МИНИМИЗАЦИЯ РИСКА ПРИ КРУПНЫХ ЗАКУПКАХ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

Морозов В.В., Толли Н.И.

Аннотация — **При необходимости совершения серии сделок на рынке, движимом заявками, возникает риск движения цены в неблагоприятную сторону, что приводит к необходимости учитывать влияние уже совершенных сделок на будущую цену, которое особенно заметно при транзакциях большого объема. В данной статье рассматриваются две модели изменения цены на рынке и для них ставится и решается задача минимизации отклонения величины затрат от ожидаемого среднего значения.**

Ключевые слова — **рынок, движимый заявками; крупные закупки; минимизация риска; функция Лагранжа.**

I. Введение

Крупная закупка на рынке некоторого актива приводит к значительному увеличению его стоимости, поскольку число продавцов с низкими ценами ограничено. Это приводит к необходимости учитывать влияние совершенных сделок на будущую стоимость актива.

В данной работе рассматривается модель Бертсима и Ло [1] влияния крупных закупок на стоимость актива. Решается задача минимизации дисперсии величины затрат, возникающих при крупных закупках в условиях заданного ограничения на среднюю величину этих затрат. Эта задача аналогична задаче Марковица [2], состоящей в минимизации дисперсии доходности финансового портфеля при ограничении на его среднюю доходность. Но, в отличие от последней, она содержит нелинейное ограничение.

Мы будем рассматривать динамику изменения цены на рынке, движимом заявками, который представляется в книге лимитированных заявок – множества заявок на покупку и продажу, доступных в данный момент. Каждая заявка в книге содержит информацию о своей цене и соответствующем объеме. При сделке объема V происходит исполнение лучших (по цене) заявок суммарным объемом V , т.е. данные заявки изымаются из книги заявок. В любой момент времени игроки могут выставлять и снимать свои заявки по усмотрению

Статья получена 30 мая 2014 и представляет собой один из результатов магистерской диссертации «Минимизация затрат при крупных покупках на финансовом рынке».

Толли Николай Игоревич – магистрант 2 года обучения кафедры исследования операций, факультет ВИК, МГУ им. М.В. Ломоносова (e-mai: tolli_nick@mail.ru)

Морозов Владимир Викторович – доцент кафедры исследования операций, факультет ВИК, МГУ им. М.В. Ломоносова(e-mail: vmorosov@mail.ru)

При рассмотрении задач, связанных с управлением портфелем важным является понятие ликвидности, которое должно закладываться в закон изменения цены актива на рынке. Четкого определения для данного термина не существует. Одна из популярных точек зрения на природу ликвидности приводится в работе Кайла[3]. Для измерения ликвидности он вводит 3 характеристики:

Сжатость – затраты на открытие и закрытие позиции за короткий период времени. Например, это может быть разность между лучшей ценой покупки и лучшей ценой продажи

Глубина – минимальный объем сделки, который ведет к сдвигу цены. Для рынка, движимого заявками глубина определяется объемом лучшей заявки в книге лимитированных заявок.

Релаксация – способность цен возвращаться в нормальное состояние после возмущения, не вызванного приходом новой информации.

II. Постановка ЗАДАЧИ

Рассмотрим инвестора, стремящегося к приобретению актива в большом объеме (количестве) X_0 в течение фиксированного временного отрезка $[0,T]$. Будем рассматривать дискретную модель, при которой покупки совершаются в моменты времени $t=0,1,...,T$. Покупка всего объема X_0 единовременно приводит к большим затратам. Более эффективной стратегией будет разбить объем X_0 на части и разнести покупки на весь временной отрезок $[0,T]$. Определим закон изменения стоимости актива P_t. Он включает в себя две компоненты: динамику P_t в отсутствие на рынке рассматриваемого инвестора и влияние собственных покупок инвестора на рыночную стоимость актива. Обозначим через x_t количество актива, приобретаемого в момент времени t по цене P_t. При этом для вектора переменных $x=(x_0,...,x_T)$ выполнено ограничение $\sum_{t=0}^{T} x_t = X_0$. Тогда закон изменения цены можно записать в виде

$$P_t = P_{t-1} + \alpha x_t + u_t,\ t=0,1,...,T,$$

где P_{-1} - стоимость актива, сложившаяся на рынке к моменту начала торгов, $\alpha>0$ - коэффициент влияния покупки актива, а u_t, $t=1,...,T$, - независимые, одинаково распределенные случайные величины, имеющие математические ожидания $\mathrm{E}(u_t)=0$ и дисперсии и $\mathrm{Var}(u_t)=\delta^2$. Случайные величины u_t возникают с момента $t=1$ вследствие наличия на рынке спекулятивных сделок с активом.

Закон изменения стоимости акции можно переписать в виде

$$P_t = P_{-1} + \alpha\sum_{i=0}^{t} x_i + \sum_{i=1}^{t} u_i,\ t=0,1,...,T$$

Затраты на приобретение актива задаются величиной

$$c(x)=\sum_{t=0}^{T} P_t x_t = P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t} x_i)x_t + \sum_{t=1}^{T}(\sum_{i=1}^{t} u_i)x_t$$

Множество стратегий инвестора зададим следующим образом:

$$\mathrm{X}_1 = \{x=(x_0,...,x_T) \mid \sum_{t=0}^{T} x_t = X_0,$$
$$\mathrm{E}[c(x)] = c_0,\ x_t \ge 0,\ t=1,...,T\}$$

где c_0 - заданные средние затраты. Тогда задачу оптимизации можно записать в виде

$$\min_{x\in \mathrm{X}_1} \mathrm{Var}[c(x)] = \mathrm{Var}[c(x^0)] \qquad (1)$$

III. Решение задачи

Изменим порядок суммирования в двойных суммах величины c:

$$c(x) = P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T}(\sum_{t=i}^{T} x_t)x_i + \sum_{i=1}^{T}(\sum_{t=i}^{T} x_t)u_i$$

Введем переменные

$$X_i = X_0 - \sum_{t=0}^{i-1} x_t,\ i=1,...,T.$$

По смыслу X_i определяет количество актива, которое необходимо приобрести, начиная с шага i. Положим $X_{T+1}=0$. В новых переменных $c(x)$ перепишем в виде

$$c(x) = P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T} X_i(X_i - X_{i+1}) + \sum_{i=1}^{T} X_i u_i.$$

Отсюда находим, что

$$\mathrm{E}[c(x)] = P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T} X_i(X_i - X_{i+1}),\ \mathrm{Var}[c(x)] = \delta^2\sum_{i=1}^{T} X_i^2.$$

Множество стратегий инвестора примет вид

$$\mathrm{X}_1 = \left\{ \begin{array}{l} x=(x_0,...,x_T) \mid \sum_{t=0}^{T} x_t = X_0, \\ \mathrm{E}[c(x)] = c_0,\ x_t \ge 0,\ t=1,...,T \end{array} \right\}$$

Без потери общности положим $\delta=1$ и задачу (1) перепишем так:

$$\min_{(X_1,...,X_T)\in \mathrm{X}_1'} \sum_{i=1}^{T} X_i^2 = \sum_{i=1}^{T} (X_i^0)^2. \qquad (2)$$

Запишем функцию Лагранжа для задачи с одним ограничением равенства:

$$L(X_1,...,X_n,\lambda) = \sum_{i=1}^{T} X_i^2 + \lambda\left(P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T}(X_i - X_{i+1})X_i - c_0\right).$$

Из необходимых условий оптимальности первого порядка получаем

$$\frac{\partial L}{\partial X_t} = 2X_t + \alpha\lambda(X_{t-1} + 2X_t - X_{t+1}) = 0,\ t=1,...,T \qquad (3)$$

Пусть $\omega = \frac{1}{\alpha\lambda}+1$. Тогда из системы (3) получаем разностное уравнение

$$2\omega X_t = X_{t-1} + X_{t+1} \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде $X_t = \xi^t$, $t=1,...,T$. После подстановки получим уравнение $\xi^2 - 2\omega\xi + 1 = 0$ с корнями $\xi_{1,2} = \omega \pm \sqrt{\omega^2-1}$.

Для того чтобы корни были действительными и различными, необходимо чтобы $\omega>1$ или $\lambda>0$. При этом $\xi_2 < 1 < \xi_1$. Общее решение уравнения (4) имеет вид $X_t = C_1\xi_1^t + C_2\xi_2^t$, где константы C_1 и C_2 можно найти из граничных условий, заданных в виде: $X_{T+1} = C_1\xi_1^{T+1} + C_2\xi_2^{T+1} = 0,\quad X_0 = C_1 + C_2 = X_0$. Откуда

$$X_t = X_0\frac{\xi_2^t - (\xi_2/\xi_1)^{T+1}\xi_1^t}{1-(\xi_2/\xi_1)^{T+1}},\ t=1,...,T. \qquad (5)$$

Далее для решения системы (3) необходимо подставить все X_t в ограничение-равенство и найти численно уравнение относительно переменной λ. Заметим, что найденное решение (5) монотонно убывает по t. Для проверки достаточно убедиться в том, что производная выражения (5) по t отрицательна. Отсюда следует, что (5) является оптимальным решением задачи (2).

IV. Числовой пример

Пусть инвестору необходимо приобрести $X_0 = 10000$ акций, стоимость которых изменяется по закону $P_t = 2 + 0,001x_t + u_t$. Среднюю величину затрат возьмем равной $c_0 = 90000$. Рассмотрим различные решения задачи в зависимости от параметра T приведены в таблице.

T	10	9	8	7	6	5	4	3	2
λ	2625	2625	2625	2625	2626	2631	2653	2768	3648
x0	5714	5714	5714	5714	5714	5715	5718	5736	5833
x1	2449	2449	2449	2449	2449	2450	2456	2487	2658
x2	1050	1050	1050	1050	1050	1053	1065	1133	1509
x3	450	450	450	450	450	456	486	644	0
x4	193	193	193	193	196	208	275	0	0
x5	83	83	83	84	90	118	0	0	0
x6	35	36	36	38	51	0	0	0	0
x7	15	15	16	22	0	0	0	0	0
x8	6	6	9	0	0	0	0	0	0
x9	3	4	0	0	0	0	0	0	0
x10	2	0	0	0	0	0	0	0	0

Как видно из примера, с течением времени закупки актива убывают.

V. Закон изменения цены с дополнительной информацией

Пусть закон изменения цены актива линеен по x_t, но теперь дополнительно введем новую переменную y_t как серийно коррелирующую переменную состояния, которая также влияет на цену изменения актива линейно, следовательно

$$P_t = P_{t-1} + \alpha x_t + \beta y_t + u_t, \alpha > 0$$
$$y_t = \rho y_{t-1} + z_t, \rho \in (-1,1)$$

где u_t и z_t - независимые процессы белого шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией δ_u^2 и δ_z^2 соответственно.

Наличие y_t в законе изменения цены актива P_t описывает потенциальное воздействие изменения рыночных условий или воздействие конфиденциальной информации о надежности актива. Например, y_t может быть доходностью индекса $S\&P500$, общей составляющей цены на большинство акций. Обширные изменения рынка влияют на все ценные бумаги в некоторой степени, и β является мерой чувствительности влияния данной конкретной конфиденциальной информации на изменение рынка.

Для решения задачи (1) в рамках модели с линейным законом изменения цены с дополнительной информацией запишем формулу для величины затрат, подставив в нее новый закон изменения цены:

$$c(x) = P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T}(\sum_{t=i}^{T}x_t)x_i + \sum_{i=1}^{T}(\sum_{t=i}^{T}x_t)u_i + \beta\sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t}(\sum_{j=0}^{t-i}\rho^i)z_i)x_t + \sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t}\beta y_{-1}\rho^{i+1})x_t$$

Используя переменные X_i выражение можно переписать в виде:

$$c(x) = P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T}X_i(X_i - X_{i+1}) + \sum_{i=1}^{T}X_i u_i + \beta\sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t}(\sum_{j=0}^{t-i}\rho^i)z_i)(X_t - X_{t+1}) + \sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t}\beta y_{-1}\rho^{i+1})(X_t - X_{t+1})$$

Отсюда находим, что

$$\mathrm{E}[c(x)] = P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T}X_i(X_i - X_{i+1}) + \sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t}\beta y_{-1}\rho^{i+1})(X_t - X_{t+1}),$$

$$\mathrm{Var}[c(x)] = \delta_u^2\sum_{i=1}^{T}X_i^2 + \delta_z^2\beta\sum_{i=o}^{T}(\sum_{j=0}^{i}\rho^j)(X_i - X_{i+1})$$

Множество стратегий инвестора примет вид

$$\mathrm{X}_2' = \left\{\begin{matrix}(X_1,...,X_T) \mid X_0 \geq X_1 \geq ... \geq X_T \geq 0, \\ P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{t=0}^{T}(X_t - X_{t+1})X_t + \sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t}\beta y_{-1}\rho^{i+1})(X_t - X_{t+1}) = c_0\end{matrix}\right\}$$

Без потери общности положим $\delta_u = \delta_z = 1$ и задачу (1) перепишем так:

$$\min_{(X_1,...,X_T)\in X_2'}\sum_{i=1}^{T}X_i^2 + \beta\sum_{i=o}^{T}(\sum_{j=0}^{i}\rho^j)(X_i - X_{i+1}) = = \sum_{i=1}^{T}(X_i^0)^2 + \beta\sum_{i=o}^{T}(\sum_{j=0}^{i}\rho^j)(X_i^0 - X_{i+1}^0) \quad (5)$$

Запишем функцию Лагранжа для задачи с одним ограничением-равенством:

$$L(X_1,...,X_n,\lambda) = \sum_{i=1}^{T}X_i^2 + \beta\sum_{i=o}^{T}(\sum_{j=0}^{i}\rho^j)(X_i - X_{i+1}) + \lambda\left(P_{-1}X_0 + \alpha\sum_{i=0}^{T}(X_i - X_{i+1})X_i + \sum_{t=0}^{T}(\sum_{i=0}^{t}\beta y_{-1}\rho^{i+1})(X_t - X_{t+1}) - c_0\right)$$

Из необходимых условий оптимальности первого порядка получаем

$$\frac{\partial L}{\partial X_t} = 2X_t + \alpha\lambda(X_{t-1} + 2X_t - X_{t+1}) + \beta\rho^t(1 + y_{-1}\rho) = 0,\ t = 1,...,T$$

По аналогии с первой моделью получаем разностное уравнение, но в данном случае это уже будет неоднородное уравнение

$$2\omega X_t = X_{t-1} + X_{t+1} + \beta\rho^t(1 + y_{-1}\rho) \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой неоднородное разностное уравнение, для его решения необходимо решить однородное для нахождения частного решения и затем найти коэффициенты для получения общего решения неоднородного уравнения. Таким образом, мы получим решение задачи (5). А зная его можно легко найти решение исходной задачи (1) для случая закона изменения цены с дополнительной информацией, путем обратной замены переменных.

VI. Заключение

В работе Андреева [4] приводится достаточно полный анализ существующих моделей изменения цены, с учетом характеристик, заданных Кайлом. Согласно этому анализу, модель Бертсима и Ло является одной из простейших на текущий момент, т.к. в ней имеется предположение о бесконечной глубине рынка и отсутствует релаксация цены. Одной из наиболее популярных моделей является модель Обижаевой и Ванна [5], которая учитывает релаксацию лучшей цены. Основной целью данной работы была постановка новой оптимизационной задачи для крупных закупок, т.к. наиболее популярной является задача по оптимизации затрат путем минимизации их ожидаемого среднего значения, при заданном объеме сделки. Т.е. задача с линейным ограничением. В задаче оптимизации риска присутствует нелинейное ограничение, что делает ее более интересной.

В дальнейшем было бы интересно решить данную задачу для более сложных моделей изменений цены и проанализировать, как будет меняться оптимальная стратегия инвестора при применении более сложных моделей динамики изменения цены.

Библиография

[1] Bertsimas, Dimitris, and Andrew W. Lo. Optimal control of execution costs // Journal of Financial Markets, 1998, № 1, P. 1–50.

[2] Markowitz H.M. Portfolio selection // Journal of Finance. 1952. V. 7.

[3] Kyle A. Continuos auctions and insider trading // Econometrica/ - 1985. - №53. – pp. 1315-1336

[4] Андреев Н.А. Современные математические модели влияния на цену: приложение к задаче оптимального управления портфелем на рынке, движимом заявками. // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. Выпуск 9. 2012

[5] Obizhaeva A., Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics - 2005. - Available at: http://www.nber.org/papers/w11444

Risk minimization of large purchases in the financial market

Morozov V.V., Tolli N.I.

***Abstract* — In the case of a series of transactions in the order-driven market, there is a risk of price movement in an unfavorable direction, which leads to the need to consider the impact of already completed transactions on the future price, which is especially noticeable when a large transactions. This article discusses two models of price changes on the market. It poses and solves for them the problem of minimizing the deviation from the expected cost values mean value.**

***Key words* — order-driven market; large purchases; risk minimization; Lagrange function.**