Отраженные функции и периодичность

А.В. Павлов

Аннотация—**В статье рассматривается некоторая, вообще говоря, неаналитическая функция комплексных переменных (поле) F(p). Значения поля F(p) на любой прямой Re p=A совпадает со значением исходной аналитической функции на прямой Re p= -A: F(A+iy)=f(-A+iy). Данное значение равно значению функции f(p-2A), сдвинутой относительно f(p) на величину 2A вправо, в точке p=A+iy при всех действительных A>0. Поле значений можно получить также отражением всех значений f(-p) на вертикальной прямой x=A относительно точки (A,0) для всех A>0. Результат сдвига значений f(p) на прямой x=-A в верхней полуплоскости на величину 2A направо и результат отражения значений на Re p=-A относительно центра координат совпадает с аналитической функцией f(p-2A) четной относительно центра в точке (A,0) (достаточно проследить перемещение прямой Re p=A в верхней полуплоскости при этих двух отображениях), то есть f(-p)=f(p-2A) при произвольном положительном A. Если поменять оси координат местами, то в новой системе координат некоторое поле сдвигов совпадает с аналитической функцией: F(p)=f(p). Как следствие мы получаем периодичность аналитической функции f(p) с периодом 2A. В ситуации, когда все значения аналитической функции f(p) на мнимой прямой действительны, мы получаем аналогичный факт для действительной части данной функции, и поле сдвигов U(x,y)=u(x-2A,y) совпадает с действительной частью u(x,y) данной аналитической функцией при всех (x,y) из правой полуплоскости: U(x,y)=u(x,y), x=A>0. Для четных по переменной x действительных частей аналитических функций производная на мнимой оси du(x,0)/dx равна нулю. Следствием результатов данной статьи является возможность продолжить аналитическую функцию на всю плоскость в достаточно общей ситуации. Одним из возможных объяснений доказанных фактов является вариация изображений длин векторов на плоскости в зависимости от направления этих векторов с точки зрения введения двух разных метрик.**

Ключевые слова— **периодичность функции, сдвиги функций, аналитичность поля отражений , два скалярных произведения**

I. Введение

В данной статье рассматриваются как действительные функции двух переменных (теорема 2) так и комплексные аналитические функции (теоремы 1,2), которые после сдвигов на некоторую величину образуют, вообще говоря, неаналитическую функцию точек плоскости (некоторое поле). В качестве иллюстрации результата теоремы 1 приведем пример, из которого следует возможность периодичности функции как результат совпадения ее значений с некоторым полем значений: если значения произвольной действительной функции сдвинуть на величину 2A вправо, то мы получаем поле сдвигов F(x,y), значения которого в каждой точке (A,y) совпадает с одновременно со значениями u(x-2A,y) и u(-x,y), то есть

$$u(x-2A,y) = u(-x,y),\ x=A>0,$$

если

$$u(-x,y)=u(x,y),$$

и поле сдвигов функции u(x,y) в правой полуплоскости совпадает с исходной функцией u(x,y):

$$u(x-2A,y) = u(x,y)$$

при всех (x,y) из правой полуплоскости (при всех x=A). Отметим, что обе функции

$$u(x,y),u(-x,y)$$

гармоничны, [7], если гармонична хотя бы одна из них, то есть поле сдвигов F(x,y) действительной части аналитической в левой полуплоскости функции совпадает с действительной частью некоторой аналитической в правой полуплоскости функции

$$f(p) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в случае действительности функции f(p) на мнимой прямой (по теореме Римана

$$u(-x,y)=u(x,y)$$

в данной ситуации, [7]).

В теореме 1 данный факт обобщен на случай произвольных аналитических функций. Следствием теоремы 1 является периодичность такого рода функций с периодом 2B<2A. Принципиальная возможность данного представления вытекает из следующего рассуждения: уравнения произвольной комплексной функции в двух системах координат с центрами в точках (0,0) и (a,0) равны z=f(p) и z=g(w) , a>0 , (z и w комплексные переменные для обеих систем координат); если p и w одна точка на плоскости, то p-w=a , и z=f(p)=g(p-a), но здесь p нельзя воспринимать одной точкой (при этом мы только что считали p и w одной точкой при w=p-a) , так как в этом случае у одной и той же функции, как отображения точек плоскости, появляется второе уравнение z=g(p-a), сдвинутое относительно исходного на a вправо, [2]. Данное рассмотрение в теореме 1 обосновывает возможность совпадения поля сдвигов комплексной функции с ее полем сдвигов.

Статья получена 04 мая 2022.

Andrey Valerianovich Pavlov is with Moscow Institute of Radio-technics,Electronics and Automatics-RTU, higher mathematics-1, Moscow, Russia (e-mail: avpavlovmgu@my-post.ru).

Теорема 1 продолжает результаты статей [1,2] относительно возникновения периодичности функций на плоскости. Если рассмотреть значения аналитических функций f(p-2A) в точках с действительной частью, равной A , то при всех действительных A мы получим два поля сдвигов

$$F(p): F(p)=f(p-2A), Re\ p=A;$$

$$G(p): G(p)=f(p-2Ai), Im\ p=A\ ,$$

вдоль оси OX и оси OY соответственно. С точки зрения аналитических продолжений данное поле сдвигов в некоторых условиях совпадает с исходной функцией (теорема 1). Из данного результата формально следуют основные результаты статей [1-5], относящихся к преобразованию Лапласа. Теорема 1 является главным результатом данной статьи.

В теореме 2 доказано, что производная по x гармонической функции, обладающей свойством четности, равна нулю на мнимой оси в области аналитичности данной функции. Из данной теоремы следует важное замечание 1 , [7,стр. 198-199].

В третьей части автор рассматривает вариацию изображений длин векторов на плоскости в зависимости от направления этих векторов с точки зрения введения двух разных метрик ([6,8]). Как следует из теоремы 3 или длины на сторонах ромба имеют другое изображение по сравнению с длинами на диагоналях, или стороны ромба ортогональны в произвольной ситуации. Данный факт является одним из возможных объяснений результатов теоремы 1 и замечания 1 .

II. ОПЕРАТОРЫ СДВИГА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Отметим, что уравнение

$$z = g(p) = f(2A - p)$$

определяет симметричное отражение значений функции $z = f(p)$ относительно точки $B = (A,0)$ (ввиду

$$g(p) = f(A - (p - A),$$

если

$$f(A + (p -A)) = f(p)\ ,$$

для произвольной функции комплексного переменного $f(p)$). Получившиеся симметричные значения на прямой x=A мы будем называть A-отражением; поле $F(p)$ можно так же получить отражением функции $f(p)$ относительно точек $(A,0)$ при всех $A>0$ A>0 (мы использовали равенство

$$f(p-2A)=f(-(2A-p))$$

в области аналитичности данных функций).

Во введении отмечено, что поле сдвигов действительной части совпадает с действительной частью функции аналитической f(p) в случае действительности f(p) на мнимой прямой во всей верхней полуплоскости. . Аналогичный факт для некоторых аналитических функций приведен в теореме 1.

Теорема 1.

Если функция $z = f(p)$ аналитична при всех

$$-4A < Re\ p < 4A,\ A \in (0,\infty),$$

то в некоторой системе координат поле сдвигов

$$Z=f(X+iY), X=y, Y=x.$$

совпадает с некоторой аналитической функцией $g(X+iY)$ (аналитичной относительно переменной $X+iY=W$).

Доказательство.

Если оси координат поменять местами, то уравнение аналитической в исходных координатах в правой полуплоскости функции f(p) равно

$$Z=f(X+iY), X=y, Y=x.$$

Это же отображение одновременно является полем

$$Z=f(i(-iY+X)), X=y, Y=x,$$

($Z=f(X+iY)$ вообще говоря неаналитическая функция). Отметим, что одно из этих отображений является аналитической относительно переменной $P=X+iY$ функцией, так как отображение $Z=f(X+iY)$ является полем сдвигов (порядок осей меняется, если исходные координаты повернуть на угол $\pi/2$, а затем поменять направление получившейся мнимой оси), следовательно,

$$Z=f(X-iY)$$

является аналитической функцией (в силу симметрии) как и отображение

$$Z=f(i(X-iY))=g(X+iY)\ .$$

Далее можно использовать факт: функции

$$Z=f(X\pm iY), Z=f(i(X\pm iY))$$

являются одновременно полем или аналитической функцией, если одна из них поле или аналитическая функция. Мы доказали, что $Z=f(i(-iY+X))$ аналитическая функция, а $Z=f(X+iY)$ поле одновременно с полем $Z=f(i(X+iY))$ при сдвигах вдоль новой мнимой оси аналитической функции . $Z=g(X+iY)$.

Теорема 1 доказана.

Значения функции $f(p)$ как отображения точек плоскости задает уравнение

$$z=f(p)=f(p-2A+2A)=f(w+2A)$$

в исходной системе координат и в системе координат с центром в точке $(2A\ ,0)$. Здесь точки p и w совпадают. Если воспринимать функцию как многообразие (сопоставление точек плоскости комплексным числам), то равенство

$$z=f(w+2A)$$

может означать, что значение сдвинутого налево на величину $2A$ многообразия в произвольной точке плоскости w (например, на вертикальной линии, проходящей через второй центр координат) совпадает со значением z из равенства $z=f(p)$, если точки w и p суть одна и та же точка на плоскости. Данное равенство означает периодичность исходной функции $z=f(p)$ с произвольным периодом $2A$.

Аналогичная периодичность получается, если в равенстве

$$z=f(z-2A+2A)$$

при $z-2A=w$ вектор $z-2A=w$ откладывать не от центра координат в точке $(2A\ ,0)$, а от исходного центра координат (с точки зрения чисел комплексное число w « не знает», что его откладывали от другого центра).

В теореме 2 с помощью методов решений задачи Дирихле доказано равенство нулю действительной части производной аналитической функции на мнимой оси в случае четности этой функции по переменной x.

Отметим , что значения поля F(p) и функции f(p) сопряжены по теореме Римана в случае действительных значений этой функции на мнимой оси, [7]. Следовательно,

$$F(p) = u(x, y) - iv(x, y),$$
$$p = A + iy, A > 0,$$

если

$$f(p) = u(x, y) + iv(x, y), p = x + iy,$$
$$x \in (-B, B), y \in (-\infty, \infty).$$

Теорема 2.

Если функция $f(p)$ аналитична в некоторой открытой области G , пересекающейся с мнимой осью по некоторому интервалу J, причем для всех $(x, y) \in G, (-x, y) \in G$ выполнено

$$f(p) = u(x, y) + v(x, y)i, x < 0, u(x, y) = u(-x, y),$$

то для любой фиксированной точки $w = (x_0, y_0) \in G$ при всех

$$q = (x, y) \in G, [q, w] \in G.$$

Производная по x гармонической функции

$$u_0(x, y) = \int_w^{(x,y)} (\partial u / \partial x)dx + (\partial u / \partial y)dy =$$
$$= u(x, y) + c, (x, y) \in G, c = const.,$$

равна нулю, если $(x, y) \in J$.

Доказательство.

Рассмотрим продолжение производной

$$U(x, y) = \mathrm{Re}\frac{df(p)}{dp} = \partial u(x, y) / \partial x$$

через интервал J мнимой оси с помощью равенств

$$U(x, y) = \partial u(x, y) / \partial x, x < 0,$$
$$U(x, y) = -U(-x, y), x > 0;$$
$$V(x, y) = \partial u(x, y) / \partial y, x < 0, p = x + iy,$$
$$V(x, y) = V(-x, y), x > 0, p = x + iy.$$

Такое продолжение существует и с точностью до константы совпадает в случае

$$u(x, y) = u(-x, y)$$

с $u(x, y)$; данный факт следует из совпадения таким образом определенных частных производных с производными гармонической в правой полуплоскости функции $u(-x, y)$, [7,стр.199], или из следующего рассуждения: интегралы по симметричным вертикальным отрезкам

$$[-X + iy, -x_0 + iy], [x_0 + iy, X + iy],$$
$$w = X + iy \in G, -X + iy \in G, y = const.,$$

а затем по симметричным горизонтальным отрезкам

$$[-x_0 + iy_0, -x_0 + iy], [x_0 + iy_0, x_0 + iy],$$

принадлежащим области G , совпадают:

$$u_1(x, y) = \int_{w_1}^{(x,y)} (\partial u / \partial x)dx + (\partial u / \partial y)dy =$$
$$= u(x, y) + c_1,$$
$$u_2(x, y) = \int_{w_2}^{(x,y)} U(x, y)dx + V(x, y)dy =$$
$$= u(x, y) + c_1,$$
$$w_1 = -X + iY \in G, w_2 = X + iY \in G, [w_1, w_2] \in G,$$
$$\partial u_2 / \partial x = U(x, y), \partial u_2 / \partial y = V(x, y),$$

как следствие исходного равенства

$$u(x, y) = u(-x, y)$$

и совпадения первой из этих функций в левой полуплоскости с точностью до константы с исходной гармонической функцией $u(x, y)$; в этом равенстве

$$\partial u_2 / \partial x = \partial u / \partial x, \partial u_2 / \partial y = \partial u / \partial y,$$

как это следует из определения частных производных интеграла во втором равенстве. (Аналогичные равенства после предельного перехода интегралов по произвольным ступенчатым траекториям верны для произвольных гладких путей с теми же началами и концами пути, что согласуется с теоремой 8, стр. 199, [7]).

Мы доказали, что

$$u(x, y) + c_1 = u_2(x, y)$$

для всех $x + iy$ из правой полуплоскости области G.

Производная по x в правой полуплоскости функции $u_2(x, y)$ в нуле в виде интеграла равна по определению этой функции $-\partial u(0, y) / \partial x$. Эта же производная ввиду доказанного равенства равна $\partial u(0, y) / \partial x$, или

$$0 = -\partial u(0, y) / \partial x = \partial u(0, y) / \partial x =$$
$$= \mathrm{Re}(df(p) / dp |_{iy}),$$

и данная производная равна нулю на мнимой оси.

Теорема 2 доказана.

Замечание 1.

Заметим, что из теоремы 1 следует, что в равенствах

$$f(p) = u(x, y) + v(x, y)i, x < 0,$$
$$g(p) = u_3(x, y) - v_3(x, y)i, x > 0,$$
$$u_3(x, y) = u(-x, y), -v_3(x, y) = v(-x, y)$$

функции $u(x, y), u_3(x, y)$ являются с точностью до константы одной и той же гармонической функцией, так как производная $\partial u(x, y) / \partial x$ совпадает с гармонической в левой полуплоскости действительной части производной

$$df(p) / dp = h(p), \mathrm{Re}\, h(p) = Y(x, y),$$

и для этой производной выполнено условие продолжения в правую полуплоскость для теорем 7,8 работы [7,стр.198] (точнее для функции $q(-ip) = h(p)$):

$$\operatorname{Re} q(-ip)|_{y=0} = \operatorname{Re} h(p)|_{iy} = \operatorname{Re}(df(p)/dp)|_{iy} =$$
$$= \partial u(0,y)/\partial x = 0, q(-ip) = h(p).$$

Следовательно, производные интегралов в определении

$$u_1(x,y), u_2(x,y)$$

являются продолжением одна другой через мнимую ось одной гармонической функции, [7, стр. 198].

Условию четности по x удовлетворяют, например, действительные части разности двух аналитических в G функций с одинаковыми на мнимой границе J. мнимыми частями.

Следствие 1.

Если функция $z = f(p)$ аналитична при всех

$$-4A < Re\, p < 4A, A \in (0,\infty),$$

и

$$Re\, f(p) = f(p), p \in (-i\infty, i\infty),$$

то при выполнении теоремы 1

$$Re\, f(p) = f(p), p = x+iy, x > 0, y \in (-\infty,\infty),$$

при всех

$$p = x+iy, 4A > x > 0, y \in (-\infty,\infty).$$

Доказательство.

Поле сдвигов $F(p)$ в правой полуплоскости совпадает с сопряженной к $f(p)$ функцией $\overline{f(p)}$. Следовательно, в правой полуплоскости одновременно выполнены два равенства

$$f(p) = F(p) = u(x-2A,y) + iv(x-2A,y) =$$
$$= u(x-2A,y) - iv(x-2A,y)$$
$$p = x+iy, \operatorname{Re} p = A.$$

данный факт эквивалентен равенству

$$f(p) = F(p) = u(x-2A,y), x > 0$$

Следствие 1 доказано.

Поле сдвигов действительной части совпадает с действительной частью функции $f(p)$, как это было отмечено во введении в случае действительности $f(p)$ на мнимой прямой. Рассмотрим аналогичный факт для мнимой части $f(p)$.

Обозначим через $G(x,y)$ поле сдвигов мнимой части $v(x,y)$, аналитической функции f(p) (по определению

$G(x,y)=v(x-2A,y)$, $x=A \in (-\infty,\infty)$,

при всех действительных y).

Обозначим через $f_s(p)$ функцию, значения которой на мнимой оси сопряжено $f(p)$ и равно

$$u(0,y) - iv(0,y).$$

Следствие 2.

Если функция $z = f(p)$ аналитична при всех

$$-4B < Re\, p < 4B, B \in (0,\infty),$$

то поле сдвигов аналитической в той же области функции $f_s(p)$ совпадает с $\overline{f(p)}$ во всей правой полуплоскости, причем поле сдвигов мнимой части $G(x,y)$ в правой полуплоскости в условиях следствия 1 совпадает с отрицательной мнимой частью

$$-v(x,y) = G(x,y), p = x+iy,$$
$$4B > x > 0, y \in (-\infty,\infty).$$

Доказательство.

Значения поля F(p) и функции f(p) сопряжены по теореме Римана в случае действительных значений этой функции на мнимой оси как в правой так и в левой полуплоскости, [7], если значения f(p) на мнимой оси совпадают со своей действительной частью.

Рассмотрим случай, когда вообще говоря значения f(p) на мнимой оси не совпадают со своей действительной частью.

Пусть в правой полуплоскости

$$F(p) = u(x,y) - iv(x,y),$$
$$p = A+iy, A > 0,$$

если

$$f(p) = u(x,y) + iv(x,y), p = x+iy,$$
$$x \in (-B,B), y \in (-\infty,\infty).$$

Поле сдвигов F(p) образовано сдвигами функции $f_s(p)$, значения которой на мнимой оси сопряжено $f(p)$ и равно

$$u(0,y) - iv(0,y)$$

(поле сдвигов сопряжено значению $f(-\overline{p})$ и данная функция аналитична по теореме Римана, [7], так как по этой теореме существует функция g(p), значения которой в левой полуплоскости сопряжены $f(-\overline{p})$), и

$$\overline{f(-\overline{p})} = g(p),$$

причем сдвиг этих значений в правой полуплоскости совпадает с

$$F(p) = u(x,y) - iv(x,y)).$$

Следовательно, такая функция $f_s(p)$ существует, причем функция $f_s(p)$ в правой полуплоскости совпадает с полем сдвигов некоторой вообще говоря неаналитической функции равной по определению

$$R(p) = u_s(x,y) - iv_s(x,y)$$

в левой полуплоскости, так как

$$f(p) = u_s(x-2A,y) - iv_s(x-2A,y) = \overline{F(p)},$$
$$x > 0.$$

В условиях следствия 1, когда мнимая часть $v(0,y) \equiv 0$ для всех действительных y,

$$f_s(p) = f(p)$$

в области аналитичности $f(p)$, и

$$R(p) = u(x,y) - iv(x,y), x < 0,$$
$$f(p) = u(x-2A,y) - iv(x-2A,y), x > 0.$$

Так как функция $R(p)$ сопряжена исходной функции $f(p)$ в левой полуплоскости, то она совпадает с полем сдвигов (налево) исходной функции, как было отмечено в начале доказательства следствия 2.

III ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВАРИАЦИЯ МЕТРИК НА ПЛОСКОСТИ

Одним из возможных объяснений фактов теорем 1,2 является приведенная в теореме 3 вариация изображений длин векторов на плоскости в зависимости от направления этих векторов с точки зрения введения двух разных метрик. В теореме 3 доказано, что длины векторов имеют разные изображения на плоскости с точки зрения некоторого ортогонального преобразования [6,8].

По определению, ортогональное преобразование A определяется с помощью матрицы

$$A = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

в базисе векторов

$$e_1 = x_1 / \| x_1 \|, e_2 = x_2 / \| x_2 \|,$$

где Q_1, Q_2 - диагонали ромба (вектора) со сторонами $x_1, x_2, \| x_1 \| = \| x_2 \|,$ причем в данном базисе

$$A = A^{-1} = A^{\bullet}, A^2 = E, A^{-1}AA = A,$$
$$A_1 x_1 = Q_1 / \sqrt{2}, A_1 x_2 = Q_2 / \sqrt{2},$$
$$A_1^{-1} Q_1 = x_1 \sqrt{2}, A_1^{-1} Q_2 = x_2 \sqrt{2}.$$

По определению, A_1 обозначает линейное преобразование с матрицей A в базисе

$$e_1 = x_1 / \| x_1 \|, e_2 = x_2 / \| x_2 \|,$$
$$A_1 x_1 = Q_1 / \sqrt{2}, A_1 x_2 = Q_2 / \sqrt{2}.$$

.

Рассмотрим (как в статье [8]) два скалярных произведения на плоскости: $((\cdot),(\cdot))_1$ и $((\cdot),(\cdot))_2$; первое из них совпадает с исходным скалярным произведением $((\cdot),(\cdot))_1 = ((\cdot),(\cdot))$, а второе определяется как

$$(X_1, X_2)_2 = C_1 R_1 + C_2 R_2,$$

если

$$X_1 = C_1 e_1 + C_2 e_2,$$
$$X_2 = R_1 e_1 + R_2 e_2 \qquad ,$$
$$\| e_1 \| = \| e_2 \| = 1, (e_1, e_2) \neq 0.$$

Теорема 3.

$$(A_1 y_1, A_1 y_2)_2 = (A_1 y_1, A_1 y_2)_1$$

для произвольных векторов плоскости y_1, y_2.

Доказательство.

Доказательство вытекает из равенства

$$(A_1 y_1, A_1 y_2)_2 =$$
$$= (A_1(\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2), A_1(\alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2))_2 =$$
$$= ((\alpha_1 A_1 e_1 + \beta_1 A_1 e_2), (\alpha_2 A_1 e_1 + \beta_2 A_1 e_2))_2 =$$
$$= ((\alpha_1 A_1 e_1 + \beta_1 A_1 e_2), (\alpha_2 A_1 e_1 + \beta_2 A_1 e_2))_1 =$$
$$= (A_1 y_1, A_1 y_2)_1,$$

при любых

$$\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 = y_1, \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 = y_2,$$
$$\alpha_i, \beta_i = const., e_i = x_i / \| x_i \|_1 = x_i / \| x_i \|_2,$$
$$\| e_i \|_i = 1, i = 1, 2.$$

Мы использовали совпадение длин на сторонах ромба в обеих метриках

$$\| x \|_1 = (x, x)_1^{1/2} = (x, x)_2^{1/2} = \| x \|_2,$$

и то, что

$$(A_1 e_i, A_1 e_i)_2 = 1,$$

как результат ортогонального преобразования ортонормированных векторов для второго скалярного произведения, $(e_1, e_2)_2 = 0$; если единичные вектора имеют одинаковое изображение, как это было на сторонах ромба, то

$$(A_1 e_i, A_1 e_i)_2 = (A_1 e_i, A_1 e_i)_1 = 1,$$

и данный факт тоже можно использовать при выводе основного равенства теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 следует, что

$$(x_1, x_2)_1 == (x_1, x_2)_2 = 0,$$

так как

$$(x_1, x_2)_1 = (A_1^2 x_1, A_1^2 x_2)_1 =$$
$$(A_1^2 x_1, A_1^2 x_2)_2 = (x_1, x_2)_2,$$
$$A_1^2 = A^2 = E$$

в некотором базисе, и

$$A_1 x_1 = y_1, A_1 x_2 = y_2 .$$

Единственное предположение, которое объясняет данное равенство при доказательстве теоремы 3 , является предположение о разном изображении единиц измерения на диагоналях и сторонах ромба в исходной метрике. В этой ситуации

$$1 = (A_1 e_i, A_1 e_i)_2 \neq (A_1 e_i, A_1 e_i)_1.$$

Заключение

Из теоремы 1 следует, например аналитичность двойного преобразования Лапласа из статей [1-5] в некоторой открытой окрестности нуля. Данный факт является основой доказательства всех результатов статей [1-4] .

Применение теорем 1,2 в дальнейшем требует отдельного рассмотрения. В статьях [6,8] отмечены аналогичные интересные факты в геометрии.

С точки зрения длин векторов не только теорема 3 для плоскости является объяснением результатов теорем 1 и 2. В пространстве тоже необходимо менять длину вектора с точки зрения разных скалярных произведений аналогичных скалярному произведению теоремы 3 (в работах [6,8] рассмотрен случай параллелограмма со сторонами x_1, x_2 и третьего вектора x_3 в трехмерном пространстве): найдем проекцию pr_x_3 вектора x_3 на плоскость векторов x_1, x_2 двумя способами с использованием двух разных метрик теоремы 3:

$$x_3 = e \| pr\_x_3 \|_1 + c_3\delta, \| e \|_1 = 1,$$
$$x_3 = e \| pr\_x_3 \|_2 + c_3\delta, \| e \|_2 = 1.$$
$$\| e \|_2 = 1, (\delta, e)_1 = (\delta, e)_2 = 0,$$
$$(\delta, x_1) = (\delta, x_2) = (\delta, x_1)_2 = (\delta, x_2)_2 = 0.$$

Здесь единица измерения длины $\| e \|$ одна и та же для разных двух метрик $\| e \| = \| e \|_1 = \| e \|_2 = 1$, заданных двумя скалярными произведениями теоремы 3 на плоскости векторов x_1, x_2 (данное предположение естественно ввиду очевидного совпадения единиц длин векторов параллельных или x_1 или x_2 в координатной форме). Мы получаем равенство

$$\| pr\_x_3 \|_1 = \| pr\_x_3 \|_2$$

для двух разных метрик теоремы 3. Формально, для ликвидации противоречия

$$\| pr\_x_3 \|_1^2 \neq \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 = \| pr\_x_3 \|_2$$

в треугольнике со сторонами

$$x_1, x_2, x_1 + x_2,$$

предполагается, что единицы измерения длин на диагонали параллелограмма со сторонами x_1, x_2 разные для введенных двух метрик (они не совпадают с общей единицей измерения на сторонах). В противном случае вектора x_1, x_2, δ линейно зависимы.

Библиография

[1] Pavlov A.V. The regularity of the Laplace transform Math. Phys.and Comp. Model.Volgograd State University, 2019, 22 1, 5-11.

[2] Pavlov A.V. Reflection of Regular Functions. Volgograd State University. Mathematical Physics and Computer Model (Simulation). Vol. 24, No. 4, 2021, 79-82.
https://mp.jvolsu.com/index.php/ru/component/attachments/download/1026

[3] Pavlov, A. V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier. Issues of Analysis. 2016. v. 23, no. 1. p. 21–30.

[4] Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. Journal Moscow University Mathematics Bulletin, Springer, 2019, 74, 2, 75-78.

[5] Павлов А.В. Регулярность преобразования Лапласа и преобразование Фурье. Тула. Чебышевский сборник. 2020, т. 21, 4, 162–170.

[6] Andrey Valerianovich Pavlov: Geometry in space and orthogonal operators (Optimal linear prognosis). 8th Eur.opean Cong. of Math., 20-26 June 2021 , Portoroz, Slovenia. Book of Abstracts. University of Primorska, Press Koper, Slovenia. General Topics. p. 690. Electronic Edition:
https://www.hippocampus.si/ISBN/978-961-293-083-7.pdf
https://www.hippocampus.si/ISBN/978-961-293-084-4/index.html
https://doi.org/10.26493/978-961-293-083-7

[7] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва: Наука,1987, 688 с.

[8] Andrey V. Pavlov. Optimal linear prognosis II. Geometry in space. Intern. Jour. of Open Information Technologies, v. 9, no.2, p. 9-13, 2021.

Reflected functions and periodicity

Andrey V. Pavlov

Abstract—**In the article, some non-regular F(p) field is determined (the non-regular function of the p=x+iy variables). We obtain a main result after consideration of the F(p) values: F(p)=f(p-2A), if p=x+iy, x=A, for all A. The F(A+iy) values are equal to the f(-A+iy) values in the A+iy point as a result of moving f(p) function to the right for all y on the 2A distance. A reflection of the F(p) field in the (A,0) point is the f(-p) regular function for all real A. For some functions, the result of the moving is equal to the result of the reflection, and we obtain the f(z-2A)=f(-z) equality for all the (A,y) points. After the change of order of axes of coordinates, it is possible to prove, that the F(p) values (in the right part of the plane) are equal to the f(p) values (for the regular f(p) function). We obtain, that the f(p) function is periodic.**

The result of the moving is equal to the result of the reflection, and we obtain the f(z-2A)=f(-z) equality for the (A,y) points, if f(A+w)=f(A-w) (we use, that the Re z=-A line passes to the values of the same analytical function as for the reflection so as for the moving). In this situation, the F(p) values (in the right part of the plane) are equal to the f(p) values (for the regular f(p) function).

We can use the f(p)=u+iv equality, if F(p)=u-iv (for the regular f(p) functions with the real values on the imaginary axis). We get u(x-2A,y)=u(x,y)=u(-x,y) for all A=x>0 too, and the U(x,y) field is equal to the harmonic u(x,y) function. By the definition, the U(A,y) values are equal to the u(x-2A,y) values in the A+iy point as a result of moving of the u(x,y) function to the right for all y on the 2A distance. The U(x,y) field is the field of the moving function too. It is proved, that the u(x,0)/dx function is equal to 0 on the complex axis, if u(x,y)=u(-x,y). In this situation, the f(p) values are real in the right part of the plane. The continuation of the regular functions is possible for the u(x,y)+iv(x,y) functions. From the point of some new metrics, the length of vectors depends on the direction of the vectors. It is some possible explanation of the results of the article.

Keywords— periodicity of function, reflections of function, **moved functions**, regular functions, two scalar production

REFERENCES

[1] Pavlov A.V. The regularity of the Laplace transform Math. Phys.and Comp. Model.Volgograd State University, 2019, 22 1, 5-11.

[2] Pavlov A.V. Reflection of Regular Functions. Volgograd State University. Mathematical Physics and Computer Model (Simulation). Vol. 24, No. 4, 2021, 79-82. https://mp.jvolsu.com/index.php/ru/component/attachments/download/1026

[3] Pavlov, A. V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier. Issues of Analysis. 2016. v. 23, no. 1. p. 21–30.

[4] Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. Journal Moscow University Mathematics Bulletin, Springer, 2019, 74, 2, 75-78.

[5] Pavlov A.V. Reguljarnost' preobrazovanija Laplasa i preobrazovanie Fur'e. Tula. Chebyshevckij sbornik. 2020, t. 21, 4, 162–170.

[6] Andrey Valerianovich Pavlov: Geometry in space and orthogonal operators (Optimal linear prognosis). 8th Eur.opean Cong. of Math., 20-26 June 2021 , Portoroz, Slovenia. Book of Abstracts. University of Primorska, Press Koper, Slovenia. General Topics. p. 690. Electronic
Edition:
https://www.hippocampus.si/ISBN/978-961-293-083-7.pdf
https://www.hippocampus.si/ISBN/978-961-293-084-4/index.html
https://doi.org/10.26493/978-961-293-083-7

[7] Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo. Moskva: Nauka,1987, 688 s.

[8] Andrey V. Pavlov. Optimal linear prognosis II. Geometry in space. Intern. Jour. of Open Information Technologies, v. 9, no.2, p. 9-13, 2021.