Связь простоты турнира с различными значениями его диаметра

А.О. Шабаркова, М.Б. Абросимов

***Аннотация* — Одним из важнейших видов графов являются турниры, поскольку они находят практическое применение во многих сферах нашей жизни. Напомним, что турниром называется полный направленный граф, то есть ориентированный граф, между каждой парой вершин которого есть единственная дуга, а в каждой вершине – петля. Как и многие алгебраические объекты, турниры состоят из более мелких элементов. Всё многообразие их видов позволяет описать такая структура, как конгруэнция. Изучение конгруэнций представляет большую актуальность, поскольку знание схемы построения конкретных типов турниров, обладающих определёнными свойствами, такими как, например, величина диаметра и простота, значительно упрощает использование турниров на практике, так как можно будет с нуля построить необходимый граф, а не проверять все известные, пока не будет найден нужный.**

Большой интерес представляют простые турниры, то есть турниры, решётка конгруэнций которых состоит из двух элементов. Учитывая кратно увеличивающееся количество турниров при росте размерности, существование схемы построения будет давать значительное ускорение при выборе турнира с заданными свойствами.

В данной работе описываются турниры, имеющие бесконечный диаметр, а также диаметры *n* – 1 и *n* – 2. Рассматривается структура таких турниров, а также исследуется вопрос об их простоте. Доказывается, что все *n*-вершинные турниры с диаметром *n* – 1 являются простыми, а все турниры с бесконечным диаметром простыми не являются. Среди турниров с диаметром *n* – 2 есть как простые, так и непростые турниры.

***Ключевые слова* — турнир, конгруэнция турнира, решётка турнира, простой турнир, диаметр.**

I. Введение

Напомним, что турниром называется полный направленный граф. Основные определения даются по работе [1].

Статья получена 16 апреля 2022.

А. О. Шабаркова, студентка, ФГБОУ ВО Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского, Саратов, Россия (e-mail: shabarkova_alex.andra@mail.ru).

М. Б. Абросимов, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой, ФГБОУ ВО Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского, Саратов, Россия (e-mail: mic@rambler.ru).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006)

Отношение ε называется отношением эквивалентности, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Классом эквивалентности ε на множестве S, соответствующим элементу x, называется множество $\varepsilon(x) = \{y \in S: x \sim y\}$, где $x \sim y$ обозначает, что элементы x и y состоят в отношении эквивалентности ε.

Пусть ε – некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа $\vec{G}$. Фактор-графом орграфа $\vec{G}$ по эквивалентности ε называется орграф $\vec{G}/\varepsilon = (V/\varepsilon,\ \alpha_\varepsilon)$, где V/ε – множество классов эквивалентности ε; $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)): \exists\, u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2)\ (u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Конгруэнция турнира $\vec{T} = (V,\ \alpha)$ – это такая эквивалентность на множестве его вершин, что фактор-граф по ней является турниром. То есть конгруэнция турнира $\vec{T} = (V,\ \alpha)$ – это такая эквивалентность $\Theta \subseteq V \times V$, что никакие два различных Θ-класса не имеют встречных дуг [1]. Очевидно, что любой турнир имеет по крайней мере две конгруэнции: тождественную и универсальную.

Con $\vec{T}$ – это совокупность всех конгруэнций турнира $\vec{T}$. Con $\vec{T}$ образует решётку.

Турнир $\vec{T} = (V,\ \alpha)$ называется простым, если решётка Con $\vec{T}$ двухэлементна, т.е. если $\vec{T}$ не содержит собственных нетождественных конгруэнций. Простые турниры были введены в работе [2]. Также простым турнирам посвящены работы [3, 4]. Известно, что у каждого турнира имеется вершинное 1-расширение до простого турнира [4]. Строению турниров посвящено много работ, например, [5].

Эксцентриситет вершины графа – это наибольшее из расстояний от этой вершины до всех остальных.

Диаметр графа – это наибольший из эксцентриситетов всех его вершин, обозначается d.

Турнир называется сильным, если все его вершины взаимно достижимы. Очевидно, что, если турнир не является сильным, то его диаметр будет бесконечным. Для сильного n-вершинного турнира диаметр d находится в диапазоне $2 \le d \le n - 1$. Известно, что большинство турниров обладает диаметром 3 [5].

Исследованию эксцентриситетов турниров посвящена работа [6]. В данной работе мы рассмотрим задачу об описании простых и непростых турниров с некоторыми значениями диаметра.

II. ПОДСЧЁТ ТУРНИРОВ РАЗЛИЧНОГО ДИАМЕТРА

В ходе исследований был произведён вычислительный эксперимент по подсчёту количества турниров различного диаметра для $n \leq 11$. Результаты эксперимента приведены в таблице ниже (таблица 1). Бесконечный диаметр означает, что какая-либо вершина недостижима ни из какой другой вершины турнира, то есть турнир не является сильным.

Таблица 1 – Результаты подсчёта турниров различного диаметра для $6 \leq n \leq 11$

Диаметр	Размерность					
	6	7	8	9	10	11
∞	21	103	872	13403	377107	19288658
2	3	28	395	12741	772550	87117224
3	24	243	4451	139951	7683411	744296620
4	7	71	1027	23294	850063	51244862
5	1	10	121	1951	46574	1726123
6	–	1	13	179	3085	79940
7	–	–	1	16	246	4476
8	–	–	–	1	19	322
9	–	–	–	–	1	22
10	–	–	–	–	–	1

Далее будут сформулированы и доказаны некоторые утверждения о турнирах с числом вершин n и с диаметром $n - 1$, $n - 2$ и турнирах с бесконечным диаметром, то есть турнирах, которые не являются сильными, с точки зрения их простоты.

III. ТУРНИРЫ С ДИАМЕТРОМ n - 1

Рассмотрим сначала n-вершинные турниры с диаметром n – 1. Предварительные результаты были опубликованы в работе [3].

ТЕОРЕМА 1. Для каждой размерности $n \geq 3$ существует единственный с точностью до изоморфизма турнир с диаметром $n - 1$, причём при $n \neq 4$ он будет являться простым.

Доказательство. При $n = 3$, как известно, существует два турнира: циклическая тройка с диаметром 2 и транзитивная тройка с бесконечным диаметром. Циклическая тройка очевидно является простым турниром.

При $n = 4$, как известно, существует 4 неизоморфных турнира. Покажем, что для $n = 4$ утверждение теоремы не выполняется. Рассмотрим турнир с числом вершин 4 и имеющий диаметр, равный 3. Он изображён на рисунке 1.

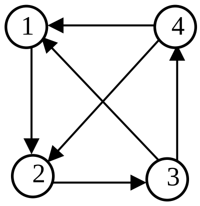

Рисунок 1 – 4-вершинный турнир, с диаметром 3

Этот турнир не является простым, так как у него имеется нетривиальный класс конгруэнции {1, 4}.

Убедимся, что для каждой размерности при числе вершин $n \geq 3$ турнир, имеющий диаметр, равный $n - 1$, существует только один с точностью до изоморфизма. Это следует из условия наличия вершины с эксцентриситетом $n - 1$. Действительно, так как эксцентриситет вершины – это наибольшее из расстояний от этой вершины до всех остальных, то в турнире $\overrightarrow{T_n}$ существует цепь длины n – 1 особого вида. Обозначим эту цепь v_1, …, v_n. При построении турнира $\overrightarrow{T_n}$ с диаметром n – 1 получим, что дуги, исходящие из вершин на пути, на котором достигается требуемое значение эксцентриситета, могут быть направлены только в одну сторону, а именно, во все предыдущие вершины, кроме непосредственного предшественника, из которого дуга идёт в следующую за ним вершину.

Можно представить себе построенный турнир $\overrightarrow{T_n}$ другим способом. Напомним, что транзитивным называется турнир с транзитивным отношением смежности. Из его известных свойств отметим два. Во-первых, в нём существует единственная гамильтонова цепь, то есть цепь, проходящая по всем вершинам. Во-вторых, его вершины можно занумеровать так, что дуга будет идти из вершины с большим номером в вершину с меньшим номером (или наоборот). Построенный нами n-вершинный турнир $\overrightarrow{T_n}$ с диаметром $n-1$ можно представить себе как транзитивный турнир, в котором переориентировали дуги, входящие в единственную гамильтонову цепь. В нашем случае это и будет цепь v_1, …, v_n.. В транзитивном турнире вершины имеют степени исхода и захода (0, n – 1), (1, n – 2), …, (n – 1, 0), а в турнире $\overrightarrow{T_n}$ (1, n – 2), (2, n – 3), …, (n – 2, 1).

Построим турнир $\overrightarrow{T_n}$ по вышеприведённой схеме с числом вершин n, имеющий вершину с эксцентриситетом $n - 1$, и покажем, что он является простым (рисунок 2).

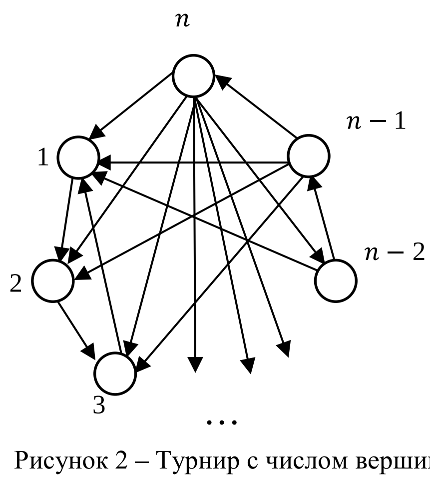

Рисунок 2 – Турнир с числом вершин n

Для того чтобы турнир $\overrightarrow{T_n}$ являлся простым, он должен иметь только две конгруэнции: тождественную и универсальную. Тождественная конгруэнция есть всегда; осталось показать, что не существует нетривиальной нетождественной конгруэнции. Докажем методом от противного.

Предположим, что построенный турнир $\overrightarrow{T_n}$ не является простым и существует нетривиальный класс конгруэнции, который содержит от 2 до n – 1 вершин.

Попробуем рассмотреть, какие вершины могут оказаться в этом классе.

Объединим вершины 1 и 2 в один класс конгруэнции и рассмотрим вершину 3. Так как дуги (2, 3) и (3, 1) имеют противоположное направление, то вершина 3 также входит в рассматриваемый класс конгруэнции. Возьмём следующую вершину, а именно, 4. И она будет входить в наш класс, так как из неё дуги ведут в вершину 1 и 2, а из вершины 3 дуга ведёт в саму вершину 4. Продолжая процесс рассмотрения вершин, получим, что в каждую следующую вершину ведёт дуга из непосредственного предшественника, а из неё самой ведут дуги во все предыдущие, кроме вершины, рассмотренной на предыдущем шаге. Таким образом, видно, что все вершины турнира входят в один класс конгруэнции. Следовательно, вершины 1 и 2 не могут входить в нетривиальный класс конгруэнции.

Теперь объединим вершины 1 и 3 в один класс конгруэнции и рассмотрим вершину 2. Так как дуги (2, 3) и (1, 2) имеют противоположное направление, то вершина 2 также входит в рассматриваемый класс конгруэнции, в результате чего мы получаем один из промежуточных шагов предыдущего случая. Значит, и при таком выборе начальных вершин все вершины турнира входят в один класс конгруэнции.

Затем объединим вершины 1 и 4 в один класс конгруэнции и рассмотрим вершину 5. Она существует, потому что у нас число вершин $n \geq 5$. Так как дуги (5, 1) и (4, 5) имеют противоположное направление, то вершина 5 также входит в рассматриваемый класс конгруэнции. Возьмём вершину 3: дуги (3, 1) и (3, 4) имеют одинаковое направление, а дуга (5, 3) – противоположное им, значит, вершина 3 входит в рассматриваемый класс конгруэнции. Продолжим с вершиной 2: дуги (2, 3) и (1, 2) имеют противоположное направление, тогда вершина 2 также входит в рассматриваемый класс конгруэнции. На данный момент мы имеем класс конгруэнции {1, 2, 3, 4, 5}, который является одним из промежуточных шагов предыдущего случая. Значит, и при таком выборе начальных вершин все вершины турнира входят в один класс конгруэнции.

Теперь объединим вершины 1 и d, где $d \geq 5$, в один класс конгруэнции и рассмотрим вершину $d - 2$. Так как дуги $(d - 2,\ 1)$ и $(d,\ d - 2)$ имеют противоположное направление, то вершина $d - 2$ также входит в рассматриваемый класс конгруэнции. Все вершины, предшествующие вершине $d - 2$, также будут входить в рассматриваемый класс конгруэнции, так как направление дуг из этих вершин в их ближайших последователей и дуг из вершины d будет противоположно. Раз вершина $d - 2$ входит в рассматриваемый класс, то и вершина $d - 1$ тоже входит, потому что дуги

$(d - 1,\ 1)$ и $(d - 2,\ d - 1)$ имеют противоположное направление. Значит, и при таком выборе начальных вершин все вершины турнира входят в один класс конгруэнции.

Следовательно, поочерёдно объединяя с вершиной 1 все остальные вершины в один класс конгруэнции, получили, что турнир, кроме тождественной конгруэнции, имеет только универсальную.

Перебирая последовательно все возможные начальные пары вершин, видим, что при любом их выборе рассматриваемый турнир имеет двухэлементную решётку конгруэнций.

Значит, турнир простой. ■

IV. Турниры с диаметром $n - 2$

Рассмотрим теперь n-вершинные турниры с диаметром n – 2. Предварительные результаты были опубликованы в работе [4].

ТЕОРЕМА 2. Для каждой размерности $n \geq 6$ существует $3n - 11$ турниров с диаметром $n - 2$, причём $2n - 10$ из них будут являться простыми, а $n - 1$ – нет.

Доказательство. Обозначим через $\overrightarrow{T_n}$ n-вершинный турнир с диаметром n – 2. Повторяя рассуждения предыдущей теоремы, можно утверждать, что, если турнир имеет диаметр $n - 2$, то это означает существование в турнире цепи длины $n - 2$ особого вида. Обозначим такую цепь v_1, …, $v_{n\text{-}1}$. Из начальной вершины v_1 этой цепи нет дуг, которые идут в остальные вершины цепи, кроме v_2. Турнир, порождённый вершинами v_1, …, $v_{n\text{-}1}$, был описан в теореме 1. Покажем все возможные способы ориентации дуг для получения турнира с цепью длины $n - 2$.

Для начала докажем утверждение теоремы для турниров, которые простыми не являются. Чтобы получить такой турнир с числом вершин n, необходимо взять турнир с числом вершин $n - 1$, обладающий диаметром $n - 2$, который был описан в теореме 1, и последовательно продублировать каждую вершину. То есть каждый следующий непростой турнир будет получаться таким образом: добавляем новую вершину, выбираем вершину, которую будем дублировать, и у вновь добавленной вершины проводим дуги в том же направлении, что и в выбранной ранее для дубляжа. Например, если из выбранной вершины дуга вела в вершину с номером 1, то и из вновь добавленной вершины будет дуга в вершину с номером 1. Направление дуги между добавленной вершиной и дублируемой выбираем произвольным образом. Для определённости, можно считать, что дуга имеет направление от добавленной вершины к дублируемой. Очевидно, что такой турнир будет иметь нетривиальный класс эквивалентности, состоящий из выбранной для дубляжа вершины и её копии. У добавленной вершины эксцентриситет будет таким же, как у выбранной для дубляжа, поскольку дуги от неё во все остальные вершины идут в том же направлении, что и у выбранной для дубляжа. Получаем, что значение диаметра у турнира останется прежним, а именно $n - 2$. Таким образом, поскольку вершин в расширяемом турнире $n - 1$, то и число непростых турниров с числом вершин n и диаметром $n - 2$ будет равно $n - 1$, так как каждую вершину мы дублируем только 1 раз.

Теперь докажем утверждение теоремы для турниров, которые являются простыми. Новые простые турниры будем получать вершинным 1-расширением простых турниров с $n - 1$ вершинами и диаметром $n - 3$, а также диаметром $n - 2$. У добавленных вершин в таких турнирах будут эксцентриситеты: 2, 3, …, $n - 4$, $n - 3$. Причём вершин с эксцентриситетами не равными 2 и 3 будет по 2. Покажем это.

Рассмотрим 2 случая: первый, когда добавочная вершина имеет эксцентриситет не равный $n-3$, и второй, когда эксцентриситет добавочной вершины равен $n-3$.

В первом случае 1-расширение строится так: необходимо взять простые турниры размерности $n-1$ с диаметром, равным $n-3$, и провести дуги следующим образом: от добавочной вершины идёт дуга к вершине с эксцентриситетом равным $n-3$, а в добавочную входят дуги от всех остальных вершин. Полученные турниры имеют диаметр $n-2$, потому что из добавочной вершины мы можем попасть только в вершину с эксцентриситетом $n-3$, то есть получается, что эксцентриситет добавочной вершины будет равен $n-2$. Эти турниры являются простыми, поскольку выделить для них нетривиальный класс конгруэнции невозможно.

Во втором случае необходимо взять турнир размерности $n-1$ с диаметром $n-2$ и построить 2 расширения. В одном из них из добавочной вершины дуги идут в вершины с эксцентриситетами $n-2$, $n-3$, $n-4$, а в добавочную входят дуги от всех остальных вершин; в другом – из добавочной вершины дуги идут в вершины с эксцентриситетами $n-2$, $n-4$, а в добавочную входят дуги от всех остальных вершин. Полученные турниры имеют диаметр $n-2$, потому что из добавочной вершины мы можем попасть в несколько вершин, из которых одна обладает с эксцентриситетом $n-4$, который является минимальным для данной группы вершин. Получается, что эксцентриситет добавочной вершины будет равен $n-3$, а значит, диаметр турнира останется равным $n-2$. Покажем, что полученные турниры будут являться простыми. Расширяемый турнир является простым, значит, нетривиальные классы конгруэнции могут образоваться только с участием добавочной вершины. Поскольку и в первом, и во втором случае добавочная вершина имеет входные и выходные дуги, она не является самостоятельным классом конгруэнции. Предположим, что добавочная вершина и вершина с эксцентриситетом $n-2$ образуют класс эквивалентности. Это не так, поскольку в вершину с эксцентриситетом $n-4$ дуга будет вести только в добавочную вершину. Продолжая подобным образом перебирать все возможные наборы вершин для объединения в нетривиальный класс конгруэнции, увидим, что выделить нетривиальный класс конгруэнции невозможно, что значит, полученные турниры являются простыми.

Из 6-вершинных турниров с диаметром 4 только 2 являются простыми. Добавочными они имеют по одной вершине с эксцентриситетами 2 и 3. Эти турниры будут расширяться первым способом для построения простых турниров с числом вершин 7 и диаметром 5. Кроме них, с 7 вершинами будет 2 турнира построенных вторым способом. То есть, всего 4 турнира с 7 вершинами. Получаем, что с увеличением числа вершин количество простых турниров с диаметром $n-2$ будет увеличиваться на 2, следовательно, для размерности n число таких турниров будет равно $2n-10$.

Складывая количество простых и непростых турниров с диаметром $n-2$, видим, что их общее число равно $3n-11$. ■

V. Турниры с бесконечным диаметром

Рассмотрим в заключении турниры, не являющиеся сильными, то есть турниры, которые имеют бесконечный диаметр. Этот случай оказывается наиболее простым.

Теорема 3. Турниры, имеющие бесконечный диаметр, простыми не являются.

Доказательство. Бесконечный диаметр означает, что в некоторую вершину или группу вершин невозможно попасть из каких-либо оставшихся вершин, либо что из некоторой вершины или группы вершин невозможно попасть в оставшиеся. Вершины, в которые или из которых мы не можем попасть в некоторые другие вершины, образуют нетривиальный класс конгруэнции, то есть решётка таких турниров не может быть двухэлементной. ■

VI. Заключение

В данной статье были рассмотрены турниры, имеющие бесконечный диаметр, а также диаметры $\boldsymbol{n-1}$ и $\boldsymbol{n-2}$. Было доказано, что все n-вершинные турниры с диаметром n – 1 являются простыми, а все турниры с бесконечным диаметром простыми не являются. Среди турниров с диаметром n – 1 есть $\boldsymbol{2n-10}$ простых и $\boldsymbol{n-1}$ – непростых турниров.

Библиография

[1] Богомолов А.М., Салий В.Н. *Алгебраические основы теории дискретных систем*. – М.: Изд-во Физматлит, 1997. – 368 с.

[2] Fried E., Lakser H. *Simple tournaments* // Notices Amer. Meth. Soc. – 1971. – Vol. 18. P. 395.

[3] Erdös P., Fried E., Hajnal A., Milner E.C. *Some remarks on simple tournaments* / Algebra universalis. – 1972. – Vol. 2, №. 2. P. 238-245.

[4] Мун Дж. В. *Вложение турниров в простые турниры* // Теория графов. Покрытия. Укладки. Сборник переводов. – М.: Мир, 1974. – С. 169–174.

[5] Moon J. W. *Topics on Tournamtens*. – Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968. – 148 p.

[6] Harminc M., Ivanro J. *Note on Eccentricities in Tournaments* // Graphs and Combinatorics. – 1994. – Vol. 10. – P. 231–234.

[7] Шабаркова А.О. *Об одном классе простых турниров* // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019». М.: МАКС Пресс. 2019.

[8] Шабаркова А.О. *О турнирах с диаметром n-2* // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020» : Второе издание: переработанное и дополненное. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/data/19359/117212_uid340811_report.pdf

Relation between the simplicity of a tournament and various values of its diameter

Alexandra O. Shabarkova, Mikhail B. Abrosimov

Annotation — One of the most important types of graphs are tournaments, as they find practical application in many areas of our lives. Recall that a tournament is a complete oriented graph, that is, a directed graph, between each pair of its vertices there is a single arc, and there is a loop at each vertex. Like many algebraic objects, tournaments are made up of smaller elements. All the variety of their types allows us to describe such a structure as a congruence. The study of congruencies is of great interest, since knowledge of the scheme for constructing specific types of tournaments that have certain properties, such as, for example, the size of the diameter and simplicity, greatly simplifies the use of tournaments in practice, since it will be possible to build the necessary graph from scratch, and not check all known until the right one is found. Of great interest are simple tournaments, that is, tournaments whose congruence lattice consists of two elements. Taking into account the multiply increasing number of tournaments with the growth of dimension, the existence of a construction scheme will give a significant acceleration when choosing a tournament with given properties.

This paper describes tournaments that have an infinite diameter, as well as diameters *n* – 1 and *n* – 2. The structure of such tournaments is considered, and the question of their simplicity is investigated. It is proved that all *n*-vertex tournaments with diameter *n* – 1 are simple, but all tournaments with infinite diameter are not simple. Among tournaments with diameter *n – 2*, there are both simple and not simple tournaments.

Key words — tournament, tournament congruence, tournament lattice, simple tournament, diameter.

REFERENCES

[1] A. M. Bogomolov, V. N. Salii, *Algebraic foundations of the theory of discrete systems*. M.: Nauka, 1997 (In Russian).

[2] Fried E., Lakser H. *Simple tournaments* // Notices Amer. Meth. Soc., 1971, vol. 18, p. 395.

[3] Erdös P., Fried E., Hajnal A., Milner E.C. *Some remarks on simple tournaments* / Algebra universalis, 1972, vol. 2, №. 2, pp. 238-245.

[4] Moon J.W. *Embedding tournaments in simple tournaments* // Discrete Math., 1972, vol. 2, № 4, pp. 389–395.

[5] Moon J. W. *Topics on Tournamtens*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968, 148 p.

[6] Harminc M., Ivanro J. *Note on Eccentricities in Tournaments* // Graphs and Combinatorics, 1994, vol. 10, pp. 231–234.

[7] Shabarkova A.O. *About one class of simple tournaments* // Materials of the International Youth Scientific Forum "Lomonosov-2019". Moscow: MAKS Press, 2019. (In Russian)

[8] Shabarkova A.O. *О турнирах с диаметром n-2* // Materials of the International Youth Scientific Forum "Lomonosov-2020". Moscow: MAKS Press, 2020. [Online]. Available: https://lomonosov-msu.ru/archive /Lomonosov_2020_2/data/19359/117212_uid340811_report.pdf (In Russian)