

# Влияние нелинейного коэффициента фильтрации функции напора в водоносном горизонте

И.В. Калиберда, А.Б. Чернышев

**Аннотация**—Проблема практической реализации теории систем управления состоит в том, что реальные объекты чаще всего не являются линейными и их модели не могут быть адекватно представлены в виде систем линейных уравнений. Для нелинейных систем, в свою очередь, не существует единых и точных методов их анализа и реализации. На примере математической модели гидрогеологического объекта рассматриваются нелинейные величины коэффициентов фильтрации в горизонте грунтовых вод. Система управления приобретает нелинейный характер, когда коэффициент фильтрации представляется функцией, аргументом которой является время. Учитывая колебательный характер изменения коэффициента фильтрации относительно времени, функция приобретает конкретный вид и может быть использована для построения функции напора во времени. Метод реализован с помощью компьютерной программы определения динамических характеристик гидrolитосферного процесса при реализации опытно-фильтрационных работ, позволяющей создавать графики реакции объекта в установившемся режиме. С помощью полученной модели процесса определяется установившееся значение функции напора.

**Ключевые слова**—нелинейные сосредоточенные системы; коэффициент фильтрации; горизонт грунтовых вод.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование и математическое описание нелинейных систем, содержащих распределенные параметры, представляет собой значительные трудности [1, 2]. Известно, что нелинейная система содержит, по крайней мере одно звено, описываемое нелинейным уравнением. При практической реализации теории систем управления зачастую упускается то, что реальные объекты не являются линейными и их модели не могут быть адекватно представлены в виде систем линейных уравнений. Как правило такие системы описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями [3, 4]. Во многих случаях является неприемлемой известная процедура линеаризации таких систем. Наиболее разработана

методика анализа и синтеза данного класса систем, которая относится к системам с одним нелинейным элементом.

Нелинейные элементы делятся на аналитические и неаналитические. Особенность нелинейных систем управления состоит в том, что устойчивый переходный процесс может стать неустойчивым, например, при изменении входного сигнала [5]. Поэтому, не существует единых и точных методов анализа и реализации нелинейных систем. Не разработан единый математический аппарат, и для каждой конкретной задачи, описываемой нелинейной системой дифференциальных уравнений, разработчики вынуждены находить свои методы.

## II. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Учитывая нестационарное движение с инфильтрационным питанием, применительно к гидрогеологическому объекту, возьмем за основу дифференциальное уравнение Буссинеска. Рассмотрим математическую модель водоносного пласта, из которого осуществляется водоотбор. Для описания гидродинамических процессов используем трехмерную математическую модель. В модели рассмотрим водоносный пласт грунтовых вод. Так как горизонтальное течение воды отсутствует, то система уравнений принимает вид:

$$\eta \cdot \frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где:  $\eta$  – параметр упругости пласта, 1/м;

$k_x$  – фильтрация по  $x$ , м/сут;

$k_y$  – фильтрация по  $y$ , м/сут;

$k_z$  – фильтрация по  $z$ , м/сут;

$H$  – давление воды в пласте, м.

Так как коэффициенты фильтрации по каждой из координат и параметр упругости пласта считаются постоянными, то описывается линейный процесс водоотбора из водоносного пласта. В реальности эти коэффициенты могут менять свои значения как с течением времени процесса, так и по пространственным координатам. Также нелинейными могут быть и условия краевой задачи. Следовательно, необходим учет нелинейных величин.

Для нашей модели рассмотрим ситуацию, когда один из коэффициентов переходной функции является нелинейным [6]. Предположим, что коэффициент фильтрации в процессе управления напором изменяется с течением времени. В качестве объекта возьмем один

Статья получена 17 января 2022.

И.В. Калиберда – Пятигорский институт (филиал) «Северо-Кавказский федеральный университет» (e-mail: kaliberdaigor@yandex.ru)

А.Б. Чернышев - Пятигорский институт (филиал) «Северо-Кавказский федеральный университет» (e-mail: chalbor@rambler.ru)

прямоугольный пласт (рис. 1).

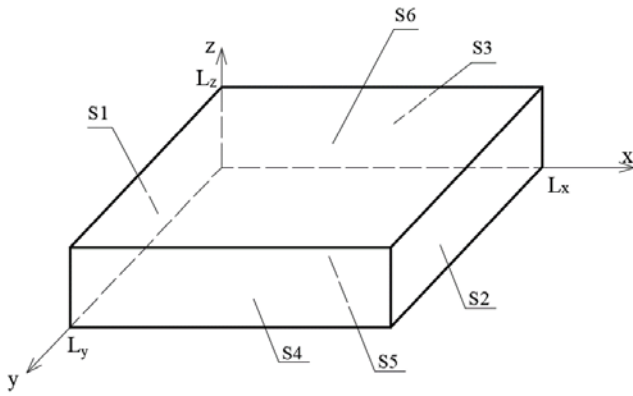


Рис. 1: Схематическое представление объекта

Математическая модель описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \cdot \left( \frac{\partial(k_x \partial H)}{\partial x^2} + \frac{\partial(k_y \partial H)}{\partial y^2} + \frac{\partial(k_z \partial H)}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

С учетом закона Дарси о неразрывности движения, условия на границах водоносного пласта будут иметь вид:

$$\begin{aligned} S1: k_x \cdot \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial x} &= 0, \\ S2: k_x \cdot \frac{\partial H(L_x, y, z, t)}{\partial x} &= k_{x-1} \cdot \frac{\partial H(L_{x-1}, y, z, t)}{\partial x}, \\ S3: k_y \cdot \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial y} &= k_y \cdot \frac{\partial H(x, L_y, z, t)}{\partial y}, \\ S4: k_y \cdot \frac{\partial H(x, L_y, z, t)}{\partial y} &= k_{y-1} \cdot \frac{\partial H(x, L_{y-1}, z, t)}{\partial y}, \\ S5: k_z \cdot \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial z} &= k_z \cdot \frac{\partial H(x, y, L_z, t)}{\partial z}, \\ S5: k_z \cdot \frac{\partial H(x, y, L_z, t)}{\partial z} &= k_{z-1} \cdot \frac{\partial H(x, y, L_{z-1}, t)}{\partial z}, \\ x=0, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad 0 \leq z \leq L_z, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Для определения динамических характеристик месторождения минеральных вод необходима дискретная модель объекта.

При этом на модели выбираются две точки дискретизации по пространственным координатам: первая точка с координатами добывающей скважины; вторая – контрольной скважины, в которой измеряется функция выхода. Схема дискретизации представлена на рис. 2.

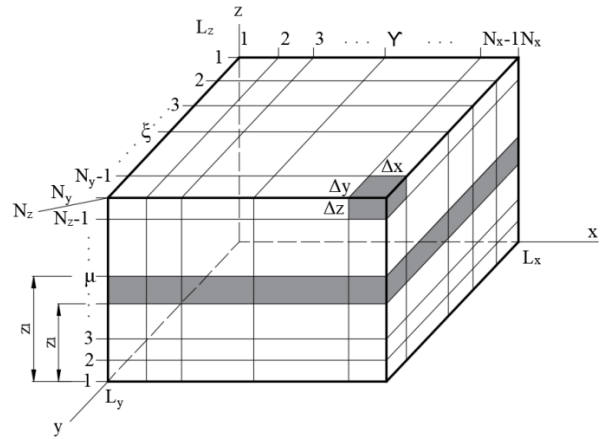


Рис. 2: Схема дискретизации

Приводя исследуемую модель в дискретный вид, используя метод конечных разностей, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)}{\partial t} &= \Delta t \cdot \frac{1}{\eta} \times \\ &\times \left( k_x \cdot \frac{H(\alpha-1, \beta, \gamma, \lambda) - 2 \cdot H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) + H(\alpha+1, \beta, \gamma, \lambda)}{\Delta x^2} + \right. \\ &+ k_y \cdot \frac{H(\alpha, \beta-1, \gamma, \lambda) - 2 \cdot H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) + H(\alpha, \beta+1, \gamma, \lambda)}{\Delta y^2} + \\ &+ k_z \cdot \frac{H(\alpha, \beta, \gamma-1, \lambda) - 2 \cdot H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) + H(\alpha, \beta, \gamma+1, \lambda)}{\Delta z^2} \left. \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где:  $N_x$  – количество точек по  $x$ ;  
 $N_y$  – количество точек по  $y$ ;  
 $N_z$  – количество точек по  $z$ ;  
 $\alpha, \beta, \gamma$  – пространственные координаты.

Для описания динамики процесса рассматриваемого объекта необходимы физические параметры месторождения, которые определяются в ходе опытно-фильтрационных работ. Геометрические параметры моделируемого объекта приведены в таблице 1.

Таблица 1. Геометрические параметры объекта

Параметр	Обозначения	Размер, м
Протяженность моделируемой области по $x$	$L_x$	2000
Протяженность моделируемой области по $y$	$L_y$	2000
Ширина пласта по $z$	$L_z$	39
Организация водозабора добывающей скважины	$Z$	37,63
Расстояние от возмущающей скважины до измеряемой точки	$\Delta x$	121

По данным геологоразведочных работ были определены численные значения физических параметров, представленные в таблице 3.

Таблица 3. Физические параметры объекта (водоносного горизонта)

Параметр	Размерность	Размер
Средний дебит, $Q$	м <sup>3</sup> /сут	250
Упругость пласта, $\eta$	1/м	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Удельное понижение добывающей скважины, $K_1$	доли ед.	0,0207
Коэффициент гидравлического взаимодействия скважин, $K_2$	доли ед.	0,00213
Коэффициент фильтрации по координате $x$ , $k_x$	м/с	0,24/86400
Коэффициент фильтрации по координате $y$ , $k_y$	м/с	0,24/86400
Коэффициент фильтрации по координате $z$ , $k_z$	м/с	0,14/86400

Определение сегментов дискретизационной сетки ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ) и значения переменных ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ ) на примере месторождения подробно описаны в работе автора [7].

При помощи компьютерного моделирования, при значениях  $L_x=2000$ ,  $L_y=2000$ ,  $L_z=100$  и  $k=0.05 \div 0.4$ , можно получить графики переходного процесса для функции напора, в результате чего обнаруживается значительное влияние изменения коэффициента  $k$ . При его уменьшении, значение функции  $H$ , когда процесс установился, возрастает вместе со временем достижения данного состояния. В случае увеличения коэффициента  $k$  происходит обратный процесс.

С учетом того, что значение  $k$  меняется во времени в течение процесса, его можно представить, как функцию аргументом которой является время. Более того, коэффициент фильтрации может быть различным в разных точках пространственной координаты к которой он относится. Следует также отметить, что для каждой из координат коэффициенты фильтрации в общем случае различны. Таким образом, в целях наиболее адекватного представления модели процесса, коэффициенты фильтрации следует рассматривать как функции пространственных координат и времени. В результате такого представления систему управления приобретает нелинейный характер [8, 9]. Рассмотрим ситуацию, когда коэффициенты фильтрации совпадают, для каждой пространственной оси координат. При этом коэффициент изменяется во времени. Представим нелинейный коэффициент фильтрации ( $k'$ ) в виде функции следующего вида:

$$k' = A + B \cdot \sin(C \cdot t), \quad (4)$$

где:  $t$  – время, сут. ( $0 \leq t \leq 180$ );

$A$  – смещение, м;

$B$  – амплитуда, м;

$C$  – частота, 1/сут.

Из выражения (4) видно, что изменение  $k'$  представляет собой колебательный характер по времени.

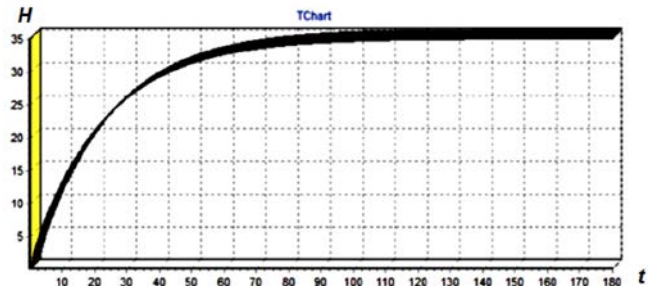
С учетом нелинейности  $k'$  функцию напора ( $H_1$ ) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \cdot \left( \frac{\partial((A + B \cdot \sin(C \cdot t)) \cdot \partial H_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial((A + B \cdot \sin(C \cdot t)) \cdot \partial H_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial((A + B \cdot \sin(C \cdot t)) \cdot \partial H_1)}{\partial z^2} \right). \quad (5)$$

Используя количественные показатели начальных условий, возможно получить результат по выражению (5).

### III. РЕЗУЛЬТАТ

Применяя компьютерное моделирование, используя значения для данного объекта:  $A=0,3$ ;  $B=0,25$ ;  $C=0,1$ , получим график, иллюстрирующий функцию напора в момент переходного процесса (рис. 3).

Рис. 3: График функции  $H_1$ 

По графику видно, что значение функции напора, равное 35 м, достигается при времени 120 ед. На основании результатов можно сделать вывод, что введение нелинейного элемента позволило оценить переходной процесс функции напора, учитывающий изменение коэффициента фильтрации математической модели водоносного пласта.

### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена методика решения нелинейной систем управления применительно к гидрогеологическому объекту. Учтен колебательный характер изменения коэффициента фильтрации относительно времени, который использован для построения функции напора. С помощью полученной модели процесса определяется установившееся значение функции напора. Практическое применение метода возможно в решении задач управления дебитом добывающей скважины, представляющей замкнутую систему.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Малков А.В., Першин И.М. Синтез распределенных регуляторов для систем управления гидротитосферными процессами. М.: Научный мир, 2007. 256 с.
- [2] Малков А.В., Першин И.М. Системы с распределенными параметрами. Анализ и синтез. М.: Научный мир, 2012. 476 с.

- [3] Першин И.М. Синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: Изд. РИА-КМВ, 2002. 212 с.
- [4] Чернышев А.Б., Могилевская Е.В., Гайворонская Н.А. Анализ распределенных объектов, заданных в структурном представлении. // Научное обозрение. 2014. № 5. С. 180-184.
- [5] Чернышев А.Б., Кравцова А.Л., Соха Е.Ю. Анализ устойчивости процесса стабилизации температурного поля нелинейной распределённой системы // Автоматизация. Современные технологии. 2014. № 9. С. 16-21.
- [6] Соха Е.Ю. Чернышев А.Б. Напалкин М.Ю. Моделирование распределенной функции напора в водоносном горизонте при нелинейном коэффициенте фильтрации // Современная наука и инновации. 2017. №1. С.56-61.
- [7] Калиберда И.В. Разработка дискретной модели гидрогеологического объекта на примере месторождения «Верхнеберезовская площадь» // *Cognitio rerum*. 2021. №9. С.13-18.
- [8] Chernyshev A.B., Martirosyan K. V., Martirosyan A. V. Analysis of the nonlinear distributed control system's sustainability // *Journal of Mathematics and Statistics*. 2014. T.10. № 3. С. 316-321.
- [9] Chernyshev A.B. Challenges of implementing distributed systems with discrete control actions // *Eastern European Scientific Journal*. 2013. № 2. С. 183-188.

# Influence of the nonlinear filtration coefficient of the head function in the aquifer

Igor V. Kaliberda, Alexander B. Chernyshev

**Abstract**— The problem of practical implementation of the theory of control systems is that real objects are most often not linear and their models cannot be adequately represented in the form of systems of linear equations. For nonlinear systems, in turn, there are no uniform and accurate methods for their analysis and implementation. Using the example of a mathematical model of a hydrogeological object, nonlinear values of filtration coefficients in the groundwater horizon are considered. The control system acquires a nonlinear character when the filtration coefficient is represented by a function whose argument is time. Taking into account the oscillatory nature of the change in the filtration coefficient relative to time, the function takes on a specific form and can be used to construct a pressure function in time. The method is implemented using a computer program for determining the dynamic characteristics of the hydrolithospheric process during the implementation of experimental filtration work, which allows you to create graphs of the reaction of an object in a steady-state mode. With the help of the obtained process model, the steady-state value of the pressure function is determined.

**Keywords**—nonlinear concentrated systems; filtration coefficient; groundwater horizon.

[9] Chernyshev A. B. Challenges of implementing distributed systems with discrete control actions. //Eastern European Scientific Journal. 2013. № 2. S. 183-188.

## REFERENCES

- [1] Malkov A. V., Pershin I. M. Sintez raspredelennykh regulyatorov dlya sistem upravleniya gidrolitosfernymi protsessami. M.: Nauchnyy mir, 2007. 256 s.
- [2] Malkov A. V., Pershin I. M. Sistemy s raspredelennymi parametrami. Analiz i sintez. M.: Nauchnyy mir, 2012. 476 s.
- [3] Pershin I. M. Sintez sistem s raspredelennymi parametrami. Pyatigorsk: Izd. RIA-KMV, 2002. 212 s.
- [4] Chernyshev A. B., Mogilevskaya E. V., Gayvoronskaya N. A. Analiz raspredelennykh ob`ektov, zadannykh v strukturnom predstavlenii. // Nauchnoe obozrenie. 2014. № 5. S. 180-184.
- [5] Chernyshev A. B., Kravtsova A. L., Sokha E. Yu. Analiz ustoychivosti protsessa stabilizatsii temperaturnogo polya nelineynoy raspredelennoy sistemy // Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii. 2014. № 9. S. 16-21.
- [6] Soha E. Ju. Chernyshev A. B. Napalkin M. Ju. Modelirovanie raspredelennoj funktsii napora v vodonosnom gorizonte pri nelinejnom koefitsiente fil'tracii // Sovremennaja nauka i innovatsii. 2017. №1. S.56-61.
- [7] Kaliberda I.V. Razrabotka diskretnoj modeli gidrogeologicheskogo ob`ekta na primere mestorozhdeniya «Verxneberezhovskaya ploshhad'» // Cognition rerum. 2021. №9. S.13-18.
- [8] Chernyshev A. B., Martirosyan K. V., Martirosyan A.V. Analysis of the nonlinear distributed control system's sustainability // Journal of Mathematics and Statistics. 2014. T.10. № 3. S. 316-321.