеет вид:

$$\frac{d^{\alpha q}\{\rho(k,0)\}}{dx^{\alpha q}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{\alpha q}\{\rho(x,0)\}}{dx^{\alpha q}} \cdot e^{-ixk} dx = (-ik)^{\alpha q} \cdot \rho(k,0)$$

Тогда, используя Фурье образ дробной производной для плотности вероятности можно получить:

$$\rho(x,t) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{D^q \cdot t^{\beta q}}{\Gamma(\beta q + 1)} \cdot \frac{d^{\alpha q}\{\rho(x,0)\}}{dx^{\alpha q}} \quad (3)$$

В. Анализ модели и сравнение с наблюдаемыми данными

Проведем анализ уравнения (3). Сомножитель $\frac{D^q \cdot t^{\beta q}}{\Gamma(\beta q + 1)}$ определяет поведение функции плотности вероятности распределения с изменением интервала времени t расчета амплитуд изменения активности пользователей (распределение увеличивается по ширине, что наблюдается на практике), а сомножитель $\frac{d^{\alpha q}\{\rho(x,0)\}}{dx^{\alpha q}}$ – дробную производную порядка αq , по величине амплитуды x для начального распределения, и от времени t не зависит.

В общем случае дробная производная порядка ν для функции $\psi(x)$ определяется следующим образом [21, 22]:

$$\frac{d^{\nu}\psi(x)}{dx^{\nu}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \cdot \int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{\{x-\xi\}^{\nu+1}}, & \nu < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{\{x-\xi\}^{\nu}}, & 0 \leq \nu < 1 \\ \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{\{x-\xi\}^{\nu-1}}, & 1 \leq \nu < 2 \\ \frac{1}{\Gamma(3-\nu)} \cdot \frac{d^3}{dx^3} \int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{\{x-\xi\}^{\nu-2}}, & 2 \leq \nu < 3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Или:

$$\frac{d^{\nu}\psi(x)}{dx^{\nu}} = \frac{1}{\Gamma(1-[v])} \cdot \frac{d^{(\max\{v\})}}{dx^{(\max\{v\})}} \int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{\{x-\xi\}^{[v]}}$$

где $[v]$ – дробная часть показателя степени ν , а $\max\{v\}$ – округление дробного показателя ν до ближайшего наибольшего целого значения.

В данном случае мы будем рассматривать определение дробных производных по Капуто. Оно отличается от определения Римана-Лиувилля тем, что функция первоначально подвергается дифференцированию с целым порядком n , превышающим нецелый порядок после округления до целого ($\max\{v\}$), а далее результат интегрируется с порядком $1-[v]$.

Для анализа модели и сопоставления с наблюдаемыми данными нужно определить вид функции плотности вероятности при $t=0$ $\rho(x,0)$. Естественным образом можно предположить, что при $t=0$ никакие значения величины амплитуд, кроме нулевых, не могут наблюдаться. Можно принять, что $\rho(x,0)$ является δ – функцией. Изменение активности не

может быть меньше чем на один комментарий. Следовательно, запишем: $\rho(x,0) = \delta(x + \varepsilon)$, где ε – минимально возможный квант изменения состояния x .

Воспользовавшись определением производной дробного порядка [21, 22] для нашей модели можно получить:

$$\frac{d^{\alpha q}\{\delta(x + \varepsilon)\}}{dx^{\alpha q}} = \frac{-[v(\alpha q)] \cdot (-[v(\alpha q)] - 1) \cdot (-[v(\alpha q)] - 2) \dots (-[v(\alpha q)] - \max\{v(\alpha q)\} + 1}{\{x + \varepsilon\}^{[v(\alpha q)] + \max\{v(\alpha q)\}} \cdot \Gamma(1 - [v(\alpha q)])} = \frac{(-1)^{\max\{v(\alpha q)\}} \{v(\alpha q)\}! \cdot (1 + [v(\alpha q)])! \cdot (2 + [v(\alpha q)])! \dots (\max\{v(\alpha q)\} + [v(\alpha q)] - 1)!}{\{x + \varepsilon\}^{[v(\alpha q)] + \max\{v(\alpha q)\}} \cdot \Gamma(1 - [v(\alpha q)])} = \frac{(-1)^{\max\{v(\alpha q)\}} \prod_{n=0}^{\max\{v(\alpha q)\}-1} \{n + [v(\alpha q)]\}}{\{x + \varepsilon\}^{[v(\alpha q)] + \max\{v(\alpha q)\}} \cdot \Gamma(1 - [v(\alpha q)])}$$

где $[v(\alpha q)]$ – дробная часть показателя степени αq , а $\max\{v(\alpha q)\}$ – округление дробного показателя αq до ближайшего наибольшего целого значения.

Подставив полученный результат в уравнение (3), находим для плотности вероятности:

$$\rho(x,t) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{D^q \cdot t^{\beta q}}{\Gamma(\beta q + 1)} \cdot \frac{(-1)^{\max\{v(\alpha q)\}} \cdot \prod_{n=0}^{\max\{v(\alpha q)\}-1} \{n + [v(\alpha q)]\}}{\{x + \varepsilon\}^{[v(\alpha q)] + \max\{v(\alpha q)\}} \cdot \Gamma(1 - [v(\alpha q)])} \quad (4)$$

На рисунке 6 представлены результаты моделирования плотности вероятности $\rho(x,t)$ от величины наблюдаемой амплитуды отклонения x (на основе уравнения (4)) при значениях дробных производных $\alpha=1,12$; $\beta=0,82$; величине коэффициентов $D=0,00005$ и $\varepsilon=0,025$. Кривые 1 приведены для условного времени 75 единиц, кривые 2 – для 40 и кривые 3 – 10 условных единиц. Как на качественную характеристику можно обратить внимание на то, что при увеличении условного времени (размера “скользящего окна”) высота распределений и их ширина увеличиваются, это качественно сходится с экспериментально наблюдаемыми данными для реальных временных рядов, изображенных на рис. 3. Происходит незначительное увеличение высоты и ширины наблюдаемых распределений при переходе от размера “скользящего окна” один день к двадцати, при более значительном увеличении “скользящего окна” этот эффект становится более заметным.

Графический вид изображенных на рисунке 3 экспериментально наблюдаемых распределений одновременно весьма похож и на результаты теоретического расчета, приведенные на рисунке 6, и на графическое представление экспоненциального закона распределения: $\rho(x,0) \sim e^{-\sigma|x|}$.

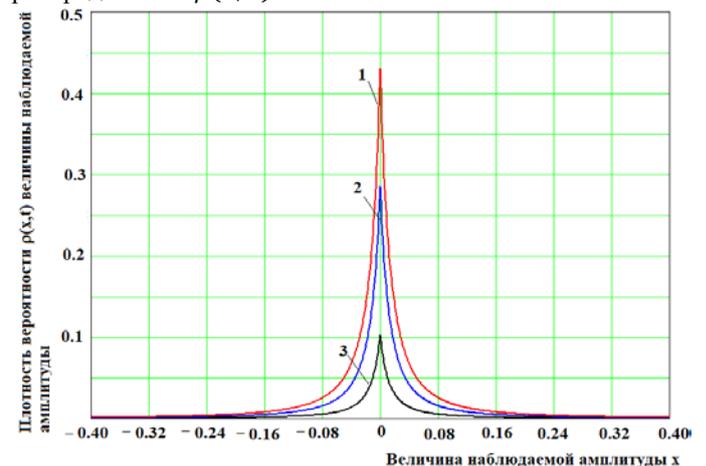


Рисунок 6 - Зависимость величины плотности вероятности $\rho(x,t)$ от величины наблюдаемой амплитуды отклонения x для моделируемого примера.

На рисунке 7 приведена линеаризация гистограмм (см. рис. 3) распределения амплитуд изменения активности пользователей портала «РИА Новости» и «Эхо Москвы» в координатах: $\ln(\rho(x,0)) - x$. Как можно заметить из полученных результатов, в данном случае наблюдаются достаточно хорошие линейные зависимости ($\ln\{\rho(x,0)\} = -const - \sigma|x|$).

Аппроксимация начального распределения в виде $\rho(x,0) = \rho(x,0) \sim e^{-\sigma|x|}$ является вполне оправданной.

Следует обратить внимание на то, что при использовании экспоненциальной аппроксимации, коэффициенты (σ) при переменной x в линейных уравнениях уменьшаются при увеличении интервала времени, что говорит об их зависимости от интервала времени расчета величины амплитуды x , что также не характерно для стационарных временных рядов.

На рисунке 8 изображены результаты моделирования зависимостей величины математического ожидания ($\mu(t)$) амплитуд изменения активности пользователей от интервала времени расчета этих амплитуд, полученных на основе уравнения (4) для $\rho(x,t)$: $\mu(t) = \int_0^\infty x \cdot \rho(x,t) dx$. На левой стороне рисунка 8 показаны результаты моделирования при значениях дробных производных $\alpha=0,92$; $\beta=0,82$; величине коэффициентов $D=0,00005$ и $\varepsilon=0,025$. В данном случае $\alpha > \beta$ и обе дробные производные меньше 1.

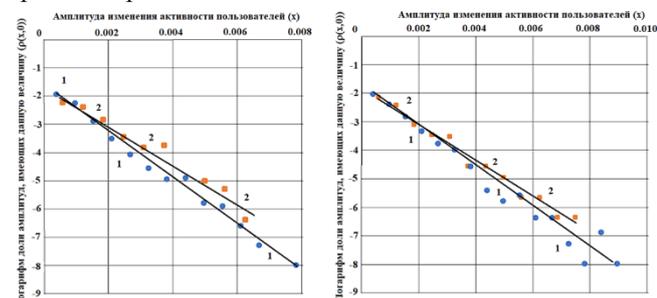


Рисунок 7 – Линеаризация распределений амплитуд изменения активности пользователей портала «РИА Новости» – линия 1 и «Эхо Москвы» – линия 2 при комментировании новостей по своим величинам для «скользящего окна» равного одному дню – левый рисунок и 20 – правый.

Как видно из представленных на рисунке 8 данных, полученный результат качественно и количественно схож с наблюдаемыми данными, показанными на рисунке 4 (линия 1).

На правой стороне рисунка 8 показаны результаты моделирования при значениях дробных производных $\alpha=1,10$; $\beta=1,27$; величине коэффициентов $D=0,000002$ и $\varepsilon=0,025$. Можно заметить, в данном случае наблюдается хорошее качественное и количественное совпадение с наблюдаемыми данными, показанными на рисунке 4 (линия 2). В данном случае $\alpha < \beta$ и обе дробные производные больше 1.

Выбор значений дробных производных представляется довольно неоднозначным. Если обе дробные производные меньше 1, то зависимость математического ожидания амплитуд изменения уровней ряда от интервала времени их расчета находится в отрицательной области значений и имеет

линейный характер. Если обе дробные производные больше 1, то в положительной. Кроме того, чем больше будет величина α по сравнению с β , тем больше будет математическое ожидание амплитуд изменения уровней ряда от интервала времени их расчета иметь параболический вид.

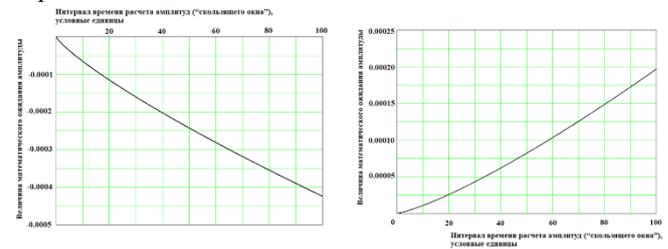


Рисунок 8 – Зависимость теоретического значения величины математического ожидания амплитуд изменения активности пользователей при комментировании новостей от интервала времени расчета этих амплитуд («скользящего окна») при разных значениях дробных производных α и β .

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе была изучена активность пользователей по комментированию новостей в сетевых масс-медиа. На основе собранных данных были построены временные ряды активности пользователей, и с помощью метода нормированного размаха Хёрста проведено исследование их динамики и определение таких их характеристик, как фрактальная размерность и тип поведения.

Исследования показали, что наблюдаемые временные ряды имеют антиперсистентность (эргодичность), кроме того, структуры данных временных рядов обладают фрактальностью, а описываемые им процессы могут иметь краткосрочную память, об этом говорит показатель Хёрста, имеющий значение меньше 0,5.

Статистическая обработка наблюдаемых данных позволила установить наблюдаемые функции распределения амплитуд отклонений активностей пользователей при разных интервалах времени расчёта этих амплитуд, а также зависимости математического ожидания, дисперсии, эксцесса и асимметрии от интервала времени расчета этих амплитуд.

Обработка полученных данных показывает, что величины математического ожидания и дисперсия амплитуд изменения активности пользователей по комментированию новостей зависят от интервала времени расчета этих амплитуд («скользящего окна»), а также имеют сложный нелинейный характер, что указывает на то, что исследуемые временные ряды являются нестационарными, а их параметры не могут быть описаны нормальным законом распределения.

Для исследованных временных рядов асимметрия является небольшой, вид функций распределения амплитуд отклонений уровней ряда является почти симметричным.

В рассмотренных случаях отмечается так называемый «тяжелый хвост» – графики плотности распределений лежат выше графика нормального распределения. Об этом сообщает величина эксцесса, которая превышает нормальное распределение со значением 3. При величине меньше трех – ниже. Для исследуемых

временных рядов в распределении амплитуд отклонений их уровней наблюдаются положительные величины эксцесса, а значит функция распределения медленнее убывает при удалении от среднего значения.

Для создания модели, которая в полной мере будет учитывать обнаруженные характеристики наблюдаемых временных рядов, необходимо рассматривать их свойства фрактальности.

Фрактальность может быть связана с тем, что наблюдаемые процессы характеризуются дробными переменными измерения. Следовательно, можно предположить, что это должно быть учтено при выводе аппроксимирующих функций плотности распределения их параметров, например, с помощью уравнения аномальной диффузии: $\frac{\partial^\beta \rho(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha \rho(x,t)}{\partial x^\alpha}$. где α и β показатели степеней дробных производных, а D – некоторый коэффициент диффузии.

Стоит также отметить, что в данных случаях можно рассматривать фрактальность как по переменной t , так и по переменной x , которая в диффузионных процессах рассматривается как пространственная координата, однако, в общем случае, переменную x можно рассматривать как некий параметр, описывающий состояние процесса или системы.

В представленной работе была исследована возможность создания модели описания социодинамических процессов на основе применения дифференциального диффузионного уравнения с дробными производными.

Анализ модели, и сравнение полученных с её помощью теоретических результатов с наблюдаемыми данными показали, что данная модель довольно хорошо совпадает с ними и является адекватной.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант № 22-21-00109 «Разработка моделей прогнозирования динамики социальных настроений на основе анализа временных рядов текстового контента социальных сетей с использованием уравнений Фоккера-Планка и нелинейной диффузии».

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Khadjeh Nassirtoussi, A., Ying Wah, T., Ngo Chek Ling, D. A novel FOREX prediction methodology based on fundamental data. *African Journal of Business Management*, 2011, Vol. 5, pp. 8322 – 8330.
- [2] Anastasakis, L., Mort, N. Exchange rate forecasting using a combined parametric and nonparametric self – organising modelling approach. *Expert Systems with Applications*, 2009, Vol. 36, pp. 12001 – 12011.
- [3] Vanstone, B., Finnie, G. Enhancing stockmarket trading performance with ANNs. *Expert Systems with Applications*, 2010, Vol. 37, pp. 6602 – 6610.
- [4] Vanstone, B., Finnie, G. An empirical methodology for developing stockmarket trading systems using artificial neural networks. *Expert Systems with Applications*, 2009, Vol. 36, pp. 6668 – 6680.
- [5] Sermipinis, G., Laws, J., Karathanasopoulos, A., Dunis, C. L. Forecasting and trading the EUR/USD exchange rate with gene expression and psi sigma neural networks. *Expert Systems with Applications*, August 2012, Vol. 39, Issue 10, pp. 8865 – 8877.
- [6] Huang, S.-C., Chuang, P.-J., Wu, C.-F., Lai, H.-J. Chaos-based support vector regressions for exchange rate forecasting. *Expert Systems with Applications*, 2010, Vol.37, pp. 8590 – 8598.

- [7] Premanode, B., Toumazou, C. Improving prediction of exchange rates using differential EMD. *Expert Systems with Applications*, 2013, Vol. 40, pp. 377 – 384.
- [8] Mabu, S., Hirasawa, K., Obayashi, M., & Kuremoto, T. (2013). Enhanced decision making mechanism of rule-based genetic network programming for creating stock trading signals. *Expert Systems with Applications*, 40, 6311 – 6320.
- [9] Bahrepour, M., Akbarzadeh, T. M. –R., Yaghoobi, M., & Naghibi, S. M. –B. (2011). An adaptive ordered fuzzy time series with application to FOREX. *Expert Systems with Applications*, 38, 475–485.
- [10] P.G Preethi, V. Uma, Ajit Kumar Temporal Sentiment Analysis and Causal Rules Extraction from Tweets for Event Prediction *Procedia Computer Science Open Access Volume 48, Pages 84 – 89, 2015 International Conference on Computer, Communication and Convergence, ICCCC 2015 Bhubaneswar, OD 27 December 2014 28 December 2014, 117138 ISSN 18770509 DOI 10.1016/j.procs.2015.04.154*
- [11] Zhuo-Ming Ren, An Zeng, Yi-Cheng Zhang Structure-oriented prediction in complex networks *Open Access Volume 750, Pages 1 – 5, 13 August 2018 ISSN 03701573 DOI 10.1016/j.physrep.2018.05.002*
- [12] Zhukov D., Khvatova T., Aleshkin A., Schiavone F. Forecasting news events based on the model accounting for self-organisation and memory. *Proceeding of the 2021 IEEE Technology and Engineering Management Conference - Europe, TEMSCON-EUR 2021, Article number 94886342021*
- [13] Zhukov, D., Andrianova, E., Trifonova, O. Stochastic diffusion model for analysis of dynamics and forecasting events in news feeds. *Symmetry, Volume 13, Issue 2, February 2021, Article number 257, pp. 1-23.*
- [14] Fuentes, Miguel A. Non-Linear Diffusion and Power Law Properties of Heterogeneous Systems: Application to Financial Time Series *Entropy Open Access Volume 20, Issue 930 August 2018 № 649 ISSN 10994300 DOI 10.3390/e20090649*
- [15] H.E. Hurst. Long - term storage capacity of reservoirs. // *Transactions of American Society of Civil Engineers. — 1951. — T. 116. — C. 770.*
- [16] Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature.* W. H. Freeman, SunFrancisco, 1982.
- [17] Mainardi F. *Waves and Stability in Continuous Media.* Ed. by Rionero S., Ruggeri T. - Singapore: World Scientific, 1994.
- [18] Wyss W.J. The fractional diffusion equation. *J. Math. Phys.* 27, 2782 (1986); <https://doi.org/10.1063/1.527251Math>.
- [19] Schneider W.R., Wyss W.J. Fractional diffusion and wave equations *J. Math. Phys.* 30, 134 (1989); <https://doi.org/10.1063/1.528578Math>.
- [20] Ilic, M., Liu, F., Turner, I., Anh, V. Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation, I. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 8(3), 323–341 (2005)
- [21] Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus.* – New York: Academic Press, 1974.
- [22] Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* – New York: John Wiley & Sons. Inc., 1993.

Об авторах:

Отрадных Константин Константинович, старший преподаватель, институт кибербезопасности цифровых технологий, МИРЭА - Российский технологический университет

Сабирова Динара Илхомовна, лаборант, институт кибербезопасности цифровых технологий, МИРЭА - Российский технологический университет

Жуков Дмитрий Олегович, доктор технических наук, профессор, институт кибербезопасности цифровых технологий, МИРЭА - Российский технологический университет

Modeling of sociodynamic processes based on the use of a diffusion equation with fractional derivatives

K.K. Otradnov, D.I. Sabirova, D.O. Zhukov

Abstract: On the example of the activity of users of network mass media, the sociodynamics of processes in complex systems with the participation of the human factor was considered. The time series of the studied processes are fractal in nature and have anti-persistence (they have a short-term memory; the Hurst exponent is less than 0.5).

Statistical processing of the observed data showed that in the distribution of amplitudes of changes in user activity, an insignificant amount of asymmetry is noticed, the distribution of amplitudes is practically symmetrical; a “heavy tail” is also noted: the graphs of the density of distributions lie above the graph of the normal distribution.

The fractality of the time series of the processes under study is due to the fact that the variables describing them are characterized by fractional measurement variables, which means that when deriving approximating probability density functions of the distribution of their parameters, it is appropriate to use fractional differential equations, for example, of the diffusion type. The article considers the construction of such a model, its analysis and comparison of the simulation results with the observed data.

Keywords: sociodynamic processes, activity of network mass media users, time series, Hurst exponent, time series fractality, differential equations with fractional derivatives.

REFERENCES

- [1] Khadjeh Nassirtoussi, A., Ying Wah, T., Ngo Chek Ling, D. A novel FOREX prediction methodology based on fundamental data. African Journal of Business Management, 2011, Vol. 5, pp. 8322 – 8330.
- [2] Anastasakis, L., Mort, N. Exchange rate forecasting using a combined parametric and nonparametric self – organising modelling approach. Expert Systems with Applications, 2009, Vol. 36, pp. 12001 – 12011.
- [3] Vanstone, B., Finnie, G. Enhancing stockmarket trading performance with ANNs. Expert Systems with Applications, 2010, Vol. 37, pp. 6602 – 6610.
- [4] Vanstone, B., Finnie, G. An empirical methodology for developing stockmarket trading systems using artificial neural networks. Expert Systems with Applications, 2009, Vol. 36, pp. 6668 – 6680.
- [5] Sermpinis, G., Laws, J., Karathanasopoulos, A., Dunis, C. L. Forecasting and trading the EUR/USD exchange rate with gene expression and psi sigma neural networks .Expert Systems with Applications, August 2012, Vol. 39, Issue 10, pp. 8865 – 8877.
- [6] Huang, S.-C., Chuang, P.-J., Wu, C.-F., Lai, H.-J. Chaos-based support vector regressions for exchange rate forecasting. Expert Systems with Applications, 2010, Vol.37, pp. 8590 – 8598.
- [7] Premanode, B., Toumazou, C. Improving prediction of exchange rates using differential EMD. Expert Systems with Applications, 2013, Vol. 40, pp. 377 – 384.
- [8] Mabu, S., Hirasawa, K., Obayashi, M., & Kuremoto, T. (2013). Enhanced decision making mechanism of rule-based genetic network programming for creating stock trading signals. Expert Systems with Applications, 40, 6311 – 6320.
- [9] Bahrepour, M., Akbarzadeh, T. M. –R., Yaghoobi, M., & Naghibi, S. M. –B. (2011). An adaptive ordered fuzzy time series with application to FOREX. Expert Systems with Applications, 38, 475–485.
- [10] P.G Preethi, V. Uma, Ajit Kumar Temporal Sentiment Analysis and Causal Rules Extraction from Tweets for Event Prediction Procedia Computer Science Open Access Volume 48, Pages 84 – 89, 2015 International Conference on Computer, Communication and Convergence, ICCCC 2015 Bhubaneswar, OD 27 December 2014 28 December 2014, 117138 ISSN 18770509 DOI 10.1016/j.procs.2015.04.154
- [11] Zhuo-Ming Ren, An Zeng, Yi-Cheng Zhang Structure-oriented prediction in complex networks Open Access Volume 750, Pages 1 – 5, 13 August 2018 ISSN 03701573 DOI 10.1016/j.physrep.2018.05.002
- [12] Zhukov D., Khvatova T., Aleshkin A., Schiavone F. Forecasting news events based on the model accounting for self-organisation and memory. Proceeding of the 2021 IEEE Technology and Engineering Management Conference - Europe, TEMSCON-EUR 2021, Article number 94886342021
- [13] Zhukov, D., Andrianova, E., Trifonova, O. Stochastic diffusion model for analysis of dynamics and forecasting events in news feeds. Symmetry, Volume 13, Issue 2, February 2021, Article number 257, pp. 1-23.
- [14] Fuentes, Miguel A. Non-Linear Diffusion and Power Law Properties of Heterogeneous Systems: Application to Financial Time Series Entropy Open Access Volume 20, Issue 930 August 2018 № 649 ISSN 10994300 DOI 10.3390/e20090649
- [15] H.E. Hurst. Long - term storage capacity of reservoirs. // Transactions of American Society of Civil Engineers. — 1951. — T. 116. — C. 770.
- [16] Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman, SanFrancisco, 1982.
- [17] Mainardi F. Waves and Stability in Continuous Media. Ed. by Rionero S., Ruggeri T. - Sungapore: World Scientific, 1994.
- [18] Wyss W.J. The fractional diffusion equation. J. Math. Phys. 27, 2782 (1986); <https://doi.org/10.1063/1.527251Math>.
- [19] Schneider W.R., Wyss W.J. Fractional diffusion and wave equations J. Math. Phys. 30, 134 (1989); <https://doi.org/10.1063/1.528578Math>.
- [20] Ilic, M., Liu, F., Turner, I., Anh, V. Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation, I. Fractional Calculus and Applied Analysis 8(3), 323–341 (2005)
- [21] Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. – New York: Academic Press, 1974.
- [22] Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – New York: John Wiley & Sons. Inc., 1993.