О совпадениях сечений метрических отображений

Гайнуллова Светлана Ришатовна

***Аннотация* - Пусть $(X,\tilde{d}),(Y,\tilde{\rho})$ - псевдометрические пространст-ва, W - топологическое пространство, и заданы сюръетивные метрические отображения $A: X \to W, B: Y \to W$, а также отображения $F, G: X \to Y$ такие, что $B \circ F = B \circ G = A$. Под сечением отображения A понимается такое отображение $s: W \to X$, что $A \circ s = id_W$. Изучается задача о существовании и аппроксимации таких сечений, для которых $F(s) = G(s)$. Рассматривается случай как непрерывных, так и обобщенных сечений (без условия непрерывности). Применяется техника функционалов, подчиненных сходящимся рядам. Получены обобщения некоторых известных результатов.**

***Ключевые слова*—Функционалы, подчиненные рядам; метрические отображения; совпадения; map-морфизмы; сечения метрических отображений.**

I. Введение

Пусть $(X,\tilde{d}),(Y,\tilde{\rho})$ -псевдометрические пространства, W - топологическое пространство. Пусть также заданы сюръективные метрические отображения $A: X \to W, B: Y \to W$, а также $F, G: X \to Y$ такие, что $B \circ F = B \circ G = A$. $F, G: X \to Y$ будем называть map-морфизмами, следуя [2]. В данной работе рассматривается задача о существовании и аппроксимации сечений отображения A, то есть таких множеств $s = s(W)$, где $s: W \to X, A \circ s = id_W$, образы которых совпадают при действии отображений F и G. Эта задача исследуется как для случая обобщенных сечений (без требования непрерывности отображения s), так и для случая непрерывных сечений. Для решения данной задачи применяется техника функционалов, подчиненных рядам, разработанная в [1]. Полученные результаты представляют развитие и существенное обобщение некоторых результатов диссертации [2] (см. также [3]), где для решения задачи такого типа применена техника так называемых (α,β)-поисковых функционалов, разработанных в [5].

Гайнуллова С.Р., магистр 2 курса, e-mail: gajnullova-sr@yandex.ru.
Работа представляет собой результат магистерской диссертации.

II. Необходимые определения и подготовительные сведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Псевдометрикой* на множестве X называется неотрицательная функция $d: X \times X \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая следующим трем аксиомам псевдометрики:

1) Если $x = y$, то $d(x.y) = 0$.
2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.
3) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in W$.

Пусть $(X,\tilde{d}),(Y,\tilde{\rho})$ - псевдометрические пространства, W - топологическое пространство, $\mathbf{R}_+$ - множество неотрицательных вещественных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задано сюръективное отображение $A: X \to W$. Псевдометрика $\tilde{d}$ на X называется *метрикой* $\tilde{d}$ *на* A, если ее ограничение на каждый слой $A^{-1}(w), w \in W$, является метрикой на этом слое. Пара $(A,\tilde{d})$, состоящая из отображения A и метрики $\tilde{d}$ на нем, называется *метрическим отображением*.

Всюду ниже будем рассматривать сюръективные отображения $A: X \to W$ и $B: Y \to W$.

Понятие метрического отображения было введено Б.А. Пасынковым в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение $s: W \to X$ называется *обобщенным сечением* отображения A, если $A \circ s = id_W$, то есть $A: s(W) \to W$ - взаимно-однозначное отображение. Множество всех обобщенных сечений обозначим как $Sec(A)$. Образ $s(W)$ обобщенного сечения s будем обозначать также через s.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Метрической частью* обобщенного сечения $s \in Sec(A)$ будем называть множество $Sec(A,s)$ всех таких обобщеных сечений $s' \in Sec(A)$,что $d(s,s') < \infty$, где

$$d(s,s') = \sup\{\tilde{d}(x,x') \mid x \in s, x' \in s', Ax = Ax'\}.$$

Легко видеть, что множество $Sec(A,s)$ с метрикой d является метрическим пространством. Кроме того, ясно, что для $s, s' \in Sec(A)$ метрические части $Sec(A,s)$ и $Sec(A,s')$ или совпадают, или не пересекаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для двух отображений $A: X \to W$ и $B: Y \to W$ отображение $\varphi: X \to Y$, следуя [2] и [3], будем называть *map-морфизмом* отображения A в отображение B, если $A = B \circ \varphi$, и обозначать $\varphi: A \to B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Метрическое отображение $(A, \tilde{d}): X \to W$ называется *послойно полным*, если ограничение метрики $\tilde{d}$ на каждый слой $A^{-1}(w)$, $w \in W$, полно.

Для обобщенного сечения $s \subset X$ отображения A и точки $w \in W$ единственную точку пересечения $s \cap A^{-1}(w)$ обозначим через s_w.

Рассмотрим знакоположительный сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S < \infty, 0 < a_{k+1} < a_k, k = 0,1,\dots. \qquad (1)$$

Остаток ряда будем обозначать $S_m = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$.

Пусть $\varphi: Z \to \mathbf{R}_+$ - неотрицательный функционал на метрическом пространстве (Z, μ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (см. [1]). *Индексом* точки $x \in Z$ относительно пары $(\varphi, \sum_{k=0}^{\infty} a_k)$ будем называть число

$$I_\varphi(x) = \begin{cases} \max\{n \mid \varphi(x) \le a_n\}, & если \;\; a_1 \ge \varphi(x) > 0 \\ 0 & , если \;\; \varphi(x) > a_1 \\ \infty & , если \;\; \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (см. [1]). Будем называть функционал $\varphi: Z \to \mathbf{R}_+$ *подчиненным ряду* (1) на метрическом пространстве (Z, μ), если для любого $x \in Z$, для которого $\varphi(x) > 0$, существует такая точка $x' \in Z$, что

$$\mu(x, x') \le \varphi(x), I_\varphi(x') > I_\varphi(x) \qquad (2)$$

Везде ниже на прямом произведении $Z \times K$ двух метрических пространств $(Z, \mu), (K, \gamma)$ метрика задается по правилу $D((x, y), (x', y')) := \mu(x, x') + \gamma(y, y')$, где $x, x' \in Z, y, y' \in K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 [5]. График функционала φ $Graph(\varphi) = \{(x, y) \in Z \times \mathbf{R}_+ \mid y = \varphi(x)\}$ называется *0-полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{(x_m, y_m)\}_{m \in N} \subseteq Graph(\varphi)$, где $y_m \to 0$ при $m \to \infty$, сходится к некоторой паре $(\xi, 0) \in Graph(\varphi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 [5]. График $Graph(\varphi)$ называется *0-замкнутым*, если он содержит все свои предельные точки вида $(\xi, 0)$.

Для функционалов, подчиненных ряду (1), справедлива следующая Теорема 1.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1]). Пусть неотрицательный функционал $\varphi: Z \to \mathbf{R}_+$ подчинен ряду (1), а также выполнено одно из следующих условий:

1) $Graph(\varphi)$ является 0-полным.

2)Пространство Z полно и $Graph(\varphi)$ 0-замкнут.

Тогда для любой точки $x_0 \in Z$ существует сходящаяся последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ (вообще говоря, не единственная), начинающаяся из x_0, которая имеет предел $\lim_{m \to \infty} x_m = \xi \in Nil(\varphi)$, причем

$$d(x_0, \xi) \le S_{I(x_0)}.$$

Отметим, что Теорема 1 и некоторые ее применения содержатся также в совместной статье автора и Т.Н. Фоменко, принятой к печати в журнале "Математичесие заметки", т.96, N.2 (2014).

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Если отображение A послойно полно, то всякая метрическая часть $Sec(A, s)$ множества обобщенных сечений $Sec(A)$ полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть $\{s^n\}_{n=0,1,\dots}$ - фундаментальная последовательность сечений из метрической части $Sec(A, s)$ множества $Sec(A)$, то есть $\forall \varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$, что $d(s^n, s^m) < \varepsilon$ для $\forall n > N, m > N$. Так как $d(s^n, s^m) = \sup_{w \in W} \tilde{d}(s_w^n, s_w^m) < \varepsilon$, и любой слой $A^{-1}(w)$ есть полное пространство относительно метрики $\tilde{d}$ (так как A послойно полно), то для каждого $w \in W$ последовательность $\{s_w^n\}_{n=0,1,\dots}$ фундаментальна и сходится к некоторой точке $s_w^0 \in A^{-1}(w)$. Эти пределы образуют некоторое обобщенное сечение $s^0 = \{s_w^0\}_{w \in W}$.

Покажем, что $s^0 = \lim_{n \to \infty} s^n$ по метрике d, то есть что $d(s^n, s^0) \to 0$ при $n \to \infty$. По условию, для любых $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n > N, m > N$ верно, что $d(s^n, s^m) < \varepsilon$.Тогда $\lim_{m \to \infty} d(s^n, s^m) = \lim_{m \to \infty} \sup_{w \in W} \tilde{d}(s_w^n, s_w^m) \le \varepsilon$. А следовательно, и $\lim_{m \to \infty} \tilde{d}(s_w^n, s_w^m) = \tilde{d}(s_w^n, s_w^0) \le \varepsilon$ для $\forall n > N, \forall w \in W$. Следовательно, и $d(s^n, s^0) = \sup_{w \in W} \tilde{d}(s_w^n, s_w^0) < \varepsilon, \forall n > N.$

Таким образом, $s^0 = \lim_{n \to \infty} s^n \in Sec(A, s)$. Итак, метрика d на $Sec(A, s)$ полна.

Рассмотрим теперь аналогичные вопросы для непрерывных сечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Непрерывным* сечением непрерывного метрического отображения A называется такое непрерывное отображение $q: W \to X$, что $A \circ q = id_W$. Множество всех непрерывных сечений обозначим через $\overline{Sec}(A)$. Непрерывные сечения будем ниже называть также просто сечениями, опуская слово "непрерывные".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Метрической частью* сечения $q \in \overline{Sec}(A)$ непрерывного метрического отображения A называется множество $\overline{Sec}(A,q)$ всех таких сечений $q' \in \overline{Sec}(A)$, что $d(q,q') < +\infty$.

Аналогично случаю обобщенных сечений, метрическая часть $\overline{Sec}(A,q)$, очевидно, является метрическим пространством с метрикой $d(q,q') = \sup\{\tilde{d}(x,x') \mid x \in q, x' \in q', Ax = Ax'\}$. Ясно также, что для любых $q, q' \in \overline{Sec}(A)$ множества $\overline{Sec}(A,q)$ и $\overline{Sec}(A,q')$ или совпадают, или не пересекаются.

Нам необходимо также следующее утверждение:

ЛЕММА 2 ([2], Предложение 2.1). Если непрерывное метрическое отображение A послойно полно, то для любого его непрерывного сечения $q \in \overline{Sec}(A)$ метрическая часть $\overline{Sec}(A,q)$ также полна.

III. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

A. *Случай обобщенных сечений.*

Пусть заданы сюръективные метрические отображения $A: X \to W$ и $B: Y \to W$ и два map-морфизма $F: A \to B$ и $G: A \to B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13: Будем говорить, что функционал $\varphi: X \to R_+$ *послойно подчинен* ряду (1), если для любого $w \in W$ сужение

$\varphi|_{A^{-1}(w)} = \varphi_w : A^{-1}(w) \to \mathbf{R}_+$ является подчиненным этому ряду.

ЛЕММА 3. Пусть функционал $\varphi: X \to \mathbf{R}_+$ послойно подчинен ряду (1). Пусть $M_A \subseteq Sec(A)$ некоторая метрическая часть, и функционал φ ограничен на множестве $X_{M_A} = \{s_w \in X \mid s_w \in s,\ w \in W, s \in M_A\}$. Тогда функционал $\psi: M_A \to \mathbf{R}_+$, где $\psi(s) = \sup\limits_{w \in W}\{\varphi_w(s_w)\}$, также подчинен этому ряду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть $\psi(s) > a_1$ для некоторого обобщенного сечения $s \in M_A$ метрического отображения A, то есть индекс $I_\psi(s) = 0$. Тогда, в силу послойной подчиненности ряду (1) функционала $\varphi: X \to \mathbf{R}_+$, для любой точки $s_w \in A^{-1}(w) \cap s$ найдется точка $s'_w \in A^{-1}(w)$, для которой $d(s_w, s'_w) < \varphi_w(s_w)$ *и* $\varphi_w(s'_w) \le a_1$.

А следовательно, для любого обобщенного сечения $s = \{s_w\}_{w \in W}$, $s \in M_A$, существует обобщенное сечение $s' = \{s'_w\}_{w \in W}$, $s' \in M_A$, такое что $d(s,s') = \sup\limits_{w \in W}\{\tilde{d}(s_w, s'_w)\} \le \sup\limits_{w \in W}\{\varphi(s_w)\} = \psi(s)$ и $\psi(s') = \sup\limits_{w \in W} \varphi_w(s'_w) \le a_1$, то есть $I_\psi(s') > I_\psi(s)$.

Пусть $0 < \psi(s) \le a_1$, где $s = \{s_w\}_{w \in W}$, $s \in M_A$. В силу условия подчиненности функционала φ_w ряду (1) для $\forall w \in W$ (то есть послойной подчиненности функционала φ ряду (1)), для каждой из точек $s_w \in A^{-1}(w) \cap s$ выберем какую-нибудь из точек $s'_w \in A^{-1}(w)$, для которой выполняются следующие неравенства: $\tilde{d}(s_w, s'_w) \le \varphi_w(s_w)$ и $I_{\varphi_w}(s'_w) > I_{\varphi_w}(s_w)$.

Покажем, что тогда обобщенное сечение $s' = \{s'_w\}_{w \in W}$ удовлетворяет условиям $d(s,s') \le \psi(s)$ и $I_\psi(s') > I_\psi(s)$, где $I_\psi(s) := \min\limits_{w \in W}\{I_{\varphi_w}(s_w)\}$. Сначала докажем неравенство $d(s,s') \le \psi(s)$. По определению $d(s,s') = \sup\limits_{w \in W}\{\tilde{d}(s_w, s'_w)\}$. По условию послойной подчиненности функционала φ ряду (1), для $\forall w \in W$ верно, что $\tilde{d}(s_w, s'_w) \le \varphi(s_w)$. Тогда $d(s,s') = \sup\limits_{w \in W}\{\tilde{d}(s_w, s'_w)\} \le \sup\limits_{w \in W}\{\varphi(s_w)\} = \psi(s)$.

Для $\forall w \in W$ будем обозначать $I_{\varphi_w}(s_w) = n_w$. Это означает, что $n_w = \max\{n \mid \varphi_w(s_w) \le a_n\}$, то есть $\varphi_w(s_w) \le a_{n_w}$, но $\varphi_w(s_w) > a_{n_w+1}$. Теперь рассмотрим $\psi(s) = \sup\limits_{w \in W}\{\varphi_w(s_w)\} \le \sup\limits_{w \in W}\{a_{n_w}\} = a_{n_0}$, где $n_0 = \min\limits_{w \in W}\{n_w\}$, так как члены ряда монотонно убывают. Заметим, что такой минимум, очевидно, всегда достигается.

Покажем теперь, что $I_\psi(s) = n_0$. Уже показано, что $\psi(s) \le a_{n_0}$, где $n_0 = \min\limits_{w \in W}\{n_w\}$. Осталось доказать, что для $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $\psi(s) > a_n$.

Предположим противное, то есть пусть $\psi(s) \le a_n$ для некоторого $n, n > n_0$. Поскольку $\psi(s) = \sup_{w \in W}\{\varphi_w(s_w)\}$, то для $\forall w \in W$ выполняется $\varphi_w(s_w) \le a_n$. Это означает $n_w = I_{\varphi_w}(s_w) \ge n$ для $\forall w \in W$. Но тогда $\min_{w \in W}\{n_w\} = n_0 \ge n$. Получили противоречие.

Таким образом мы доказали, что для $\forall s \in M_A$, для которого $\psi(s) > 0$, существует $s' \in M_A$, для которого выполнены неравенства $d(s, s') \le \psi(s)$ и $I_\psi(s') > I_\psi(s)$. Если $\psi(s) = 0$, то положим $s' = s$.

Таким образом, доказано, что функционал ψ подчинен ряду (1) на метрической части M_A.

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны сюръективные метрические отображения $A : X \to W$ и $B : Y \to W$ на W, и отображение A послойно полно. Пусть, кроме того, даны два map-морфизма $F : A \to B$ и $G : A \to B$. Предположим, что $M_A \subseteq Sec(A)$ и $M_B \subseteq Sec(B)$ - такие непустые метрические части множеств обобщенных сечений отображений A и B, что $F(M_A) \subseteq M_B$ и $G(M_A) \subseteq M_B$. Пусть также функционал $\varphi : X \to R_+$, где $\varphi(x) = \tilde{\rho}(F(x), G(x))$, является послойно подчиненным ряду (1), и для $\forall w \in W$ график функционала $\varphi_w = \varphi|_{A^{-1}(w)} : A^{-1}(\omega) \to \mathbf{R}_+$ является 0-замкнутым, то есть график функционала φ послойно 0-замкнут.

Тогда для любого сечения $s_0 \in M_A$ существует последовательность обобщенных сечений $\{s_n\}_{n=0,1,\dots} \subseteq M_A$, начинающаяся из s_0 и сходящаяся к некоторому обобщенному сечению $\xi \in M_A$, для которого $F(\xi) = G(\xi)$, причем расстояние $d(s^0, \xi) \le S_{I_\psi(s^0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Во-первых, легко видеть, что в условиях теоремы функционал φ ограничен на множестве X_{M_A}. Поэтому в силу Леммы 3, функционал $\psi : M_A \to \mathbf{R}_+$, где

$$\psi(s) = d(F(s), G(s)) = \sup_{w \in W} \tilde{\rho}(F(s_w), G(s_w)) =$$

$= \sup_{w \in W}\{\varphi_w(s_w)\}$, является подчиненным ряду (1).

Построим итерационную последовательность. Пусть $I_\psi(s^0)$ - индекс обобщенного сечения $s^0 \in M_A$. Если $\psi(s^0) = 0$, то есть $I_\psi(s^0) = \infty$, то полагаем дальше $s^n = s^0, n \ge 1$. Иначе выбираем обобщенное сечение s^1, так чтобы $d(s^0, s^1) \le \psi(s^0), I_\psi(s^1) > I_\psi(s^0)$. Это возможно в силу подчиненности функционала ψ ряду (1).

Далее, если уже выбрано обобщенное сечение s^m, то ищем такое обобщенное сечение s^{m+1}, что $d(s^m, s^{m+1}) \le \psi(s^m), I_\psi(s^{m+1}) > I_\psi(s^m)$, если $\psi(s^m) > 0$. Если $\psi(s^m) = 0$, то полагаем $s^n = s^m, \forall n > m$. Таким образом, мы получаем последовательность обобщенных сечений $\{s^n\}_{n=0,1,\dots}$. Покажем, что она является фундаментальной. Обозначим $I_\psi(s^k) = I_k$. Действительно, для $\forall \varepsilon > 0, \forall m > n$, выполняется

$$d(s^n, s^m) \le \sum_{i=n}^{m-1} d(s^i, s^{i+1}) \le \sum_{i=n}^{m-1} \psi(s^i) \le \sum_{i=n}^{m-1} a_{I_i} <$$

$< \sum_{k=I_n}^{\infty} a_k = S_{I_n} < \varepsilon$, при достаточно большом n.

Отсюда, в силу сходимости ряда (1), получаем, что последовательность $\{s^n\}_{n=0,1,\dots}$ фундаментальна и, кроме того, ясно, что $\psi(s^n)$ сходится к 0.

Так как, по условию, метрическое отображение A послойно полно, то, в силу Леммы 1, метрическая часть $M_A \subset Sec(A)$ полна. Следовательно, существует предел $\xi \in M_A$ последовательности $\{s^n\}_{n=0,1,\dots}$. Тогда $F(\xi) \in M_B, G(\xi) \in M_B$. Так как M_A полно, и график функционала $\varphi : X \to \mathbf{R}_+$ послойно 0-замкнут, то и график функционала $\psi : M_A \to \mathbf{R}_+$ тоже 0-замкнут. Следовательно, $(\xi, 0) \in Graph(\psi)$, то есть $\psi(\xi) = \rho(F(\xi), G(\xi)) = 0$, что и означает равенство $F(\zeta) = G(\xi)$.

Оценим расстояние,

$$d(s^0, \xi) = \lim_{m \to \infty} d(s^0, s^m) \le \lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{m-1} d(s^j, s^{j+1}) \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \psi(s^j) \le \sum_{j=0}^{\infty} a_{I_j} = \sum_{k=I_0}^{\infty} a_k = S_{I_0} = S_{I_\psi(s^0)}.$$

B. Случай непрерывных сечений.

Рассмотрим теперь ту же задачу для непрерывных сечений. Всюду ниже в этом пункте будем предполагать метрические отображения A и B непрерывными.

Пусть $q \in \overline{M}_A$, то есть $q : W \to X$ - непрерывное сечение метрического отображения A, $\overline{M}_A$ - метрическая часть множества $\overline{Sec(A)}$. Пусть функционал $\psi : X \to \mathbf{R}_+$ послойно подчинен ряду (1), то есть для любого $w \in W$ функционал $\psi|_{A^{-1}(w)} : A^{-1}(w) \to \mathbf{R}_+$ подчинен ряду (1). Это означает, что для любой точки $q_w = q \cap A^{-1}(w)$ существует такая точка $q'_w = A^{-1}(w)$, что

$\tilde{d}(q_w, q'_w) \le \psi(q_w)$ и, если $\psi(q_w) > 0$, то $I_\psi(q'_w) > I_\psi(q_w)$. Обозначим через $K_\psi(q_w)$ подмножество слоя $A^{-1}(w)$, при $\psi(q_w) > 0$ равное $\{q'_w \in A^{-1}(w) \mid \tilde{d}(q_w, q'_w) \le \psi(q_w), I(q'_w) > I(q_w)\}$;

и при $\psi(q_w) = 0$ равное $\{q_w\}$.

Для любого сечения $q \in \overline{M}_A$ обозначим $K_\psi(q) = \bigcup_{w \in W} K_\psi(q_w)$, где $q_w = q \cap A^{-1}(w)$.

ЛЕММА 4. Пусть непрерывное сюръективное метрическое отображение $A : X \to W$ послойно полно. Пусть задан функционал $\psi : X \to \mathbf{R}_+$, и ψ послойно подчинен ряду (1). Пусть $\overline{M}_A \subseteq \overline{Sec}(A)$ некоторая метрическая часть, и функционал ψ ограничен на подмножестве $X_{\overline{M}_A} = \{q_w \in X \mid q_w \in q, q \in \overline{M}_A\}$. Предположим также, что для любого сечения $q \in \overline{M}_A$ найдется непрерывное сечение $q' \in \overline{M}_A, q' \subseteq K_\psi(q)$. Тогда функционал $\psi : \overline{M}_A \to \mathbf{R}_+$, где $\psi(q) = \sup_{w \in W}\{\psi(q_w)\}$, подчинен ряду (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть $q \in \overline{M}_A, q = \{q_w\}_{w \in W}$. В силу условий Леммы 4, сужение $A|_{K_\psi(q)}$ обладает непрерывным сечением $q' \in \overline{M}_A$. Таким образом, для непрерывного сечения $q \in \overline{M}_A$ нашлось непрерывное сечение $q' \in \overline{M}_A$, со следующими свойствами: для $\forall w \in W$ выполнено $\tilde{d}(q_w, q'_w) \le \psi(q_w)$ и , если $\psi(q_w) > 0$, то $I(q'_w) > I(q_w)$. Рассуждая аналогично доказательству Леммы 3, получаем, что тогда выполнены и следующие условия: $d(q, q') \le \psi(q)$ и , если $\psi(q) > 0$, то $I(q') > I(q)$. Это означает, что функционал $\psi : \overline{M}_A \to \mathbf{R}_+$, где $\psi(q) = \sup_{w \in W} \psi(q_w)$, является подчиненным ряду (1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны непрерывные сюръективные метрические отображения $A : X \to W$ и $B : Y \to W$, и отображение A послойно полно. Пусть, кроме того, даны два непрерывных map-морфизма $F : A \to B$ и $G : A \to B$. Пусть метрическая часть $\overline{M}_A$ множества $\overline{Sec}(A)$ и метрическая часть $\overline{M}_B$ множества $\overline{Sec}(B)$ непусты и таковы, что $F(\overline{M}_A) \subset \overline{M}_B$ и $G(\overline{M}_A) \subset \overline{M}_B$. Пусть также функционал $\varphi : X \to \mathbf{R}_+$, где $\varphi(x) = \tilde{\rho}(F(x), G(x)), x \in X$, является послойно подчиненным ряду (1). И пусть для любого $q \in \overline{M}_A$ найдется такое непрерывное сечение $q' \in \overline{M}_A$, что $q' \subseteq K_\psi(q)$. Тогда для любого непрерывного сечения $q^0 \in \overline{M}_A$ существует непрерывное сечение $\xi \in \overline{M}_A$ такое, что $\psi(\xi) = 0$, то есть $F(\xi) = G(\xi)$, причем верно неравенство $d(q^0, \xi) \le S_{I_0}$, где $I_0 = I_\psi(q^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

В силу Леммы 4, функционал $\psi : \overline{M}_A \to \mathbf{R}_+$, $\psi(q) = \sup_{w \in W} \varphi(q_w) = \rho(F(q), G(q))$, является подчиненным ряду (1). Далее доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 2, причем в данном случае 0-замкнутость графика функционала ψ вытекает из его непрерывности. □

Возникает вопрос: насколько реальным является условие теоремы о том, что для любого $q \in \overline{M}_A$ найдется такое непрерывное сечение $q' \in \overline{M}_A$, что $q' \subseteq K_\psi(q)$?

В [2] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 5 ([2], Следствие 2.2). Пусть отображение A послойно полно, W есть 0-мерный паракомпакт, множество $K \subset X$ имеет тип G_δ в X, $A(K) = W$ и отображение $A|_K : K \to W$ открыто. Тогда $A|_K$ обладает непрерывным сечением.

Из Леммы 5 следует, что условие теоремы 3 о том, что для любого $q \in \overline{M}_A$ найдется такое непрерывное сечение $q' \in \overline{M}_A$, что $q' \subseteq K_\psi(q)$, реализуется, если, например, к условиям Теоремы 3 добавить, что W есть 0-мерный паракомпакт, и что для любого $q \in \overline{M}(A)$ условия Леммы 5 выполнены для $K = K_\psi(q)$.

IV. Заключение

Отметим, что Теорема 3 является обобщением результата [2, Теорема 2.2], в котором аналогичная задача рассматривается для послойно α-накрывающих и послойно β-липшицевых map-морфизмов F, G, $0 < \beta < \alpha$. Из этих условий выводится, что функционал $\psi(q) = d(F(q), G(q))$ является на множестве непрерывных сечений $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$- поисковым для $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, близких к (α, β). Несложно показать, что любой ограниченный (α, β)-поисковый функционал является подчиненным геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ в некоторой эквивалентной метрике. Таким образом, результат [2, Теорема 2.2] сводится к частному случаю приведенной выше Теоремы 3. Приведенная здесь Теорема 2 также является развитием упомянутого результата [2, Теорема 2.2] на случай обобщенных сечений.

Добавим в заключение, что предложенный здесь метод может быть использован для решения задачи о существовании и аппроксимации такого сечения (непрерывного или обобщенного) метрического отображения, на котором совпадают n map-морфизмов, $n > 2$. В качестве следствий из этих результатов могут быть получены также теоремы о существовании и аппроксимации сечений, неподвижных относительно конечного набора map-морфизмов.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Т.Н. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе.

Благодарю профессора Б.А. Пасынкова за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

Библиография

[1] Гайнуллова С.Р., "Каскадный поиск нулей функционала, подчиненного сходящемуся ряду". Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2012"(Апрель 2012), с.74-75

[2] Нгуен Тхи Хонг Ван, "Метрические и метризуемые отображения", Диссертация на соискание ученой степени кандиндата физико-математических наук, Москва, МГУ, 2013.

[3] Нгуен Тхи Хонг Ван, Пасынков Б.А., "О непрерывных сечениях метрических отображений", МПГУ - М., 2012. - 30 с. - Деп. в ВИНИТИ РАН 26.11.2012 N. 435-B2012.

[4] Пасынков Б.А. "О метрических отображениях", Вестник Московского Университета, Сер. 1, Математика. Механика. 1999. №3, с. 29-32.

[5] Fomenko T.N., "Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings". Topology and its Applications, 157(2010), pp.760-773.

On coincidences of metric mapping sections.

Gaynullova Svetlana Rishatovna

***Abstract*-Let $(X, \tilde{d}), (Y, \tilde{\rho})$ be pseudometric spaces, W be a topological space. Let surjective metric mappings $A : X \to W, B : Y \to W$ and some mappings $F, G : X \to Y$ be given, such that $B \circ F = B \circ G = A$. A section of the metric mapping A is defined as a mapping $s : W \to X$, such that $A \circ s = id_W$. We study the existence and approximation problem of mapping sections s, such that $F(s) = G(s)$. We consider both the case of continuous sections and the case of generalized sections (without the condition of the continuity) of metric mappings. We use the method of functionals subordinated to convergent series. Some generalizations of known results are obtained.**

***Key words*—Functionals, subordinated to a convergent series; metric mapping; coincidence; map-morphism; section of metric mapping.**