Оптимальный линейный прогноз II. Геометрия в пространстве.

А.В. Павлов

***Аннотация*—Статья является второй частью статьи «Оптимальный линейный прогноз». Результаты данной статьи продолжают исследование оптимальных линейных проекций в трехмерном пространстве с точки зрения сравнения длин в двух разных метриках, заданных исходным скалярным произведением и вторым скалярным произведением первой статьи. Введение новой метрики приводит к ситуации, когда с точки зрения линейной зависимости необходимо менять единицу длины в зависимости от направления вектора плоскости наблюдений. Данное изменение длины невозможно с точки зрения простых ортогональных преобразований плоскости, переводящих стороны ромба в его диагонали, ортогональные в случае обеих скалярных произведений. С этой точки зрения доказано, что единицы измерения длин должны быть одни и те же на диагоналях и сторонах ромба, стороны которого совпадают с векторами наблюдений в симметричном случае. В симметричном случае к тому же результату приводит ортогональность диагоналей ромба, которые с помощью ортогонального преобразования должны переходить в ортогональные в обеих метриках стороны этого ромба. Результаты, связанные со сравнением длин на плоскости, приводят к новым доказательствам основных положений первой статьи. В этих доказательствах используются равенства аналогичные теореме Пифагора для новой метрики. Так как произвольное линейное преобразование на плоскости совпадает с поворотом векторов на некоторый угол, то результаты статьи требуют дальнейшего изучения с точки зрения вычислительных методов.**

***Ключевые слова*—Оптимальная линейная оценка, оптимальный прогноз, геометрия в пространстве, ортогональность для разных скалярных произведений, ортогональные линейные произведения. длины в разных метриках.**

I. Введение

Данная статья является продолжением статьи с тем же названием "Оптимальный линейный прогноз". В данной статье другим методом доказывается теорема 1 из первой части. Доказательство и предложение 1 по мнению автора представляет отдельный интерес с точки зрения геометрии на плоскости и привлекает внимание к исследованию оптимальных линейных оценок с новой точки зрения ввиду необходимости согласования разных единиц длины из-за неоднозначности величин длин при изучении разных скалярных произведений в трехмерных пространствах.

В статье "Оптимальный линейный прогноз" [1] кроме первого исходного произведения мы используем также второе скалярное произведение, совпадающее по определению с суммой почленных произведений координат векторов в базисе x_1, x_2, e_3, хотя $(x_1, x_2) \neq 0,$ для исходного скалярного произведения : Здесь равенства

$$\| e_3 \| = \| x_1 \| = \| x_2 \| = 1, e_3 \perp x_1, e_3 \perp x_2,$$

выполнены для обоих скалярных произведений. Обозначив через $\hat{x}_3$ проекцию вектора x_3 на плоскость векторов x_1, x_2, мы использовали [1] очевидные равенства $\bar{x}_3 = e \| \hat{x}_3 \|_1 + c_3 e_3, \| e \|_1 = 1, e \perp e_3,$

$$\bar{x}_3 = e \| \hat{x}_3 \|_2 + c_3 e_3,$$
$$\| e \|_2 = 1, (e_3, e)_1 = (e_3, e)_2 = 0,$$

в которых единица измерения длины $\| e \|$ одна и та же для разных двух метрик: $\| e \| = \| e \|_1 = \| e \|_2 = 1,$ заданных двумя скалярными произведениями на всей плоскости векторов x_1, x_2 (данное предположение естественно ввиду очевидного совпадения единиц длин векторов параллельных или x_1 или x_2 в координатной форме). Мы получаем равенство $\| \hat{x}_3 \|_1 = \| \hat{x}_3 \|_2$ для двух разных метрик (теорема 1). Формально, для ликвидации противоречия $\| \hat{x}_3 \|_1^2 \neq \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 = \| \hat{x}_3 \|_2$ в треугольнике со сторонами $\hat{x}_3, x_1, x_2$, $x_1 + x_2 = \hat{x}_3$, приходится предположить, что единицы измерения длин на диагонали ромба со сторонами x_1, x_2 разные для введенных двух метрик, и единица измерения для второй метрики отличается от общей единицей измерения на диагоналях. Отличие единиц измерения опровергается с точки зрения фактов, приведенных ниже (см. также предложение 1).

Отметим прежде всего, что ортогональное преобразование, заданное матрицей

Статья получена 25 сентября 2020.
Andrey Valerianovich Pavlov is with Moscow Institute of Radio-technics, Electronics, and Automatics-RTU, higher mathematics-1, Moscow, Russia (e-mail: avpavlovmgu@my-post.ru).

$$A = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

переводит ортогональные диагонали ромба в его стороны, которые могут быть неортогональны с точки зрения исходной метрики. Точное изложение данного факта приведено далее и в приложении 1.

Приведем основную часть доказательства приложения 1 статьи для упрощенного случая, когда рассматривается прямое и обратное преобразования А без нормировки корнем из двух. Такое преобразование обладает тем же свойством, как и нормированное: вектора на диагоналях ромба с равными по длине сторонами $\| x_1 \|_1 = \| x_2 \|_1$ в симметричном случае приводят к равенствам

$$e_1 = (x_1 + x_2)/2, e_2 = (x_1 - x_2)/2.$$

Данные вектора на диагоналях ромба ортогональны в обеих метриках, причем $e_1 + e_2 = x_1, e_1 - e_2 = x_2$. Следовательно, матрицы перехода от базиса x_1, x_2 к базису e_1, e_2 задают линейное преобразование

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$B, B^{-1} = 2B, B^{\bullet} = B, (B^{-1})^{\bullet} = B^{-1}$, такое, что $B^{-1}B^{-1} = 2E$, и скалярное произведение результата преобразования сторон ромба равно

$$(x_1, x_2) = (B^{-1}e_1, B^{-1}e_2) =$$
$$e_{k1}^{\bullet}(B^{-1})^{\bullet}\ B^{-1}e_{k2} =$$
$$= e_{1k}^{\bullet}B^{-1}B^{-1}e_{2k} =$$
$$e_{1k}^{\bullet}2BB^{-1}e_{2k} = 2(e_1, e_2) = 0, (B^{-1})^{\bullet}\ B^{-1} = 2E,$$

($\bullet$ - знак транспонирования, $e_{1k}^{\bullet}$ и e_{2k} - вектор строка и вектор столбец координат векторов e_1 и e_2 соответственно в базисе x_1, x_2). Если пользоваться понятием длин, то $(x_1, x_2) = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$, и данный факт кажется неверным для исходной метрики.

Мы получили $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)_1 = 0$ с точки зрения преобразования координат при линейном преобразовании В.

Следующий относительно простой факт (как и теорема 1) обосновывает совпадение единиц измерения длин на сторонах и диагоналях ромба для второй метрики в симметричном случае.

Если оптимальная оценка совпадает с диагональю ромба со сторонами x_1, x_2, то для обеих метрик имеют место равенства

$$\hat{x}_3 = c_1x_1 + c_2x_2 = c(x_1 + x_2), c = c_1 = c_2,$$

причем из единственности проекции следует, что константа c одна и та же для обоих скалярных произведений. При этом $\hat{x}_3$ совпадает с диагональю ромба со стороной $\| \hat{x}_3 \|$.

Длина диагонали с точки зрения второй метрики равна $\sqrt{2}\| x_1 \|_2$ единиц измерения на диагонали или $\| (x_1 + x_2)/\sqrt{2} \|_2 = \| x_1 \|_2$; тому же самому числу эта длина равна и как результат ортогонального преобразования А, $A = A^{-1}$, так как $Ax_1 = E_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$, и $\| x_1 \|_2 = \| E_1 \|_2$, причем здесь длина $\| x_1 \|_2 = \| x_1 \|_1$ измерена в одинаковых единицах на сторонах. Мы использовали сохранение длин при ортогональном преобразовании А (данный факт следует из равенства $(Ax_1, Ax_2) = (x_1, x_2)$), то есть длина диагонали ромба (оптимальной оценки) равна числу $\sqrt{2}\| x_1 \|_2$, где длина $\| x_1 \|_2$ измерялась в единицах сторон ромба, общих для обеих метрик.

Мы получили, что с точки зрения ортогональных преобразований единицу длины на диагонали во второй метрике те же, как на сторонах ромба.

Из предложения 1 (как и из теоремы 1) следует, что понятие длины оптимальной линейной оценки как вектора в трехмерном пространстве требует отдельного изучения уже и с точки зрения исходного обыкновенного скалярного произведения (из данного предложения следует, что такая длина определена неоднозначно без введения нового скалярного произведения).

II. ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Мы будем использовать обозначения $\xi = \overline{x}$, называя случайную величину ξ также вектором $\overline{x} = \xi, x = \overline{x}$, в тех случаях, когда алгебраические аналогии упрощают изложение. Через $\hat{x}_3 = \hat{\xi}_3$ обозначается оптимальная линейная оценка случайной величины $\xi_3 = x_3$ по двум наблюдениям $\xi_i = x_i, i = 1, 2$ (проекция вектора $\overline{x}_3$ на подпространство векторов x_1, x_2 с точки зрения пространственной геометрии).

Кроме исходного первого скалярного произведения $(\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{X}, \overline{Y})_1$ в трехмерном пространстве векторов мы будем рассматривать второе скалярное произведение, которое совпадает с суммой почленных произведений координат двух векторов в неортогональном базисе x_1, x_2, e_3:

$$(x_1, x_2) \neq 0, e_3 \perp x_1, e_3 \perp x_2,$$
$$\| x_1 / \| x_1 \| \| = \| x_2 / \| x_2 \| \| = \| e_3 \| = 1.$$

Точнее, второе скалярное произведение определяется из равенства $(X_1, X_2)_2 = C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3$, где

$$X_1 = C_1 \bar{E}_1 + C_2 \bar{E}_2 + C_3 \bar{e}_3 ,$$

$$X_2 = R_1 \bar{E}_1 + R_2 \bar{E}_2 + R_3 \bar{e}_3 ,\ (\bar{E}_1, \bar{E}_2) \neq 0.$$

Соответственно, равенства $\| X \| = \| X \|_1 = \sqrt{(X, X)_1}$, $\| X \|_2 = \sqrt{(X, X)_2}$ определяют две метрики в трехмерном пространстве векторов:

$$\bar{E}_1 = x_1 / \| x_1 \|, \bar{E}_2 = x_2 / \| x_2 \| .$$

Теорема 1.

Если в исходном базисе $x_1, x_2, \| x_1 \|_1 = \| x_2 \|_1 = 1$, проекция x_3 на плоскость этих векторов имеет вид

$$\hat{x}_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2, (x_1, x_2)_1 \neq 0,$$

а в базисе e_1, e_2, полученном процессом ортогонализации векторов x_1, x_2 данная проекция имеет вид

$$\hat{x}_3 = \grave{c}_1 e_1 + \grave{c}_2 e_2, e_1 \perp e_2 ,\ \| e_1 \|_1 = \| e_2 \|_1 = 1, e_1 = x_1,$$

то имеет место равенство $x_1^2 + x_2^2 = (\grave{c}_1)^2 + (\grave{c}_2)^2$, в предположении, что единица измерения длины для второй метрики одна и та же при измерении длины по любому направлению.

Доказательство.

Рассмотрим равенства

$$x_3 = \hat{x}_3 + c_3 \bar{e}_3 = e \| \hat{x}_3 \|_1 + c_3 \bar{e}_3, \| e \|_1 = 1,$$

$$x_3 = \hat{x}_3 + c_3 \bar{e}_3 = e \| \hat{x}_3 \|_2 + c_3 \bar{e}_3, \| e \|_2 = 1.$$

Если единица измерения длины $\| e \|$ одна и та же для обеих метрик $\| e \| = \| e \|_1 = \| e \|_2 = 1$ на всей плоскости векторов x_1, x_2 (данное предположение естественно ввиду очевидного совпадения единиц длин векторов в координатной форме параллельных или x_1 или x_2), то из линейной независимости e, e_3 вытекает равенство $\| \hat{x}_3 \|_1 = \| \hat{x}_3 \|_2$, и теорема 1 доказана.

Приведем короткое доказательство результата статьи [1] без использования понятия длины на диагоналях или понятия длин проекций вектора x_3.

Предложение 1.

$$\hat{x}_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2, c_1 = (x_3, x_1) / \| x_1 \|^2, c_2 = (x_3, x_2) / \| x_1 \|^2 .$$

Доказательство.

Рассмотрим ортогональное преобразование А, переводящее вектора x_1, x_2 в вектора E_1, E_2:

$$E_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}, E_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2} ,$$

$$\| E_1 \|_2 = \| E_2 \|_2 = 1, Ax_1 = E_1, Ax_2 = E_2,$$

$$A = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$A = A^{-1}, A^{\bullet} = A = A^{-1}$, (матрица А дана в базисе x_1, x_2). Здесь вектора E_1, E_2 совпадают с диагоналями ромба со стороной $\| x_1 \| = \| x_2 \| = 1$, уменьшенными в $\sqrt{2}$ раз. Данные диагонали ортогональны для обеих скалярных произведений.

Обратное преобразование A^{-1} тоже ортогонально и переводит вектора на диагоналях ромба E_1, E_2 в исходные стороны ромба x_1, x_2. Результат преобразования не зависит от скалярных произведений и переводит ортогональные в обеих метриках вектора снова в ортогональные вектора в обеих метриках: $A^{-1} E_1 = x_1, A^{-1} E_2 = x_2$; матрица преобразования А рассматривается в базисе x_1, x_2. Для второй метрики данный факт очевиден, для первого ортогонального преобразования вектора x_1, x_2 должны быть перпендикулярны как результат скалярного произведения

$$(x_1, x_2) = (A^{-1} E_1, A^{-1} E_2) =$$
$$E_{1k}^{\bullet} (A^{-1})^{\bullet}\ A^{-1} E_{2k} = (E_1, E_2) = 0 ,$$

так как $A = A^{-1} = A^{\bullet}$, (здесь $E_{1k}^{\bullet}$ и E_{2k} - вектор строка и вектор столбец координат векторов E_1 и E_2 соответственно в базисе x_1, x_2).

Мы доказали $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)_1 = 0$ с точки зрения преобразования координат при линейном преобразовании А.

Из этого факта, как и из теоремы 1 вытекает результат статьи [1] и приложения 1.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляет интерес численная проверка результатов статьи "Оптимальный линейный прогноз" и предложения 1 данной статьи, связанных с упрощенным алгоритмом прогноза, сформулированным в теореме 2 первой статьи (в алгоритме прогноза) и в предложении 1 данной второй статьи. Ортогональность векторов наблюдений с точки зрения ортогонального преобразования, доказанная в данной статье, означает, что вектора наблюдений после вращения на какой-либо угол можно использовать как ортогональные. Сравнение численных результатов с заранее известными, помогло бы определить область применения рассмотренного алгоритма прогноза.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Pavlov A.V. “Optimal linear prognosis", Moscow: International Journal of Open Information Technologies , Open Journal Systems, vol.8, no. 5, pp.8-12 ,2020.
Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/907/886

[2] М. Арато “Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами (Статистический подход),” Москва.: Наука., 1989.
[3] Венцель А.Д. “ Курс теории случайных процессов,” Москва.: Наука, 1975.
[4] Pavlov A.V. “Stochastic series of Fourier and its application to the theory of the filtering-prediction plastics (Book style with paper title and editor),”Moscow: Edd. of Moscow State Univers. nam. M. V. Lomonosov, facul. Mechanical-mathemat. , 2000.
[5] Павлов А.В. “Теорема типа больших уклонений для критерия хи-квадрат,” Успехи мат.наук. т. 51, 1, сс. 547–588, 1996.
[6] Pavlov A.V. “Prediction and filtering of random sequences with time-dependent expectation,” Moscow: Sc.Bulletin of MIREA. 2012, vol.12, no.1,pp.38-48, 2012.
[7] Pavlov A.V. “Reliable filtration in the "white noise", Moscow: International Journal of Open Information Technologies , Open Journal Systems, vol.3, no. 10, pp.1-5 ,2015.
Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217
[8] Pavlov A.V. “The Wold‘s equalies and linear estimations for not-stationary processes,” International Journal of Open Information Technologies Open Journal Systems, vol 3, no 7, pp.12-18, 2015. Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217
[9] М.Х.Ф.Дэвис. “Линейное оценивание и стохастическое управление”. Москва: Наука, 1984.

Andrey Valerianovich Pavlov (year of birth 1958**).**
Moscow University nam.M.V. Lomonosov, facul. mech.-math, 1975-1983.Moscow Institute of Radio-technics, Electronics, and Automatics-MTU, higher mathematics (1983-2020), (about 3 books and 39 works in Web of Science). Professor Pavlov is the member of Moscow Mathematical society.

Optimal linear prognosis II. Geometry in space

Andrey V. Pavlov

Abstract— **This article is the second part of the article "Optimal linear prognosis". We consider the a scalar production in the linear subspace of 2 vectors x_1, x_2 or the random values $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2$. With help of the production we obtain a new form of linear projection of the additional $x_3 = \xi_3$ vector to the subspace. By the scalar production as usually we determine two lengths of vectors. From point of a new metrics the projection must have the same length as for the initial first metrics. The elementary fact proves a basic result of article. We use the linear independence of the projection and the $x_3 - \hat{x}_3$ vector ($\hat{x}_3$ is the projection). The fact conflicts with the definition of length for the second metrics. It is necessary to enter some new units of length. The basic results of article explore the fact from different points of view. The introduction of new unit of vectors for the second metrics is impossible from point of the orthogonal linear transformations on plane.**

A diagonals of rhombus with the $\| x_1 \| = \| x_2 \|$ sides are orthogonal for both scalar productions. As the result of the orthogonal linear transformations of the diagonals we obtain the orthogonal x_1, x_2 vectors for both scalar productions. In the symmetric situation it is possible to suppose, that the x_1, x_2 vector are orthogonal, and the rapid algorithm of finding of optimal linear estimation of the $x_{n+1} = \xi_{n+1}$ vector on the $\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n$ vectors ensues from the projection as for $n = 2$ so as for $n > 2$. The $\xi_1, ..., \xi_n, \xi_{n+1}$ values are uncentered and unstationary.

The $(x_1, x_1) = M \xi_1 \xi_2$ equality sets the basic first scalar production. The result we obtain with help of a new scalar production in the linear subspace of n vectors by analogy with the second scalar production on the plane. It was interestingly to compare new methods to old from point of numeral methods.

***Keywords*—Optimum linear estimation, geometry in space, orthogonality of vectors for different scalar products, lengths in new metrics, linear dependence and the linear transformations, geometry of Lobachevsky**

References

[1] Pavlov A.V. "Optimal linear prognosis", Moscow: International Journal of Open Information Technologies , Open Journal Systems, vol.8, no. 5, pp.8-12 ,2020.
Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/907/886

[2] M. Arato "Linejnye stohasticheskie sistemy s postojannymi kojefficientami (Statisticheskij podhod)," Moskva.: Nauka., 1989.

[3] Vencel' A.D. "Kurs teorii sluchajnyh processov," Moskva.: Nauka, 1975.

[4] Pavlov A.V. "Stochastic series of Fourier and its application to the theory of the filtering-prediction plastics (Book style with paper title and editor),"Moscow: Edd. of Moscow State Univers. nam. M. V. Lomonosov, facul. Mechanical-mathemat. , 2000.

[5] Pavlov A.V. "Teorema tipa bol'shih uklonenij dlja kriterija hi-kvadrat," Uspehi mat.nauk. t. 51, 1, ss. 547–588, 1996.

[6] Pavlov A.V. "Prediction and filtering of random sequences with time-dependent expectation," Moscow: Sc.Bulletin of MIREA. 2012, vol.12, no.1,pp.38-48, 2012.

[7] Pavlov A.V. ". Reliable filtration in the "white noise", Moscow: International Journal of Open Information Technologies , Open Journal Systems, vol.3, no. 10, pp.1-5, 2015.
Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217

[8] Pavlov A.V. "The Wold's equalies and linear estimations for not-stationary processes," International Journal of Open Information Technologies Open Journal Systems, vol 3, no 7, pp.12-18, 2015. Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217

[9] M.H.F.Djevis. "Linejnoe ocenivanie i stohasticheskoe upravlenie". Moskva: Nauka, 1984.