Минимальные расширения цветных звездных графов

Михаил Б. Абросимов, Петр В. Разумовский

Аннотация—**Данная работа является продолжением исследований по построению минимальных вершинных и реберных расширений для цветных неориентированных графов и содержит результаты по поиску минимальных расширений для цветных звездных графов. Граф G^* называется вершинным (реберным) k-расширением графа G, если после удаления любых k вершин (ребер) из графа G^* в получившийся граф можно вложить исходный граф G. Вершинное расширение графа G называется минимальным, если оно содержит минимально возможное число дополнительных вершин и ребер. Реберное расширение графа G называется минимальным, если оно содержит столько же вершин, сколько и граф G, и минимально возможное число дополнительных ребер. В большинстве работ в основном изучаются минимальные расширения графов без цветов. Если рассматриваются цветные графы, то вложение подразумевается с учетом цветов. Звездным графом или звездой называется полный двудольный граф, с единственной вершиной в одной доле. Ранее задача построения минимальных вершинных и реберных расширений была решена для обычных звезд. В данной статье дается полное решение для цветных звезд. Для всех возможных минимальных реберных и вершинных расширений графов данного класса представлены соответствующие схемы построения расширений с доказательствами. Также указывается количество дополнительных ребер, необходимых для удовлетворения требованиям минимальности расширения.**

Ключевые слова—**вершинные расширения графов, звездные графы, минимальные расширения графов, расширения цветных графов, реберные расширения графов, цветные графы, отказоустойчивость.**

I. Введение

Отказоустойчивость является одним из наиболее важных свойств при построении гарантоспособной технической системы. Весомым вкладом в развитие идеи отказоустойчивости систем стало ее переложение на модель графов, предложенное Дж. Хейзом [1]. Исследуя задачу полного отказа элемента, при котором элемент полностью удаляется из системы, Хейзу удалось привести систему, состоящую из различных элементов к графу с вершинами, где полный отказ трактовался как удаление вершины из графа. Им были предложены методы построения -отказоустойчивой реализации, при которой система способна продолжать работу в случае отказа k элементов.

В 90-х годах известный американский математик Фрэнк Харари совместно с Джоном Хейзом обобщили модель на случай отказов связей между элементами, предложив понятие реберной отказоустойчивости [2]. Позднее было предложено использовать термины «вершинное расширение графа» и «реберное расширение графа» соответственно [3].

Отдельной задачей является построение неизоморфных цветных графов и их расширений. Решение подобной задачи позволит конструировать отказоустойчивые технические системы с комбинацией элементов различных типов. Первыми результатами исследования заданной проблемы стали алгоритмы построения всех неизоморфных цветных графов заданного количества вершин, ребер и цветов [4].

Логичным развитием идеи стал поиск минимальных вершинных и реберных расширений для найденных неизоморфных цветных графов. В контексте поставленной задачи был разработан алгоритм поиска всех неизоморфных минимальных расширений для заданного цветного графа. Результаты были отображены в работе [5]. Цветные минимальные расширения, полученные после запуска реализации данного алгоритма позволили проанализировать различные классы графов и найти для них общую схему построения.

Данная работа содержит схемы построения минимальных вершинных и реберных расширений для цветных звездных графов всех возможных конфигураций. Заметим, что для простых неориентированных графов задача полностью решена в работах [6, 7], а для ориентированных графов – в работах [8, 9].

II. Определения и обозначения

Приведем основные определения и обозначения, которые будут использоваться в настоящей работе. Основные понятия теории графов даны в соответствии с [10]. Определения минимальных расширений графов даны в соответствии с [3].

Определение 1. Граф $S = (V, \alpha)$, где $|V| = n, |\alpha| = m$ называется *звездой*, или *звездным графом*, когда:

Статья получена 1 октября 2021.

М. Б. Абросимов, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», Саратов, Россия (e-mail: mic@rambler.ru).

П. В. Разумовский, аспирант, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», Саратов, Россия (e-mail: shprotby@gmail.com).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006)

1) S – это полный двудольный граф $K_{1,m}$;
2) S – это дерево с одной корневой вершиной и $n-1$ листьями.

В дальнейшем корневую вершину будем называть *центром звезды* и обозначать как $c, c \in V$.

Также звезду можно представить с помощью операции соединения графов как $K_1 + O_n$, где K_1 – полный граф с одной вершиной, а O_n – вполне-несвязный граф с n вершинами.

Определение 2. Пусть $G = (V, \alpha)$ – граф, а $i \in \mathbb{N}$. Функция вида $f: V \to \{1, \dots, i\}$ называется вершинной i-раскраской графа G, а $f(v), v \in V$ – цветом вершины v. При этом граф называется *графом с цветными вершинами*, или *цветным графом*. Для таких графов вводится следующее обозначение: $G = (V, \alpha, f)$.

Введем несколько дополнительных обозначений. Пусть множество цветов будет обозначаться как $F = \{1, \dots, i\}$. Тогда цвет будет иметь обозначение $f_i \in F$. Множество $V_{f_i} = \{v |\ v \in V, f(v) = f_i\}$ – набор вершин цвета f_i. Множество $W = \{V_{f_i} | f_i \in F\}$ содержит все множества наборов вершин по цветам. $W^1 = \{V_{f_i} |\ V_{f_i} \in W, |V_{f_i}| = 1\}$ – множества вершин с цветами, встречающимися в графе только единожды. Тогда $W^2 = \{V_{f_i} |\ V_{f_i} \in W, |V_{f_i}| > 1\}$ содержит множества вершин с неуникальными цветами, то есть встречающимися два и более раз в графе. Также будет полезно ввести специальное множество $V_c = \{v | v \in V, f(v) = f(c)\}$ – множество вершин, цвет которых совпадает с цветом центральной вершины.

Определение 3. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*, f^*)$ называется вершинным k-расширением (где $k \in \mathbb{N}$) i-цветного графа $G = (V, \alpha, f)$, если граф G вкладывается с учетом цветов в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k вершин.

Определение 4. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*, f^*)$ называется минимальным вершинным k-расширением (где $k \in \mathbb{N}$) i-цветного графа $G = (V, \alpha, f)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением цветного графа G;
2) граф G^* содержит $|V| + ik$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + ik$;
3) α^* содержит минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Аналогичные определения вводятся для реберного и минимального реберного расширения цветного графа с оговоркой, что минимальное реберное расширение имеет такую же мощность множества вершин, что и исходный граф, то есть $|V^*| = |V|$.

Для удобства термин «минимальное вершинное k-расширение» будем сокращать до МВ-kР, а «минимальное реберное k-расширение» до МР-kР соответственно.

Приведем теорему из работы [3] для простых звезд. Данная теорема сыграет ключевую роль в построении минимальных реберных расширений для цветных звезд.

Теорема 1. При $k \le n/2$ граф $K_{1+2n} + O_{n-2k}$ является единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным k-расширением звездного графа $K_1 + O_n$. При $k > n/2$ звезда $K_1 + O_n$ не имеет минимальных реберных k-расширений.

III. Минимальные реберные расширения цветных звезд

Рассмотрим различные конфигурации неизоморфных цветных звезд и возможность построения МР-kР для них. Достаточно очевидно, что цветные звездные графы с определенной мощностью V_c не имеют реберных расширений.

Теорема 1. Любой цветной звездный граф $S = (V, \alpha, f)$, у которого $|V_c| < 1 + 2k$, не имеет минимального реберного k-расширения.

Доказательство. Очевидно, при удалении (отказе) k ребер графа не найдется достаточного количества дополнительных ребер, способных заменить ребра исходного графа. Соответственно, невозможно вписать исходный граф в граф, получающийся удалением k ребер из S^*.

Допустим, граф имеет $|V_c| = 4$, и необходимо найти МР-2Р. Исходный граф S имеет суммарно 3 ребра между всеми вершинами цвета $f(c)$. Максимальное количество ребер между всеми вершинами цвета $f(c)$ будет равно:

$$\frac{|V_c|(|V_c| - 1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6.$$

При построении полного подграфа из вершин цвета $f(c)$ каждая вершина цвета $f(c)$ соединена с тремя другими вершинами того же цвета. Соответственно, при удалении 2 ребер таким образом, чтобы степень каждой вершины цвета $f(c)$ уменьшилась на единицу, количество смежных вершин цвета $f(c)$ для каждой вершины того же цвета уменьшается до двух, что делает невозможным вложить исходный граф в полученный. ■

Исходя из теоремы 1, для графов с $|V_c| < 3$ не существует МР-1Р, для $|V_c| < 5$ не существует МР-2Р, для $|V_c| < 7$ не существует МР-3Р и так далее.

Теорема 2. Пусть существует звезда $S = (V, \alpha, f)$, у которой $|V_c| \ge 2k + 1$, где общее число вершин $|V| = n + 1$. Пример такой звезды представлен на рисунке 1.

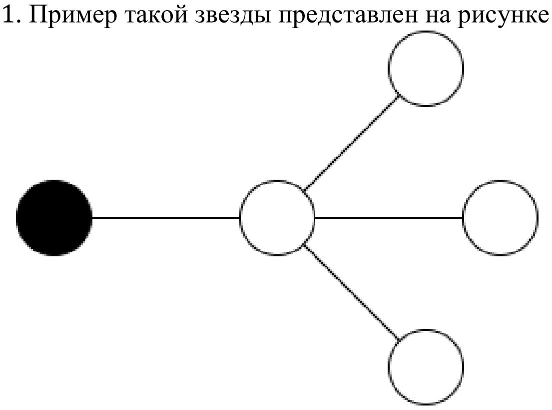

Рисунок 1 – Пример 5-вершинного 2-цветного графа S.

Минимальным реберным k-расширением такого графа S будет являться цветной граф с общим количеством ребер равным:

$$(n-k)(2k+1).$$

Схема построения данного МР-kР заключается в том, чтобы построить $2k$ дополнительных центров из вершин $v \in V_c, v \ne c$. Пример МР-1Р, построенного по данной схеме для графа с рисунка 1, представлен на рисунке 2.

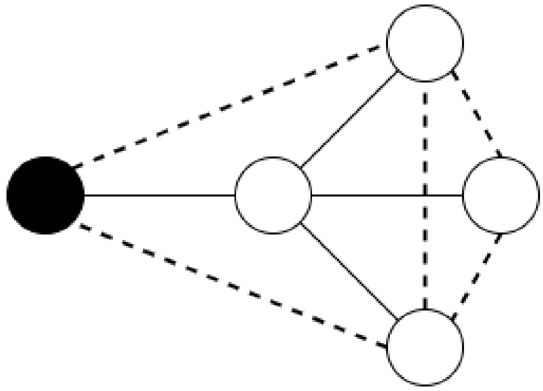

Рисунок 2 – Пример МР-1Р заданного графа S.

Доказательство. Создание дополнительного центра является достаточно очевидным шагом при построении расширения, поскольку при удалении любого ребра из исходного множества α вершина c перестает быть центром.

Допустим, необходимо найти МР-1Р для звезды с пятью вершинами, т.е. $k = 1, |V| = 5, |\alpha| = 4$. Строим дополнительный центр из $v \in V_c, v \neq c$. В получившемся графе теперь два центра: c и v. Однако несложно заметить, что в данном графе есть ребро (v, c), удаление которого приведет к графу, в который невозможно вписать исходный граф. Чтобы удовлетворить условиям реберного расширения, необходимо добавить дополнительное ребро, дублирующее (v, c). Единственный возможный вариант добавления данного ребра с учетом соблюдения условий реберного расширения является создание еще одного центра из еще одной вершины $u \in V_c, u \neq c, u \neq v$. Таким образом, при удалении ребра (v, c) его заменяет ребро (u, c) и наоборот. Для выполнения условия вершинного расширения об удалении любых k ребер в графе, необходимо построить $2k$ ребер, поскольку при удалении $k - 1$ ребер между $2(k - 1)$ дополнительным центром, а также при удалении 1 ребра между исходным центром и оставшимся дополнительным нарушается условие цветной вложенности. ■

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 покрывают все возможные конфигурации цветных звездных графов. Таким образом, построение минимального реберного k-расширения рассмотренно для всех цветных неизоморфных графов.

IV. МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРШИННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЦВЕТНЫХ ЗВЕЗД

Теперь перейдем к МВ-kР для цветных звездных графов. В данном задаче существует две конфигурации звезд – $|V_c| = 1$ и $|V_c| > 1$. Случай, когда вершина c обладает цветом, не встречающимся более нигде в графе, может быть разбита на несколько подзадач:

1) $|W^1| > 1, |W^2| = 0$ – ни один цвет в графе не встречается дважды;
2) $|W^1| = 1, |W^2| \geq 1$ – все цвета, кроме $f(c)$ встречаются в графе как минимум дважды;
3) $|W^1| > 1, |W^2| \geq 1$ – граф содержит как вершины с уникальными цветами, так и вершины, цвет которых встречается в графе более одного раза.

В соответствии с данными случаями найдем схему построения минимальных вершинных k-расширений цветной звезды.

Теорема 3. Для любой звезды $S = (V, \alpha, f)$, $|V| = n$ и $|F| = i$, где $|V_c| = 1, |W^1| > 1, |W^2| = 0$ (пример которой представлен на рисунке 3), найдется минимальное вершинное k-расширение, содержащее

$$(|W^1| - 1)k$$

дополнительных ребер.

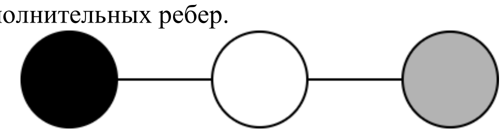

Рисунок 3 – пример цветного 3-вершинного звездного графа.

Схема построения МВ-kР заключается в том, что из ik дополнительных вершин строится k исходных графов.

Пример минимального вершинного расширения для графа, изображенного на рисунке 3, представлен на рисунке 4.

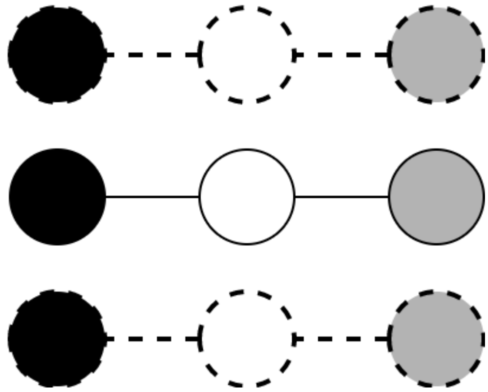

Рисунок 4 – МВ-2Р для заданного примера графа. Пунктирными линиями обозначены дополнительные вершины и ребра.

Доказательство. Рассмотрим случай МВ-1Р, то есть $k = 1$. При удалении центральной вершины граф превращается в $(n - 1)$ изолированную вершину различных цветов. Ему достаточно провести $(n - 1)$ ребро из дополнительной вершины $f(c)$ цвета к вершинам отличного от $f(c)$ цвета, чтобы иметь возможность вложить в него исходный граф.

При удалении какой-либо вершины, отличной от c, для вложения исходного графа достаточно провести ребро из дополнительной вершины того же цвета в вершину цвета $f(c)$, соединенную с вершинами всех остальных цветов.

Исходя из полученных данных, общее количество ребер получается $(n - 1)$ для дополнительной вершины $f(c)$ цвета и $(n - 1)$ ребер для вершин отличного от c цвета к вершинам $f(c)$ цвета. Очевидно, что ребра из вершин $f(c)$ цвета и ребра в вершины $f(c)$ цвета – это одни и те же ребра. Таким образом, общее необходимое количество дополнительных ребер будет равно $n - 1$. А, поскольку $|W^1| = |F| = |V|$, то получаем

$$|W^1| - 1.$$

Аналогичные рассуждения приводятся для $k = 2,3, ...$

Таким образом, общее количество дополнительных ребер для МВ-kР будет равно $(|W^1| - 1)k$. ■

Теорема 4. Для любой звезды $S = (V, \alpha, f)$, где $|V_c| = 1$, $|W^1| = 1$, $W^2 = \{W_0^2\}$, $|W^2| = 1$ (пример представлен на рисунке 5), найдется минимальное вершинное k-расширение, содержащее

$$k(|W_0^2| + k)$$

дополнительных ребер.

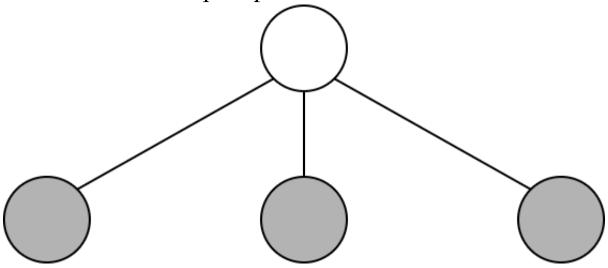

Рисунок 5 – Пример цветной звезды S.

МВ-kР для заданного примера представлен на рисунке 6.

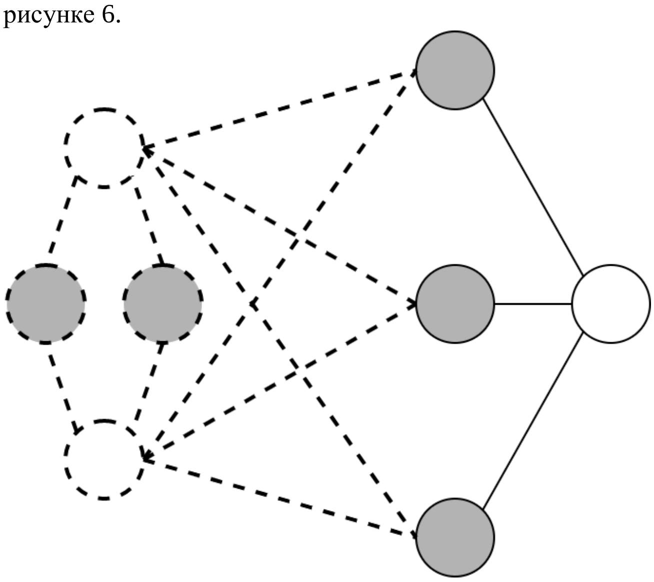

Рисунок 6 – МВ-2Р для заданного примера графа. Пунктиром обозначены дополнительные элементы.

Схема построения заключается в том, что из всех дополнительных вершин $f(c)$ цвета проводятся ребра во все исходные и дополнительные вершины цвета W_0^2.

Доказательство. Пусть цвет вершины из W_0^2 обозначается как f_1.

При удалении вершины c теряются $|W_0^2|$ ребер. Соответственно, для удовлетворения условиям вершинного расширения необходимо добавить $|W_0^2|$ ребро между вершиной $f(c)$ цвета и вершинами цвета f_1.

При удалении вершины с цветом f_1, количество ребер между вершинами данного цвета и вершинами цвета $f(c)$ уменьшается на 1. Поэтому необходимо добавить 1 дополнительное ребро.

Теперь рассмотрим случаи $k > 1$. Здесь может произойти несколько сценариев:

1) удалено k вершин цвета $f(c)$;
2) удалено k вершин цвета f_1;
3) удалено k вершин, часть которых имеет цвет $f(c)$, а остальная – цвет f_1.

В первом случае необходимо создать дополнительный центр из вершины цвета $f(c)$, при этом количество дополнительных ребер будет равно $|V_{f_1}| = |W_0^2|$. Поскольку условие вершинного расширения предполагает, что могут быть удалены любые вершины, то количество дополнительных центров должно быть равно k, то есть из каждой дополнительной вершины цвета $f(c)$ необходимо построить дополнительный центр: $k|W_0^2|$.

Во втором случае необходимо провести k ребер в k дополнительных вершины цвета f_1 из центра, содержащего $|W_0^2| - k$ ребер в вершины цвета f_1.

Третий случай выполняется в случае, если решение первого случая дополнить решением второго случая, то есть из k дополнительных центров цвета $f(c)$ провести по k ребер в k дополнительные вершины цвета f_1. При этом количество дополнительных ребер из вершин цвета $f(c)$ в вершины f_1 будет равно $k \cdot k$.

Таким образом, общее количество дополнительных ребер будет равно $k|W_0^2| + k \cdot k = k(|W_0^2| + k)$. ■

Следствие 1. Для любой звезды $S = (V, \alpha, f)$, у которой $|V_c| = 1$, $|W^1| = 1$, $W^2 = \{W_1^2, W_2^2, W_3^2, \ldots, W_r^2\}$, $|W^2| > 1$, найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным:

$$k \sum_{j=1}^{|W^2|} \left(|W_j^2| + k\right)$$

Теорема 5. Для любой звезды $S = (V, \alpha, f)$ с условиями $|V_c| = 1$, $|W^1| > 1$, $|W^2| \geq 1$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных вершин, равным:

$$k \sum_{j=1}^{|W^2|} \left(|W_j^2| + k\right) + k(|W^1| - 1)$$

Пример подобного графа представлен на риунке 7.

При этом схема построения МВ-kР будет следующей:

1) Для вершин, входящих в множество W^1, используем схему из теоремы 3. Соответственно, количество ребер будет равным $(|W^1| - 1)k$.
2) Для вершин из множеств, входящих в множество W^2, используем схему из теоремы 4 (и ее следствия). Количество ребер будет равным $k \sum_{j=1}^{|W^2|} \left(|W_j^2| + k\right)$.

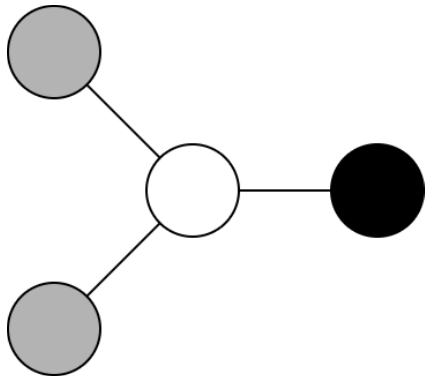

Рисунок 7 – Пример цветного звездного графа, удовлетворяющего условиям теоремы.

Пример МВ-kР по данной схеме представлен на рисунке 8.

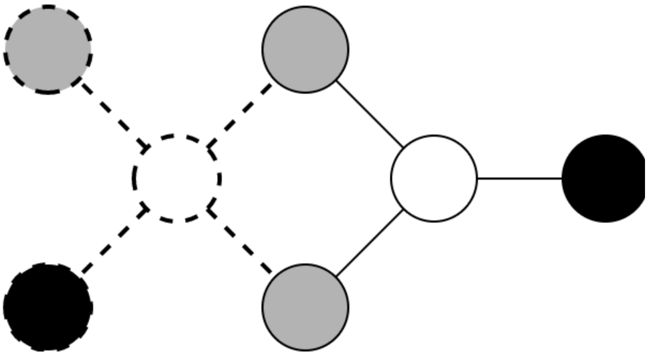

Рисунок 8 – МВ-1Р, построенный по заданной схеме для графа из рисунка 7.

Следствие 1. Схема построения и количество дополнительных ребер корректны для любых цветных звездных графов, в которых выполняется условие $|V_c| = 1, |W^1| \geq 1, |W^2| \geq 0$.

Наконец, перейдем к цветным звездным графам с $|V_c| > 1$. В работе М. Б. Абросимова [3] были рассмотрены минимальные вершинные k-расширения звездных графов $S = (V, \alpha)$ без введенной функции раскраски. Также, в данной работе были найдены единственные с точностью до изоморфизма минимальные вершинные k-расширения данных графов.

М. Б. Абросимов доказал следующую теорему.

Теорема 6. Для звездного графа с количеством вершин, отличных от c, общее количество которых равно n, справедливы следующие утверждения:

1) При нечетном n и любом $k \in \mathbb{N}$ звездный граф имеет единственное с точностью до изоморфизма МВ-kР, равное $K_k + S$, где K_k – полный k-вершинный граф, а плюс – операция соединения. Подобные расширения называются тривиальными k-расширениями графа.
2) При четном n и четном k число МВ-kР в точности равно числу неизоморфных минимальных вершинных $(k-1)$-расширений данного графа, причем каждое из МВ-kР есть тривиальное 1-расширение соответствующего минимального вершинного $(k-1)$-расширения.
3) При четном n и нечетном k выделяются три случая:

   a) *При $k < n^2 - 2n$ звезда имеет единственное с точностью до изоморфизма МВ-kР – тривиальное k-расширение;*

   b) *При $k = n^2 - 2n$ звезда имеет два с точностью до изоморфизма МВ-kР: тривиальное k-расширение и $R_{n+k+1,n+k+1}$.*

   c) *При $k = n^2 - 2n$ звезда имеет единственное МВ-kР – граф $R_{n+k+1,n+k+1}$.*

$R_{n,p}$ называется *регулярным графом* порядка p – это граф, в котором все степени вершин равны p.

Таким образом, теперь мы можем получить схему построения для любых цветных звездных графов с $|V_c| > 1$.

Теорема 7. Для любого цветного звездного графа, где $|V_c| > 1, |W^1| \geq 1, |W^2| \geq 0$, найдется минимальное вершинное k-расширение, которое строится по схеме:

1) Для вершин из V_c строится МВ-kР по теореме 6.
2) Для вершин из W^1 и $W^2 \backslash \{V_c\}$ строится МВ-kР по следствию из теоремы 5.

Пример цветного звездного графа, удовлетворяющего условиям, представлен на рисунке 9.

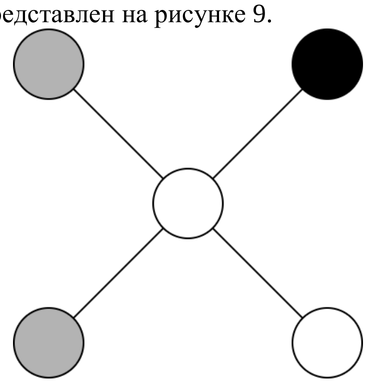

Рисунок 9 – Пример звезды, удовлетворяющей условиям теоремы 7.

МВ-kР для данного графа представлен на рисунке 10.

Таким образом, теоремы 3–7 предлагают схемы построения минимальных вершинных расширений для цветных неориентированных звезд всех возможных конфигураций.

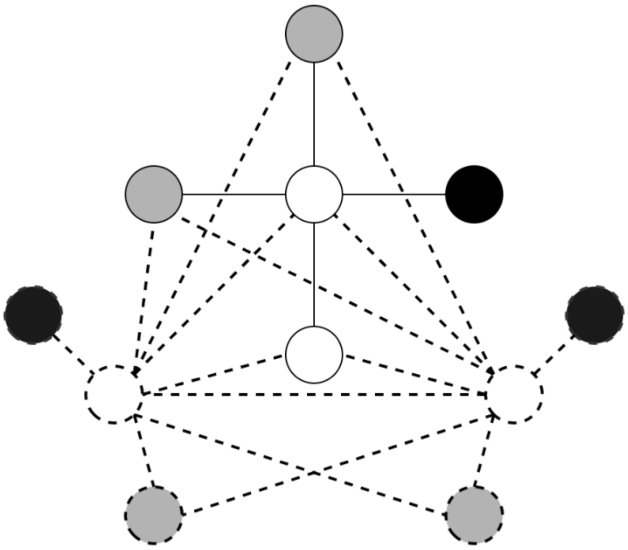

Рисунок 10 – минимальное вершинное 2-расширение для представленного графа.

V. Заключение

В данной работе было предложено решение задачи поиска минимальных вершинных и реберных расширений для цветных неориентированных звездных графов. Работа содержит схемы построения для всех возможных конфигураций графов данного класса с вычисленным количеством дополнительных ребер, необходимый для удовлетворения условий вершинного и реберного расширения. Так, для реберных расширений были определены случаи, когда данные расширения построены быть не могут, и определены условия существования реберных расширений для цветных звезд. Для вершинных расширений задача была разбита на четыре подзадачи, и для всех было найдено решение, которое помогло найти схему построения для общего случая.

Библиография

[1] Hayes J. P. *A graph model for fault-tolerant computing system* // IEEE Trans. Comput. – 1976. – Vol. C-25, no. 9. – P. 875-884.

[2] Harary F., Hayes J. P. *Edge fault tolerance in graphs*. – Networks. – 1993. – Vol. 23. – P. 135-142.

[3] Абросимов М. Б. *Графовые модели отказоустойчивости*. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012.

[4] Разумовский П. В., Абросимов М. Б. *Построение цветных графов без проверки на изоморфизм* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, № 2. – С. 267-277.

[5] Razumovsky P. V. *The search for minimal edge 1-extension of an undirected colored graph* // Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics. – 2021. – Vol. 21, no. 3. – P. 400-407.

[6] Абросимов М. Б. *Минимальные k-расширения предполных графов* // Известия ВУЗов: Математика. – 2003. – № 6 (493) С. 3-11.

[7] Абросимов М.Б. *Минимальные реберные расширения некоторых предполных графов* // Прикладная дискретная математика. – 2010. – №1. – С. 105–117.

[8] Абросимов М.Б. *Минимальные реберные расширения направленных и ориентированных звезд* // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 2. С.77–89.

[9] Абросимов М. Б. *Минимальные вершинные расширения направленных звезд* // Дискрет. матем. – 2011. № 23:2. С. 93–102.

[10] Богомолов А. М., Салий В. Н. *Алгебраические основы теории дискретных систем*. – М.: Наука, 1997.

The minimal extensions for a colored star graphs

Mikhail B. Abrosimov, Peter V. Razumovsky

Annotation —The article describes the results of the search for a minimal vertex and edge extensions of an undirected colored star graphs. This search is a part of the minimal extensions of a colored graphs problem research. A graph G^* is called a vertex (edge) *k*-extension of a graph *G* if, after removing any *k* vertices (edges) from the graph G^*, the resulting graph contains the original graph *G*. A vertex extension of a graph *G* is called minimal if it contains the minimum possible number of additional vertices and edges. An edge extension of a graph G is called minimal if it contains the same number of vertices as the graph *G* and the minimum possible number of additional edges. Most of the papers mainly deal with minimal extensions of graphs without colors. If colored graphs are considered, then the embedding is meant taking into account the colors. A star graph or star is a complete bipartite graph with a single vertex in one part. Earlier, the problem of constructing minimal vertex and edge extensions was solved for ordinary stars. This article provides a complete solution for colored stars. For all possible minimal edge and vertex extensions of a given class of graphs, corresponding schemes for constructing extensions with proofs are presented. The number of additional edges required to meet the minimum extension requirement is also provided.

Key words —graph vertex extensions, star graphs, minimal extensions, colored graph extensions, graph edge extensions, colored graphs, fault tolerance.

REFERENCES

[1] J. P. Hayes, A graph model for fault-tolerant computing system, *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-25, no. 9, pp. 875-884, 1976.

[2] F. Harary, J. P. Hayes, “Edge fault tolerance in graphs”, Networks, vol. 23, pp. 135-142, 1993.

[3] M. B. Abrosimov, *Fault Tolerance Graph Models*. Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2012 (In Russian).

[4] P. V. Razumovsky, M. B. Abrosimov, *Generation of colored graphs with isomorphism rejection*, Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 267–277 (In Russian).

[5] P. V. Razumovsky, *The search for minimal edge 1-extension of an undirected colored graph*, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, vol. 21, no. 3, pp. 400-407, 2021.

[6] M. B. Abrosimov, *Minimal k-extensions of precomplete graphs* // Izvestiya VUZov: Matematika, 2003, № 6(493), pp. 3-11 (In Russian).

[7] M. B. Abrosimov, *Minimal edge extensions of some precomplete graphs* // Applied discrete mathematics, 2010, №1, pp. 105–117 (In Russian).

[8] M. B. Abrosimov, *Minimum edge extensions of directed and oriented stars* // Applied discrete mathematics, 2011, № 2, pp.77–89 (In Russian).

[9] M. B. Abrosimov, *Minimum vertex extensions of directed stars* // Discrete mathematics, 2011, № 23:2, pp. 93–102 (In Russian).

[10] A. M. Bogomolov, V. N. Salii, *Algebraic foundations of the theory of discrete systems*. M.: Nauka, 1997 (In Russian).