

# Построение непрерывных кусочно-линейных границ для композиции функций от одной переменной.

А.Л. Усов<sup>1</sup>

**Аннотация**—В данной статье рассматривается проблема построения нижних и верхних ограничивающих функций для одномерных функций. Эта проблема имеет важное значение в глобальной детерминированной оптимизации, где такие границы используются как для оценки целевой функции так и для уменьшения области поиска. На практике существующие подходы в глобальной оптимизации не всегда показывают высокую точность ограничивающих функций. В статье развивается ранее предложенный подход использования кусочно-линейных границ в качестве оценки функций одной переменной. Основное внимание уделено построению кусочно-линейных границ для композиции функций, а также доказательству непрерывности данных границ. Рассмотрены необходимые теоретические утверждения с доказательствами, которые позволяют выполнять синтез непрерывных кусочно-линейных оценок по выражению функции, представленной в алгебраической форме. На примере композиции из тригонометрических функций детально рассмотрен алгоритм построения нижней кусочно-линейной границы с использованием свойств выпуклости и вогнутости. Вычислительный эксперимент, представленный в статье, показывает метод построения нижней кусочно-линейной границы и сравнивает предложенный подход с техникой использования интервального анализа и арифметикой скосов. Предложенный подход демонстрирует высокую точность и непрерывность полученных границ.

**Ключевые слова**—одномерная глобальная оптимизация, непрерывные функции, кусочно-линейные функции, оценки, детерминированные методы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена развитию теоретических основ для построения верхней и нижней ограничивающей кусочно-линейной функции для целевой одномерной функции. Первоначальные основы для этого подхода были представлены в трудах IX Международной Конференции Оптимизация и Приложения (ОПТИМА-2018) [1] и статье [2]. Основной фокус статьи сделан на построении кусочно-линейных границ для композиции функций одной переменной и доказательстве их непрерывности. Данная работа углубляет теоретические основы и детализирует алгоритм построения кусочно-линейных границ для композиции функций. На основе данного и ранее проведенного исследования будет возможна разработка программного комплекса автоматизирующего процесс построения кусочно-линейных границ для одномерных функций.

<sup>\*</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 17-37-50082

<sup>1</sup>А.Л. Усов — аспирант Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. a.lusov@mail.ru

Функция  $\phi(x)$  называется нижней(верхней) ограничивающей функцией для целевой функции  $f(x)$  на интервале  $[a, b]$  если  $f(x) \geq \phi(x)$  ( $f(x) \leq \phi(x)$ ) для любого  $x \in [a, b]$ .

Важность построения нижних и верхних границ для целевых функций и ограничений обусловлена тем, что они играют принципиальное значение в глобальной детерминированной оптимизации. Допустим, что мы знаем нижнюю ограничивающую функцию  $\phi(x)$  для заданной целевой функции  $f(x)$ . Очевидно, что мы можем безопасно исключить из дальнейшего рассмотрения множество, определенного следующим неравенством:

$$\phi(x) \geq f_r - \varepsilon, \quad (1)$$

где  $f_r$  является текущим рекордом (лучшее найденное решение), а  $\varepsilon$  является заведомо установленной точностью решения [3, 4].

Неравенство 1 может быть решено эффективно только когда функция  $\phi(x)$  имеет простую структуру (например линейную или квадратичную) потому что в противном случае данная задача была бы не менее сложной чем сам поиск глобального минимума. В этой работе исследуется одна из функций подобного типа: *кусочно-линейная* (или сокращенно КСЛ функция). Ранее в статьях [1] и [2] предлагался метод получения КСЛ границ из алгебраического представления функции (формулы). При этом оценка границ определяется правилами, которые последовательно применяются начиная от нижней части дерева выражения(листьев) до корня дерева. В данной статье этот метод развивается для применения его к композиции функций одной переменной. Стоит отметить важность вопроса непрерывности нижних и верхних ограничивающих функций в методах глобальной оптимизации так как они позволяют эффективно сокращать область поиска глобального минимума. Доказательство непрерывности получаемых КСЛ нижних и верхних границ детально рассмотрено в данной статье.

Отметим несколько работ связанных с данной тематикой. Вогнутые нижние и выпуклые верхние КСЛ границы, состоящие из двух отрезков, рассматривались в работе [5, 6]. Авторы предлагают правила для автоматической создания границ используя алгебраическое представление выражения.

В отличие от оценок, состоящих из двух линейных сегментов, рассмотренных в [5–7], подход на основе КСЛ ограничивающих функций позволяет использовать произвольное число сегментов. Кроме того, предложенный подход отличается от выпуклых оценок и других методов

основанных на выпуклости разработанных в работах [8–11]. Основное различие между подходами заключается в том, что в настоящей работе рассматриваются произвольные КСЛ функции, не ограниченные только выпуклым или вогнутым случаем.

Эта статья организована следующим образом: Секция II описывает теоретические основы построения КСЛ границ для композиции функций. В секции III обсуждаются алгоритмы применяемые для построения композиции КСЛ функций и границ. Доказательство непрерывности кусочно-линейных границ для композиции функций рассмотрено в секции IV. Вычислительный эксперимент, детально показывающий применение алгоритма построения нижней КСЛ границы для композиции функций, представлен в секции V.

## II. Построение КСЛ границ для композиции функций

*Кусочно-линейная функция* на интервале  $[a, b]$  определяется как последовательность сегментов  $z_i$  соединяющих точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Более формально:

$$\psi(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), x \in [x_i, x_{i+1}], i = 1, \dots, n-1.$$

где  $n \geq 2, a = x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ .

В дальнейшем кусочно-линейную функцию будем обозначать последовательностью ее вершин, заключенных в фигурные скобки:

$$\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}.$$

В данной работе большое внимание уделено оцениванию композиции функций  $h(x) = f(g(x)), x \in [a, b]$ . Пусть функции  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  являются нижней и верхней КСЛ границами для внутренней функции  $g(x)$  на этом интервале:

$$\underline{\mu}_g(x) \leq g(x) \leq \overline{\mu}_g(x), x \in [a, b]. \quad (2)$$

Обозначим  $c = \min_{x \in [a, b]} \underline{\mu}_g(x), d = \max_{x \in [a, b]} \overline{\mu}_g(x)$ . Пусть функции  $\underline{\mu}_f(x)$  и  $\overline{\mu}_f(x)$  являются нижней и верхней КСЛ границей для внешней функции  $f(x)$  на интервале  $[c, d]$ :

$$\underline{\mu}_f(x) \leq f(x) \leq \overline{\mu}_f(x), x \in [c, d]. \quad (3)$$

Ниже даны утверждения по основным правилам построения композиции КСЛ границ. Утверждения с 1 по 5 были рассмотрены и доказаны ранее в статье [1] и приводятся без доказательств.

*Утверждение 1:* Пусть  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  являются КСЛ функциями на интервалах  $[a, b]$  и  $[c, d]$  соответственно, где  $c = \min_{x \in [a, b]} \phi(x), d = \max_{x \in [a, b]} \phi(x)$ . Тогда композиция функции  $\omega(x) = \psi(\phi(x))$  является КСЛ функцией на  $[a, b]$ .

*Утверждение 2:* Если функция  $\underline{\mu}_f(x)$  монотонно не убывает на интервале  $[c, d]$ , тогда композиция функций  $\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))$  является нижней КСЛ границей для функции  $h(x)$  на  $[a, b]$ .

*Утверждение 3:* Если функция  $\underline{\mu}_f(x)$  монотонно не возрастает на интервале  $[c, d]$  тогда композиция функций  $\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))$  является нижней КСЛ границей для функции  $h(x)$  на  $[a, b]$ .

*Утверждение 4:* Если функция  $\overline{\mu}_f(x)$  монотонно не убывает на интервале  $[c, d]$  тогда композиция функций

$\overline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))$  является верхней КСЛ границей для функции  $h(x)$  на  $[a, b]$ .

*Утверждение 5:* Если функция  $\overline{\mu}_f(x)$  is монотонно не возрастает на интервале  $[c, d]$  тогда композиция функций  $\overline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))$  является КСЛ верхней границей для функции  $h(x)$  на  $[a, b]$ .

*Утверждение 6:* Если функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является квазивогнутой на  $[c, d]$ , то функция  $\min(\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)))$  является нижней КСЛ границей для функции  $h(x)$  на  $[a, b]$ .

*Доказательство:* В соответствии с Утверждением 1  $\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))$  и  $\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))$  являются КСЛ функциями. Остается доказать, что  $\min(\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))) \leq h(x)$  на  $[a, b]$ . Рассмотрим  $x \in [a, b]$ . Из неравенства (2) получаем  $\underline{\mu}_g(x) \leq g(x) \leq \overline{\mu}_g(x)$ .

Так как  $\underline{\mu}_g(x), \overline{\mu}_g(x), g(x) \in [c, d]$  и  $\underline{\mu}_f(x)$  является квазивогнутой на интервале  $[c, d]$  мы получаем, что  $\min(\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))) \leq \underline{\mu}_f(g(x))$ . Из уравнения (3) следует, что  $\underline{\mu}_f(g(x)) \leq f(g(x)) = h(x)$ . Таким образом,  $\min(\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))) \leq h(x)$  для любого  $x \in [a, b]$ .

*Утверждение 7:* Если  $\overline{\mu}_f(x)$  является квазивыпуклой на интервале  $[c, d]$  тогда  $\max(\overline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \overline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)))$  является верхней КСЛ границей для функции  $h(x)$  на  $[a, b]$ .

*Доказательство:* В соответствии с Утверждением 1  $\overline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))$  и  $\overline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))$  являются КСЛ функциями. Остается доказать, что  $\max(\overline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \overline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))) \geq h(x)$  on  $[a, b]$ . Рассмотрим  $x \in [a, b]$ . Из уравнения (2) мы получили, что  $\underline{\mu}_g(x) \leq g(x) \leq \overline{\mu}_g(x)$ .

Так как  $\underline{\mu}_g(x), \overline{\mu}_g(x), g(x) \in [c, d]$  и  $\overline{\mu}_f(x)$  является квазивыпуклой на интервале  $[c, d]$  мы получаем, что  $\max(\overline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \overline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))) \geq \overline{\mu}_f(g(x))$ . Из уравнения (3) следует, что  $\overline{\mu}_f(g(x)) \geq f(g(x)) = h(x)$ . Таким образом,  $\max(\overline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \overline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))) \geq h(x)$  для любого  $x \in [a, b]$ .

Если ни одно из утверждений 1—7 не применимо, то используется простая интервальная оценка (горизонтальные сегменты) в качестве КСЛ границ, как указано в следующем очевидном утверждении:

*Утверждение 8:* КСЛ (константная) функция  $\min_{x \in [c, d]}(\underline{\mu}_f(x))$  является КСЛ нижней границей для  $h(x)$  на интервале  $[a, b]$ . КСЛ (константная) функция  $\max_{x \in [c, d]}(\overline{\mu}_f(x))$  КСЛ верхней границей для  $h(x)$  на интервале  $[a, b]$ .

## III. Алгоритмы построения композиции КСЛ функций и границ.

### A. Алгоритм построения композиция КСЛ функций.

Для наглядности данный алгоритм сопровождается примером построения композиции КСЛ функций, представленный на рисунках 1—3. Рассмотрим вычисление суперпозиции КСЛ функций  $\omega(x) = \psi(\phi(x))$  на интервале  $x \in [a, b]$ . Внутренняя КСЛ функция  $\phi(x)$  (Рис. 1) определена как:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & x \in [x'_1 = a, x'_2] \\ \phi_2(x), & x \in [x'_2, x'_3] \\ \dots \\ \phi_n(x), & x \in [x'_n, x'_{n+1} = b] \end{cases}$$

Область значений внутренней КСЛ функции  $\phi(x) \in [c, d]$  для  $x \in [a, b]$  является областью определения внешней КСЛ функции  $\psi(x)$  (Рис. 2):

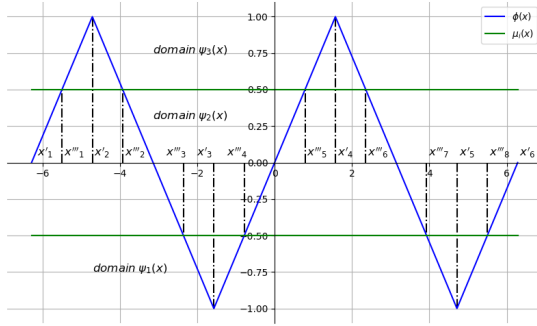


Рис. 1: Пересечение внутренней КСЛ функции  $\phi(x)$  с горизонтальными прямыми  $\mu_i(x)$  на интервале  $x \in [-2\pi, 2\pi]$

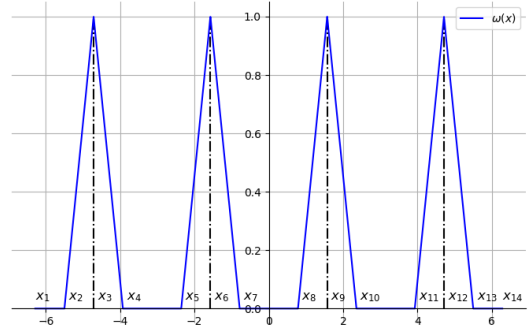


Рис. 3: Композиция КСЛ функции  $\omega(x)$  на интервале  $x \in [-2\pi, 2\pi]$

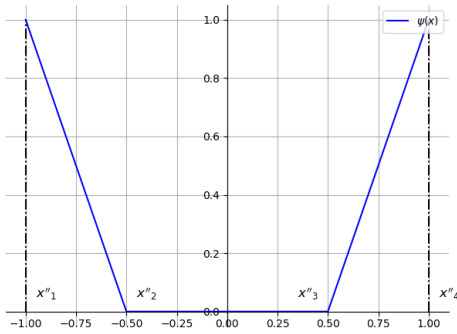


Рис. 2: Внешняя КСЛ  $\psi(x)$  на интервале  $x \in [-1, 1]$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in [x''_1 = c, x''_2] \\ \psi_2(x), & x \in [x''_2, x''_3] \\ \dots \\ \psi_k(x), & x \in [x''_k, x''_{k+1} = d] \end{cases}$$

Пересечем функцию  $\phi(x)$  с горизонтальными прямыми  $\mu_i(x) = x''_i, i \in \{1, 2, \dots, +1\}$ . Эти прямые разбивают интервал  $[c, d]$  на части, которые являются областью определения функции  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x)$  соответственно. Множество  $X''' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_{m+1}\} \in [a, b]$  состоит из всех абсцисс точек пересечения функций  $\phi(x)$  и  $\mu_i(x)$ .

Для построения композиции  $\psi(\phi(x))$  построим множество  $X$  следующим образом:

$$X = X' \cup X''' = \{x_1, x_2, \dots, x_{t+1}\}$$

и определим соответствующую КСЛ функцию  $\omega(x)$  (Рис. 3):

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) = \hat{\psi}_1(\hat{\phi}_1(x)), & x \in [x_1 = a, x_2], \\ \omega_2(x) = \hat{\psi}_2(\hat{\phi}_2(x)), & x \in [x_2, x_3], \\ \dots \\ \omega_t(x) = \hat{\psi}_t(\hat{\phi}_t(x)), & x \in [x_t, x_{t+1} = b], \end{cases}$$

где  $\hat{\psi}_i$  и  $\hat{\phi}_i, i = 1, \dots, t$  - соответствующие линейные сегменты КСЛ функций  $\psi(x)$  и  $\phi(x)$ .

### В. Алгоритм для построения КСЛ границы для композиции функции

В этом разделе подробно рассматривается алгоритм построения нижней КСЛ границы для композиции функций на основе утверждений 2, 3, 6, 8. Для наглядности проиллюстрируем этот алгоритм на примере композиции функции  $h(x) = \sin(\pi \cdot \cos(x)), x \in [-2\pi, 0]$ , представленной на рисунке 8. Поскольку алгоритм построения верхней КСЛ границы аналогичен, его описание опущено.

Пусть  $h(x) = f(g(x)), x \in [a, b]$ . Для построения нижней PWL границы для  $h(x)$  рассмотрим несколько возможных случаев:

- 1) Внешняя функция  $f(x)$  не убывает и является монотонной на всей области ее определения. Примерами таких функций являются  $\ln(x), e^x, \sqrt{x}, x^3, \arcsin(x), tg(x)$  и т.д. В этом случае следующие последовательные шаги выполняются:
  - a) Построить нижнюю КСЛ границу  $\underline{\mu}_g(x)$  для внутренней функции  $g(x)$  на интервале  $x \in [a, b]$ .
  - b) Построить нижнюю монотонную КСЛ границу  $\underline{\mu}_f(x)$  для внешней функции  $f(x)$  на интервале  $[c, d] = [\min_{x \in [a, b]} \underline{\mu}_g(x), \max_{x \in [a, b]} \underline{\mu}_g(x)]$ .
  - c) Применить операцию вычисления композиции КСЛ функций  $\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))$  (секция III-A). Конец алгоритма.
- 2) Внешняя функция  $f(x)$  не возрастает и является монотонной на всей области ее определения. Примерами таких функций являются  $-\ln(x), -exp(x), -sqrt(x), -x^3, arccos(x), ctg(x)$  и т.д. В этом случае следующие последовательные шаги выполняются:
  - a) Построить верхнюю КСЛ границу  $\overline{\mu}_g(x)$  для внутренней функции  $g(x)$  на интервале  $x \in [a, b]$ .
  - b) Построить нижнюю монотонную КСЛ границу  $\underline{\mu}_f(x)$  для внешней функции  $f(x)$  на области значений функции  $\overline{\mu}_g(x) \in [c, d]$ .

- с) Применить операцию вычисления композиции КСЛ функций  $\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))$  (секция III-A). Конец алгоритма.
- 3) Внешняя функция  $f(x)$  не является монотонной на всей области определения. Примерами таких функций являются  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $x^{2n} : n \in \mathbb{N}$ ,  $|x|$  и т.д. В этом случае следующие последовательные шаги выполняются:
- а) Построить верхнюю  $\overline{\mu}_g(x)$  и нижнюю  $\underline{\mu}_g(x)$  КСЛ границы для внутренней функции  $g(x)$  на  $x \in [a, b]$  (Рис. 4).

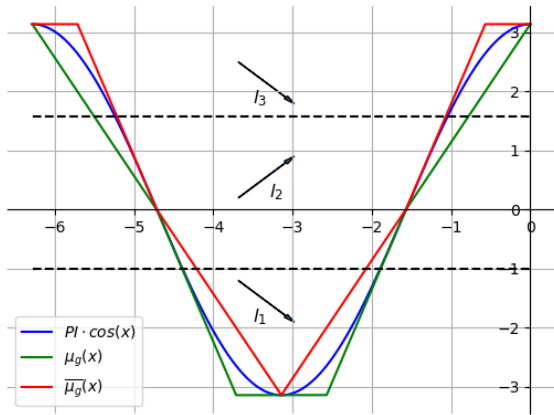


Рис. 4: Нижняя и верхняя КСЛ границы внутренней функции  $\pi \cdot \cos(x)$  на интервале  $x \in [-2\pi, 0]$ . Горизонтальные прямые показывают деление области определения функции  $\mu_f(x)$  на регионы соответствующие изменениям ее монотонности.

- б) Построить нижнюю КСЛ границу  $\underline{\mu}_f(x)$  для внешней функции  $f(x)$  на интервале

$$[c, d] = \left[ \min_{x \in [a, b]} \underline{\mu}_g(x), \max_{x \in [a, b]} \overline{\mu}_g(x) \right].$$

(Fig. 5). В случае если  $\underline{\mu}_f(x)$  монотонно не убывает на  $[c, d]$  тогда перейти на шаг 1. Если функция монотонно не возрастает тогда перейти на шаг 2. В противном случае перейти на следующий шаг.

- с) Разделить интервал  $[c, d]$  на последовательные сегменты где функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является монотонной (Рис. 5). Полученные сегменты обозначим множеством  $L = \{[c, y_1], [y_1, y_2], \dots, [y_n, d]\}$ . Каждый элемент этого множества назовем слоем  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Кроме того, обозначим точки разделения интервала  $[c, d]$  множеством  $M = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .
- д) Пересечь графики функций  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  на интервале  $x \in [a, b]$  горизонтальными прямыми  $y = y_i : y_i \in M$  (Рис. 4). Обозначим абсциссы точек пересечения функций  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  с горизонтальными прямыми на интервале  $[a, b]$  множеством  $X = \{x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_k = b\}$  (Рис. 4 и 6).

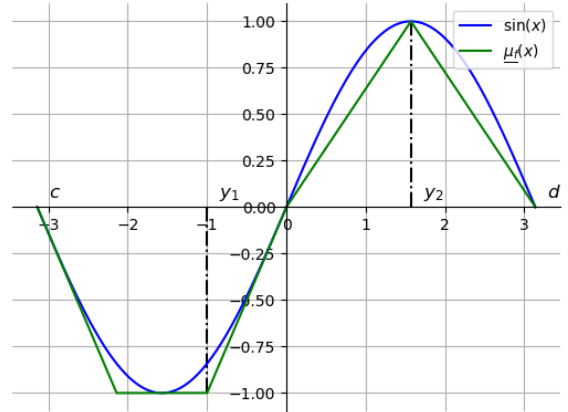


Рис. 5: Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является нижней КСЛ границей для внешней функции  $\sin(x)$  на интервале  $x \in [-\pi, \pi]$ . Вертикальные прямые показывают интервалы изменения монотонности функции.

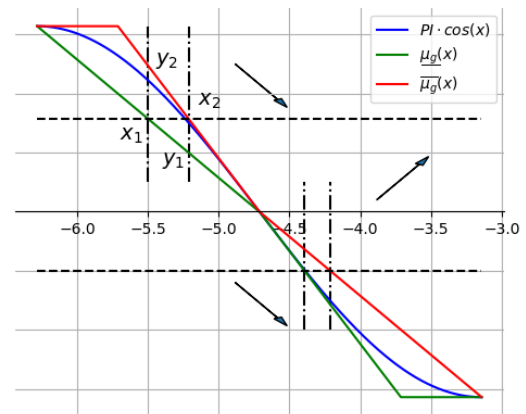


Рис. 6: Построение горизонтальных и вертикальных прямых для внутренней функции  $\pi \cdot \cos(x)$ . Стрелки показывают изменение характера монотонности функции  $\underline{\mu}_f(x)$  на слое.

- е) Для каждого интервала  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, k$ : Если область значений функций  $\overline{\mu}_g(x)$  и  $\underline{\mu}_g(x)$  на интервале  $[x_j, x_{j+1}]$  принадлежит одному слою  $l_i$  тогда:
- В случае не возрастания  $\underline{\mu}_f(x)$  на слое  $l_i$  (Рис. 7) применить операцию вычисления композиции КСЛ функции  $\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))$  на  $[c', d'] = \left[ \min_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \overline{\mu}_g(x), \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \overline{\mu}_g(x) \right]$ .
  - В случае не убывания  $\underline{\mu}_f(x)$  на слое  $l_i$  применить операцию вычисления композиции КСЛ функции  $\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))$  on  $[c', d'] = \left[ \min_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \underline{\mu}_g(x), \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \underline{\mu}_g(x) \right]$ .
- Рассмотрим случай когда область значения функций  $\overline{\mu}_g(x)$  и  $\underline{\mu}_g(x)$  на интервале  $[x_j, x_{j+1}]$

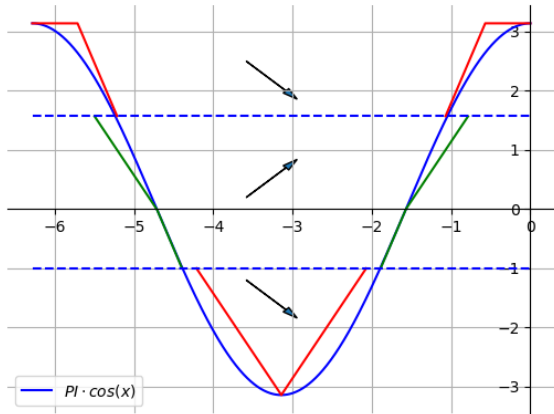


Рис. 7: Сегменты функций  $\overline{\mu}_g(x)$  и  $\underline{\mu}_g(x)$  используемые для вычисления нижней границы композиции функции  $\sin(\pi \cdot \cos(x))$  на интервале  $x \in [-2\pi, 0]$ .

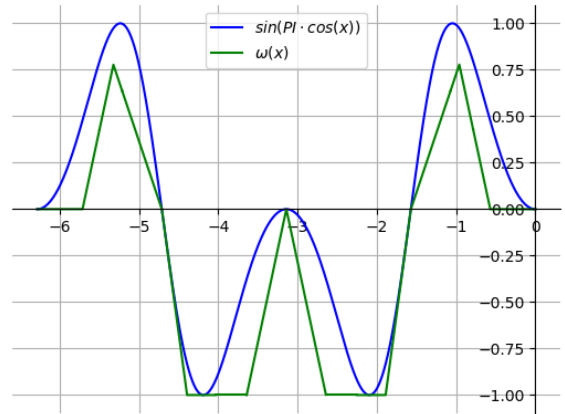


Рис. 8: Нижняя КСЛ граница композиции функции  $\sin(\pi \cdot \cos(x))$  для  $x \in [-2\pi, 0]$

принадлежит различным слоям (Рис. 6). Обозначим интервал

$$[c', d'] = \left[ \min_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \underline{\mu}_g(x), \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \overline{\mu}_g(x) \right]$$

Рассмотрим два возможных случая:

- i) В случае квазивогнутости функции  $\mu_f(x)$  применить операцию вычисления композиции КСЛ функций  $\mu_f(\min(\underline{\mu}_g(x), \overline{\mu}_g(x)))$  на интервале  $[c', d']$  (Утверждение 6).
- ii) В противном случае построить горизонтальный отрезок  $y = \min(\mu_f())$  на интервале  $[c', d']$  (Утверждение 8). Конец алгоритма (Рис. 8).

На рисунке 7 показаны сегменты функций  $\overline{\mu}_g(x)$  и  $\underline{\mu}_g(x)$ , участвующие в построении нижней КСЛ границы для композиции функций  $\sin(\pi \cdot \cos(x))$ . Результирующая нижняя КСЛ граница для этой функции, построенная по предложенному алгоритму, представлена на рисунке 8.

#### IV. Непрерывность кусочно-линейных границ для композиции функций.

Непрерывность композиции функций гарантируется теоремой *О Пределе и непрерывности композиции функций* [12] поэтому, при условии если функции  $\underline{\mu}_g, \overline{\mu}_g, \underline{\mu}_f, \overline{\mu}_f$  изначально непрерывны, то оценки получаемые в утверждениях 1–8 тоже непрерывны. В тоже время, если при конструировании нижней(верхней) границы композиции функций  $h(x) = f(g(x))$  данные утверждения применяются последовательно несколько раз, то непрерывность может быть нарушена.

В процессе исследования непрерывности кусочно-линейных границ для композиции функции  $h(x) = f(g(x))$  было установлено, что в общем случае, когда внешняя миноранта  $\underline{\mu}_f(y)$  меняет характер своей монотонности более одного раза(т.е не является ни выпуклой ни вогнутой), нижняя граница  $\underline{h}(x)$  композиции функций

может иметь точки разрыва. Аналогично это справедливо и для верхней границы  $\overline{h}(x)$ .

Рассмотрим пример разрыва нижней границы  $\underline{h}(x)$  для композиции функций  $f(g(x))$ ,  $x \in [a, b]$ . На Рис. 9 изображена внешняя миноранта  $\underline{\mu}_f(y)$ , которая меняет характер монотонности на интервале  $[c, d]$  в точках  $y_1, y_2 \in [c, d]$  и имеет минимумы в точках  $c, y_2 \in [c, d]$ . На Рис. 10 отображены две горизонтальные прямые  $y = y_1$  и  $y = y_2$ , создающие три слоя на графике внутренних функций  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$ . Между пунктирными вертикальными прямыми расположены области для которых вычисляются оценки композиции функций  $f(g(x))$ ,  $x \in [a, b]$  в соответствии с утверждениями секции II.

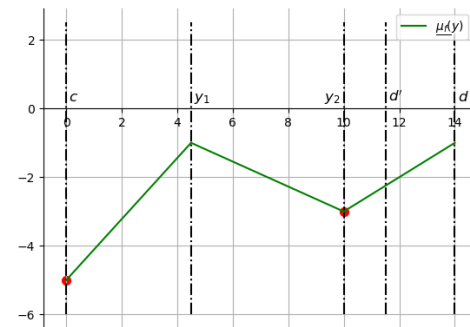


Рис. 9: Внешняя миноранта  $\underline{\mu}_f(y)$  меняет характер монотонности на интервале  $[c, d]$  в точках  $y_1, y_2 \in [c, d]$ .

На интервале  $[a, x_1]$   $y_1 = \min(\underline{\mu}_g(x))$ , а  $d = \max(\overline{\mu}_g(x))$ . Внешняя миноранта  $\underline{\mu}_f(y)$ ,  $y \in [y_1, d]$  является выпуклой. В соответствии с утверждением 8 нижняя граница композиции функций  $f(g(x))$  вычисляется как  $\underline{h}(x) = \min_{y \in [y_1, d]} (\underline{\mu}_f(y)) = \underline{\mu}_f(y_2)$ ,  $x \in [a, x_1]$ . Заметим, что в точке  $x_1$  нижняя граница равна  $\underline{h}(x_1) = \underline{\mu}_f(y_2)$ .

На интервале  $[x_1, b]$   $c = \min(\underline{\mu}_g(x))$ , а  $d' = \max(\overline{\mu}_g(x))$ . Внешняя миноранта  $\underline{\mu}_f(y)$ ,  $y \in [c, d']$  меняет свою монотонность в точках  $y_1, y_2 \in [c, d']$ . В соответствии с утверждением 8 нижняя граница композиции функций

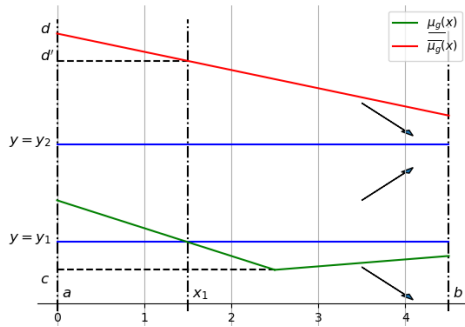


Рис. 10: Три слоя образованные горизонтальными прямыми  $y = y_1$  и  $y = y_2$  на графике оценок внутренних функций  $\mu_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$   $x \in [a, b]$ . Стрелки показывают изменение характера монотонности внешней функции  $\mu_f(y)$ ,  $y \in [c, d]$ .

$f(g(x))$  вычисляется как  $\underline{h}(x) = \min_{y \in [c, d]}(\mu_f(y)) = \mu_f(c)$ ,  $x \in [x_1, x_2]$ . При этом  $\underline{h}(x_1) = \mu_f(c)$ . Неравенство значений в точке  $x_1$  означает, что в данной точке нижняя граница  $\underline{h}(x)$  имеет разрыв (Рис. 11).

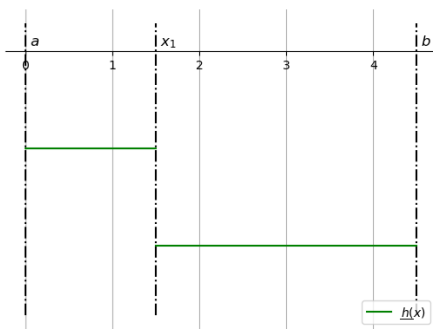


Рис. 11: Разрыв нижней границы  $\underline{h}(x)$  композиции функций  $h(x) = f(g(x))$  в точке  $x_1$ .

В процессе дальнейшего исследования был выделен частный случай для которого можно установить непрерывность. Основным условием этого случая является необходимость того, чтобы внешняя миноранта(мажоранта) меняла монотонность не более одного раза. Стоит отметить, что данный частный случай не является редким т.к охватывает большой класс функций. Большинство элементарных функций(и соответственно их кусочно-линейные оценки) являются выпуклыми, вогнутыми или монотонными. Что касается функций типа  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$ , то их монотонность меняется на относительно больших интервалах, а на небольших интервалах они также представляют из себя выпуклые, вогнутые или монотонные функции.

Рассмотрим частный случай, когда внешняя миноранта меняет монотонность один раз. На Рис. 12 изображена внешняя выпуклая миноранта меняющая монотонность в точке  $y_1 \in [c, d]$ . Рис. 13 демонстрирует пересечение миноранты  $\mu_g(x)$  и мажоранты  $\overline{\mu}_g(x)$ ,  $x \in [a, b]$  с горизонтальной прямой  $y = y_1$ . В соответствии с алгоритмом

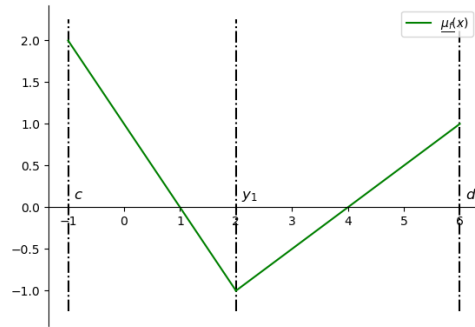


Рис. 12: Внешняя миноранта  $\mu_f(y)$  меняет монотонность один раз в точке  $y_1 \in [c, d]$ .

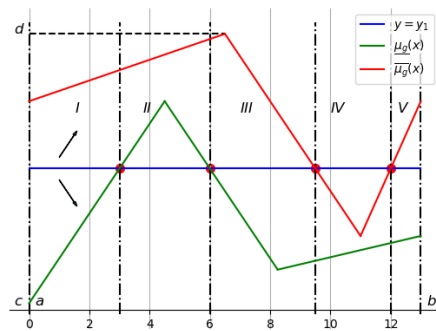


Рис. 13: Два слоя образованные горизонтальной прямой  $y = y_1$  на графике внутренних функций  $\mu_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$   $x \in [a, b]$ . Стрелки показывают изменение характера монотонности внешней функции  $\mu_f(y)$ ,  $y \in [c, d]$ .

III-V пунктирные вертикальные линии разбивают интервал  $[a, b]$  на подинтервалы(I, II, III, IV, V) для которых применяются разные правила для конструирования нижней границы  $\underline{h}(x)$ .

Основные идеи лежащие в доказательстве непрерывности  $\underline{h}(x)$  при условии, что  $\mu_f(y)$  меняет монотонность один раз следующие:

- 1) Разрыв нижней границы  $\underline{h}(x)$  потенциально может случиться только при применении различных типов оценок.
- 2) Смена типа оценок происходит в точке пересечения горизонтальной прямой  $y = y_1$  с нижней  $\mu_g(x)$  и верхней минорантой  $\overline{\mu}_g(x)$ .
- 3) Классифицируем точки пересечения из п. 2:
  - a) Пересечение  $\mu_g(x)$  с  $y = y_1$  при возрастании.
  - b) Пересечение  $\mu_g(x)$  с  $y = y_1$  при убывании.
  - c) Пересечение  $\overline{\mu}_g(x)$  с  $y = y_1$  при возрастании.
  - d) Пересечение  $\overline{\mu}_g(x)$  с  $y = y_1$  при убывании.
- 4) Выделим два частных случая:
  - a)  $\mu_f(y)$  является выпуклой и меняет монотонность один раз.
  - b)  $\mu_f(y)$  является вогнутой и меняет монотонность один раз.
- 5) Докажем, что  $\underline{h}(x)$  не имеет разрывов во всех возможных комбинация п. 3 и п. 4

- a) 4а и 3а.
- b) 4а и 3б.
- с) 4а и 3с.
- d) 4а и 3д.
- e) 4б и 3а.
- f) 4б и 3б.
- g) 4б и 3с.
- h) 4б и 3д.

Ниже даны утверждения и доказательства случаев 5а и 5е. Остальные случаи доказываются аналогично этим двум. Также отметим, что доказательства непрерывности верхней границы  $\bar{h}(x)$  выполняются по такому же принципу как для нижней границы  $\underline{h}(x)$ .

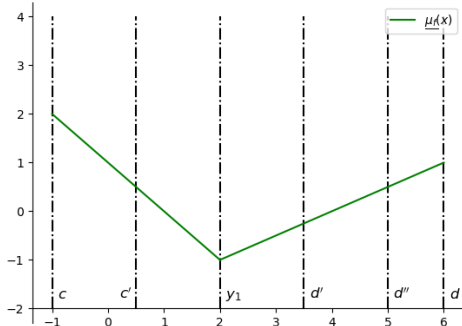


Рис. 14: Выпуклая внешняя миноранта  $\underline{\mu}_f(y)$  меняет монотонность в точке  $y_1 \in [c, d]$ .

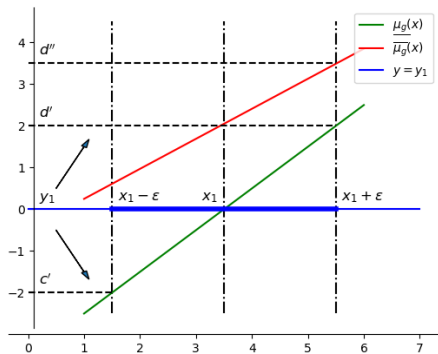


Рис. 15: Возрастание внутренней миноранты  $\underline{\mu}_g(x)$  в окрестности точки  $x_1 \in [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \subseteq [a, b]$  и пересечение прямой  $y = y_1$  в точке  $x_1$ . Стрелки показывают изменение характера монотонности внешней миноранты  $\underline{\mu}_f(y)$ ,  $y \in [c, d]$ .

**Утверждение 9:** Пусть функция  $\underline{\mu}_f(y)$ ,  $y \in [c, d]$  является выпуклой и меняет характер своей монотонности в точке  $y_1 \in [c, d]$ (Рис. 14). Кроме того, функция  $\underline{\mu}_g(x)$  возрастает в окрестности точки  $x_1 \in [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \subseteq [a, b]$  и пересекает прямую  $y = y_1$  в точке  $x_1$ (Рис. 15). Тогда нижняя граница  $\underline{h}(x)$  композиции функций  $f(g(x))$  не имеет разрыва в точке  $x_1$ .

**Доказательство:** Рассмотрим построение  $\underline{h}(x)$  в окрестности точки  $x_1 \in [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon]$ :

На интервале  $[x_1 - \epsilon, x_1]$   $c' = \min_{x \in [x_1 - \epsilon, x_1]}(\underline{\mu}_g(x))$ , а  $d' = \max_{x \in [x_1 - \epsilon, x_1]}(\bar{\mu}_g(x))$ . Так как  $\underline{\mu}_f(y)$  является

выпуклой на интервале  $[c', d']$ , то в соответствии с утверждением 8  $\underline{h}(x) = \min_{y \in [c', d']}(\underline{\mu}_f(y)) = \underline{\mu}_f(y_1)$ ,  $x \in [x_1 - \epsilon, x_1]$ .

На интервале  $[x_1, x_1 + \epsilon]$   $y_1 = \min_{x \in [x_1, x_1 + \epsilon]}(\underline{\mu}_g(x))$ , а  $d'' = \max_{x \in [x_1, x_1 + \epsilon]}(\bar{\mu}_g(x))$ . Так как  $\underline{\mu}_f(y)$  возрастает на интервале  $[y_1, d'']$ , то в соответствии с утверждением 2  $\underline{h}(x) = \underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))$ ,  $x \in [x_1, x_1 + \epsilon]$ .

Рассмотрим пределы полученных оценок слева и справа от точки  $x_1$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} \underline{h}(x) = \min_{y \in [c', d']}(\underline{\mu}_f(y)) = \underline{\mu}_f(y_1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1 + 0} \underline{h}(x) = \lim_{x \rightarrow x_1 + 0} \underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)) = \underline{\mu}_f(y_1)$$

Равенство пределов означает, что функция  $\underline{h}(x)$  не имеет разрыва в точке  $x_1$ .

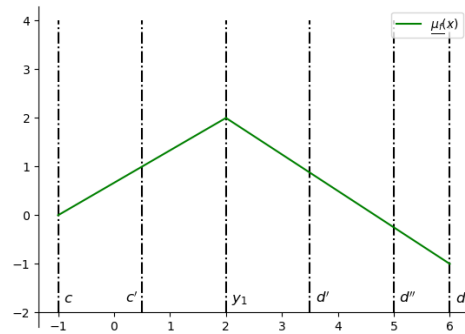


Рис. 16: Вогнутая внешняя миноранта  $\underline{\mu}_f(y)$  меняет монотонность в точке  $y_1 \in [c, d]$ .

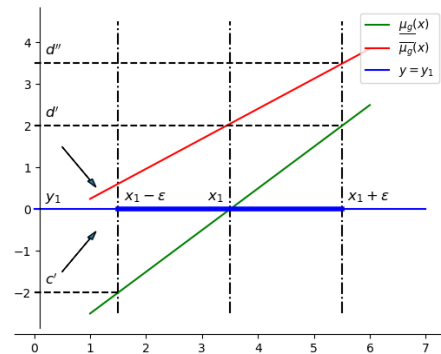


Рис. 17: Возрастание внутренней миноранты  $\underline{\mu}_g(x)$  в окрестности точки  $x_1 \in [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \subseteq [a, b]$  и пересечение прямой  $y = y_1$  в точке  $x_1$ . Стрелки показывают изменение характера монотонности внешней миноранты  $\underline{\mu}_f(y)$ ,  $y \in [c, d]$ .

**Утверждение 10:** Пусть функция  $\underline{\mu}_f(y)$ ,  $y \in [c, d]$  является вогнутой и меняет характер своей монотонности в точке  $y_1 \in [c, d]$ (Рис. 16). Кроме того, функция  $\underline{\mu}_g(x)$  возрастает в окрестности точки  $x_1 \in [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \subseteq [a, b]$  и пересекает прямую  $y = y_1$  в точке  $x_1$ (Рис. 16). Тогда нижняя граница  $\underline{h}(x)$  композиции функций  $f(g(x))$  не имеет разрыва в точке  $x_1$ .

**Доказательство:** Рассмотрим построение  $\underline{h}(x)$  в окрестности точки  $x_1 \in [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon]$ :

На интервале  $[x_1 - \epsilon, x_1]$   $c' = \min_{x \in [x_1 - \epsilon, x_1]}(\underline{\mu}_g(x))$ , а  $d' = \max_{x \in [x_1 - \epsilon, x_1]}(\overline{\mu}_g(x))$ . Так как  $\underline{\mu}_f(y)$  является вогнутой на интервале  $[c', d']$ , то в соответствии с утверждением 6  $\underline{h}(x) = \min(\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)))$ ,  $x \in [x_1 - \epsilon, x_1]$ .

На интервале  $[x_1, x_1 + \epsilon]$   $y_1 = \min_{x \in [x_1, x_1 + \epsilon]}(\underline{\mu}_g(x))$ , а  $d'' = \max_{x \in [x_1, x_1 + \epsilon]}(\overline{\mu}_g(x))$ . Так как  $\underline{\mu}_f(y)$  убывает на интервале  $[y_1, d'']$ , то в соответствии с утверждением 3  $\underline{h}(x) = \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))$ ,  $x \in [x_1, x_1 + \epsilon]$ .

Вычислим предел оценки слева от точки  $x_1$ . При  $x \rightarrow x_1 - 0$   $\underline{\mu}_g(x) \rightarrow y_1$ , а  $\overline{\mu}_g(x) \rightarrow d'$ . Так как  $\underline{\mu}_f(y)$  убывает на интервале  $[y_1, d']$ , то  $\underline{\mu}_f(d') \leq \underline{\mu}_f(y_1)$ . Из этого следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} \underline{h}(x) = \lim_{x \rightarrow x_1 - 0} \min(\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x))) = \underline{\mu}_f(d').$$

Вычислим предел оценки справа от точки  $x_1$ . При  $x \rightarrow x_1 + 0$   $\overline{\mu}_g(x) \rightarrow d'$ . Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_1 + 0} \underline{h}(x) = \lim_{x \rightarrow x_1 + 0} \underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)) = \underline{\mu}_f(d').$$

Равенство пределов означает, что функция  $\underline{h}(x)$  не имеет разрыва в точке  $x_1$ .

При рассмотрении вышеописанного частного случая миноранта внешней функции  $\underline{\mu}(y)$  может иметь количество вершин более одной (Рис. 14,16) т.е. состоять из более чем двух сегментов. Дополнительные вершины не добавляют новые слои в график функций  $\underline{\mu}_g(x)$ ,  $\overline{\mu}_g(x)$ (Рис. 15,17) потому что можно определить точку, где происходит смена монотонности функции  $\underline{\mu}(y)$  (для горизонтального сегмента эта точка может быть выбрана как точка с наибольшим значением абсциссы). Напомним, что в соответствии с алгоритмом построения КСЛ границы для композиции функций(III-B) слои добавляются только при смене монотонности  $\underline{\mu}(y)$ . Таким образом, все рассуждения будут справедливы и для более сложного графика  $\underline{\mu}(y)$ .

## V. Вычислительный эксперимент

A. Пример построения нижней КСЛ границы для композиции функций:

$$h(x) = \sin(\pi \cdot \cos(x)), x \in [-2\pi, 0]$$

Этот пример детально показывает применение правил (секция II) и алгоритмов (секция III-B,III-A) для построения нижней КСЛ границы композиции функций (Рис. 4—8).

Функция  $h(x)$  состоит из внутренней функции  $g(x) = \pi \cdot \cos(x)$  и внешней функции  $f(x) = \sin(x)$ . Внешняя функция  $\sin(x)$  не является монотонной на всей области ее определения поэтому начнем алгоритм построения нижней КСЛ границы (секция III-B) с шага 3:

- 1) Построим верхнюю  $\overline{\mu}_g(x)$  и нижнюю  $\underline{\mu}_g(x)$  КСЛ границы в виде касательных и секущих как показано на Рис. 4. Обозначим  $c = \frac{1}{2}\pi - 1$  тогда:

$$\overline{\mu}_g(x) = \begin{cases} \pi, & x \in [-2\pi, -2\pi + c] \\ -\pi(x + \frac{3}{2}\pi), & x \in [-2\pi + c, -\frac{3}{2}\pi] \\ -2(x + \frac{3}{2}\pi), & x \in [-\frac{3}{2}\pi, -\pi] \\ 2(x + \frac{1}{2}\pi), & x \in [-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \\ \pi(x + \frac{1}{2}\pi), & x \in [-\frac{1}{2}\pi, -c] \\ \pi, & x \in [-c, 0] \end{cases}$$

$$\underline{\mu}_g(x) = \begin{cases} -2(x + \frac{3}{2}\pi), & x \in [-2\pi, -\frac{3}{2}\pi] \\ -\pi(x + \frac{3}{2}\pi), & x \in [-\frac{3}{2}\pi, -\pi - c] \\ -\pi, & x \in [-\pi - c, -\pi + c] \\ \pi(x + \frac{1}{2}\pi), & x \in [-\pi + c, -\frac{1}{2}\pi] \\ 2(x + \frac{1}{2}\pi), & x \in [-\frac{1}{2}\pi, 0] \end{cases}$$

- 2) Область значения этих функций находится в следующем интервале:  $\overline{\mu}_g(x), \underline{\mu}_g(x) \in [-\pi, \pi]$ . Следовательно внешняя функция  $\sin(x)$  не является монотонной на данном интервале. Нижнюю КСЛ границу  $f(x)$  для  $x \in [-\pi, \pi]$  (Рис. 5) определим следующим образом:

$$\underline{\mu}_f(x) = \begin{cases} x + \pi, & x \in [-\pi, -\pi + 1] \\ -1, & x \in [-\pi + 1, -1] \\ x, & x \in [-1, 0] \\ \frac{2}{\pi}x, & x \in [0, \frac{1}{2}\pi] \\ -\frac{2}{\pi}(x - \pi), & x \in [\frac{1}{2}\pi, \pi] \end{cases}$$

- 3) Обозначим интервалы (слои) монотонности внешней КСЛ функции  $\underline{\mu}_f(x)$  для  $x \in [-\pi, \pi]$ :

$$l_1 = [-\pi, -1], l_2 = [-1, \frac{\pi}{2}], l_3 = [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

- 4) Пересечем  $\overline{\mu}_g(x)$  и  $\underline{\mu}_g(x)$  на интервале  $[-2\pi, 0]$  горизонтальными прямыми  $y(x) = -1$  и  $y(x) = \frac{1}{2}\pi$ . Абсциссы точек пересечения  $\overline{\mu}_g(x)$  и  $\underline{\mu}_g(x)$  с горизонтальными прямыми на интервале  $[-2\pi, 0]$  (Рис. 4) обозначим множеством:

$$X = \{-2\pi, -\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{\pi}, -\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\pi, 0\}.$$

- 5) Рассмотрим каждый интервал  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, 9$  из множества  $X$ :

- a) Интервал  $[x_1, x_2] = [-2\pi, -\frac{7}{4}\pi]$ . Графики функций  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  лежат на одном и том же слое  $l_3$ . Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является не возрастающей на  $l_3$ . Таким образом имеем:

$$\underline{\mu}_g(x) \in [\frac{1}{2}\pi, \pi] \in l_3, x \in [x_1, x_2],$$

$$\overline{\mu}_g(x) \in [\frac{1}{4}\pi^2, \pi] \in l_3, x \in [x_1, x_2],$$

$$\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)) = \begin{cases} 0, & x \in [x_1, -2\pi + c], \\ 2x + 3\pi + 2, & x \in [-2\pi + c, x_2]. \end{cases}$$

- b) Интервал  $[x_2, x_3] = [-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}]$ . График функции  $\underline{\mu}_g(x)$  лежит на слое  $l_2$ , а график функции  $\overline{\mu}_g(x)$  находится на слое  $l_1$ . Таким образом имеем:

$$\underline{\mu}_g(x) \in [1, \frac{1}{2}\pi] \in l_2, x \in [x_2, x_3],$$

$$\overline{\mu}_g(x) \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi^2] \in l_3, x \in [x_2, x_3].$$



Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является выпуклой на интервале  $[1, \frac{1}{4}\pi^2]$ .

$$\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)) = 2x + 3\pi + 2, x \in [x_2, x_3],$$

$$\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)) = -\frac{4x}{\pi} - 6, x \in [x_2, x_3].$$

Прямые  $y(x) = 2x + 3\pi + 2$  и  $y(x) = -\frac{4x}{\pi} - 6$  пересекаются в точке с абсциссой  $b = -\frac{\pi(8+3\pi)}{2(2+\pi)} \in [x_2, x_3]$ . Таким образом нижняя граница этих прямых равна:

$$\min(\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))) = \begin{cases} 2x + 3\pi + 2, & x \in [x_2, b], \\ -\frac{4x}{\pi} - 6 & x \in [b, x_3]. \end{cases}$$

- с) Интервал  $[x_3, x_4] = [-\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{\pi}]$ . Графики функций  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  лежат на одном и том же слое  $l_2$ . Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  не убывает на  $l_2$ . Таким образом имеем:

$$\underline{\mu}_g(x) \in [-1, 1] \in l_2, x \in [x_3, x_4],$$

$$\overline{\mu}_g(x) \in [-\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}\pi] \in l_2, x \in [x_3, x_4],$$

$$\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)) = \begin{cases} -\frac{4x}{\pi} - 6, & x \in [x_3, -\frac{3}{2}\pi], \\ -\pi(x + \frac{3}{2}\pi), & x \in [-\frac{3}{2}\pi, x_4]. \end{cases}$$

- д) Интервал  $[x_4, x_5] = [-\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{\pi}, -\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}]$ . График функции  $\underline{\mu}_g(x)$  лежит на слое  $l_1$ , а график функции  $\overline{\mu}_g(x)$  находится на слое  $l_2$ . Таким образом имеем:

$$\overline{\mu}_g(x) \in [-1, -\frac{2}{\pi}] \in l_2, x \in [x_4, x_5],$$

$$\underline{\mu}_g(x) \in [-\frac{1}{2}\pi, -1] \in l_1, x \in [x_4, x_5].$$

Так как функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является выпуклой для  $x \in [-\frac{1}{2}\pi, -\frac{2}{\pi}]$  мы строим горизонтальные отрезки  $y = \min(\underline{\mu}_f(x)) = -1$  для  $x \in [x_4, x_5]$ .

- е) Интервал  $[x_5, x_6] = [-\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}]$ . График функции  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  лежат на одном и том же слое  $l_1$ . Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  не возрастает на  $l_1$ . Таким образом имеем:

$$\underline{\mu}_g(x) \in [-\pi, -1] \in l_2, x \in [x_5, -\pi],$$

$$\overline{\mu}_g(x) \in [-\pi, -1] \in l_2, x \in [-\pi, x_6],$$

$$\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)) = \begin{cases} -1, & x \in [x_5, -\pi - \frac{1}{2}], \\ -2x - 2\pi, & x \in [-\pi - \frac{1}{2}, -\pi], \\ 2x + 2\pi, & x \in [-\pi, -\pi + \frac{1}{2}], \\ -1, & x \in [-\pi + \frac{1}{2}, x_6]. \end{cases}$$

- ф) Интервал  $[x_6, x_7] = [-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\pi}]$ . График функции  $\underline{\mu}_g(x)$  лежит на слое  $l_1$ , а график функции  $\overline{\mu}_g(x)$  находится на слое  $l_2$ . Таким образом имеем:

$$\overline{\mu}_g(x) \in [-1, -\frac{2}{\pi}] \in l_2, x \in [x_6, x_7],$$

$$\underline{\mu}_g(x) \in [-\frac{1}{2}\pi, -1] \in l_1, x \in [x_6, x_7].$$

Так как функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является выпуклой для  $x \in [-\frac{1}{2}\pi, -\frac{2}{\pi}]$ , то строим горизонтальные отрезки  $y = \min(\underline{\mu}_f(x)) = -1$  на  $x \in [x_6, x_7]$ .

- г) Интервал  $[x_7, x_8] = [-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}]$ . Графики функций  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  находятся на одном и том же слое  $l_2$ . Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является не убывающей на  $l_2$ . Таким образом имеем:

$$\underline{\mu}_g(x) \in [-1, 1] \in l_2, x \in [x_7, x_8],$$

$$\overline{\mu}_g(x) \in [-\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}\pi] \in l_2, x \in [x_7, x_8],$$

$$\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)) = \begin{cases} \pi(x + \frac{1}{2}\pi), & x \in [x_7, -\frac{1}{2}\pi], \\ \frac{4x}{\pi} + 2, & x \in [-\frac{1}{2}\pi, x_8]. \end{cases}$$

- h) Интервал  $[x_8, x_9] = [-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\pi]$ . График функции  $\underline{\mu}_g(x)$  лежит на слое  $l_2$ , а график функции  $\overline{\mu}_g(x)$  находится на слое  $l_1$ . Таким образом имеем:

$$\underline{\mu}_g(x) \in [1, \frac{1}{2}\pi] \in l_2, x \in [x_8, x_9],$$

$$\overline{\mu}_g(x) \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi^2] \in l_3, x \in [x_8, x_9].$$

Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  является выпуклой на интервале  $[1, \frac{1}{4}\pi^2]$ .

$$\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)) = 2x - \pi + 2, x \in [x_8, x_9],$$

$$\underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x)) = \frac{4x}{\pi} + 2, x \in [x_8, x_9].$$

Прямые  $y(x) = 2x - \pi + 2$  и  $y(x) = \frac{4x}{\pi} + 2$  пересекаются в точке с абсциссой  $d = -\frac{\pi^2}{2(2+\pi)} \in [x_8, x_9]$ . Таким образом, нижняя граница этих линий равна:

$$\min(\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)), \underline{\mu}_f(\underline{\mu}_g(x))) = \begin{cases} \frac{4x}{\pi} + 2, & x \in [x_8, d], \\ 2x - \pi + 2 & x \in [d, x_9]. \end{cases}$$

- i) Интервал  $[x_9, x_{10}] = [-\frac{1}{4}\pi, 0]$ . График функции  $\underline{\mu}_g(x)$  и  $\overline{\mu}_g(x)$  лежат на одном и том же слое  $l_3$ . Функция  $\underline{\mu}_f(x)$  не возрастает на слое  $l_3$ . Таким образом имеем:

$$\underline{\mu}_g(x) \in [\frac{1}{2}\pi, \pi] \in l_3, x \in [x_9, x_{10}],$$

$$\overline{\mu}_g(x) \in [\frac{1}{4}\pi^2, \pi] \in l_3, x \in [x_9, x_{10}],$$

$$\underline{\mu}_f(\overline{\mu}_g(x)) = \begin{cases} -2x - \pi + 2, & x \in [x_9, -c], \\ 0, & x \in [-c, x_{10}]. \end{cases}$$

В конечном счете была получена нижняя граница в виде ломанной линии (Рис. 8):

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2\pi, -2\pi + c], \\ 2x + 3\pi + 2, & x \in [-2\pi + c, b], \\ -\frac{4}{\pi}x - 6, & x \in [b, -\frac{3}{2}\pi], \\ -\pi(x + \frac{3}{2}\pi), & x \in [-\frac{3}{2}\pi, x_1^2], \\ -1, & x \in [x_1^2, -\pi - \frac{1}{2}], \\ -2x - 2\pi, & x \in [-\pi - \frac{1}{2}, -\pi], \\ 2x + 2\pi, & x \in [-\pi, -\pi + \frac{1}{2}], \\ -1, & x \in [-\pi + \frac{1}{2}, x_2^3], \\ \pi(x + \frac{1}{2}\pi), & x \in [x_2^3, -\frac{1}{2}\pi], \\ \frac{4}{\pi}x + 2, & x \in [-\frac{1}{2}\pi, d], \\ -2x - \pi + 2, & x \in [d, -c], \\ 0, & x \in [-c, 0]. \end{cases}$$

Заметим, что  $\min(\omega(x)) = -1$ . Это значение точно соответствует глобальному минимуму функции  $h(x)$  для  $x \in [-2\pi, 0]$ :

$$\sin(\pi \cdot \cos(-\frac{2}{3}\pi)) = \sin(\pi \cdot \cos(-\frac{4}{3}\pi)) = -1.$$

Интервальный анализ [13, 14] дает тоже точную оценку для данной функции:

$$h([-2\pi, 0]) \subseteq \sin(\pi \cdot \cos([-2\pi, 0])) = \sin(\pi \cdot [-1, 1]) = \sin([- \pi, \pi]) = [-1, 1].$$

Оценим функцию  $h(x) = \sin(\pi \cdot \cos(x))$  при помощи техники использования скосов [7, 15]. Во первых вычислим границы скоса  $Y_s$  для  $s_h(c, A)$  при  $A = [-2\pi, 0]$  и  $c = -\pi$ :

$$\begin{aligned} h((A, c, 1)) &= \sin(\pi \cdot \cos((A, c, 1))) \\ \cos((A, c, 1)) &= \cos((-2\pi, 0], -\pi, 1) \\ &= ([-1, 1], -1, -\sin([-2\pi, 0])) \\ &= ([-1, 1], -1, [-1, 1]) \\ h((A, c, 1)) &= \sin((\pi, \pi, 0) \cdot ([-1, 1], -1, [-1, 1])) \\ &= \sin([- \pi, -\pi], -\pi, [- \pi, \pi]) \\ &= ([- \pi, -\pi], 0, \cos([- \pi, \pi]) \cdot [- \pi, \pi]) \\ &= ([- \pi, -\pi], 0, [- \pi, \pi]) \\ &= (Y_x, Y_c, Y_s). \end{aligned}$$

Оценка функции на основе вычисленного скоса дает следующий результат:

$$h([A]) \subseteq h(c) + Y_s(A - c) = 0 + [-\pi, \pi] \cdot ([-2\pi, 0] - 0) = [-2\pi^2, 2\pi^2].$$

Таблица I показывает результаты сравнения нижней оценки функции  $\sin(\pi \cdot \cos(x))$  на интервале  $[-2\pi, 0]$  полученными при помощи различных подходов. Отметим, что КСЛ метод дает точную оценку целевой функции, но это может потребовать значительных вычислительных ресурсов т.к каждая вершина КСЛ функции должна быть вычислена. Подход на основе интервального анализа показывает точную оценку функции, но не позволяет получить границу в соответствии с контуром функции. Оценка на основе вычислительного скоса не показывает высокую эффективность для данной функции.

Таблица I: Сравнение оценок, полученных с помощью различных подходов

Функция	КСЛ оценка	Интер. анализ	Скосы
$\sin(\pi \cdot \cos(x))$	-1	-1	$-2\pi^2$

## VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были расширены теоретические основы построения нижних и верхних КСЛ границ для композиции функций. Кроме того, были классифицированы возможные точки разрыва КСЛ границ, сформулированы утверждения и выполнены доказательства непрерывности в этих точках. В соответствии с теоретическими утверждениями был предложен алгоритм построения КСЛ границ для композиции функций одной переменной. Эффективность данного алгоритма была продемонстрирована в численном эксперименте, который вычислил точную оценку целевой функции, а также создал непрерывную нижнюю КСЛ границу. Предложенный подход был экспериментально сравнен с методами интервального анализа [13, 14] и арифметикой скосов [7, 15].

В качестве практического применения разработанный метод возможно использовать в задачах глобальной одномерной оптимизации, где при помощи КСЛ границ можно эффективно редуцировать область поиска, а также выполнять оценку целевой функции и ее ограничений. Другое очевидное применение данного подхода, это нахождение корней функции от одной переменной.

Возможным направлением дальнейших исследований является применение предложенного подхода в сепарабельном программировании [16, 17]. Сепарабельное программирование использует специальный класс многомерных функций, представленных в виде суммы одномерных функций, т. е.  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) + F_2(x_2) + \dots + F_n(x_n)$ . В задаче сепарабельного программирования качественная линейная аппроксимация нелинейных функций является необходимой, поэтому разработанный подход может оказаться полезным.

### Список литературы

1. Khamisov Oleg Posypkin Mikhail Usov Alexander. Piecewise linear bounding functions for univariate global optimization. — IX INTERNATIONAL CONFERENCE OPTIMIZATION AND APPLICATIONS (2018);.
2. Usov Alexander. Piecewise linear bounding functions in univariate global optimization // International Journal of Open Information Technologies. — 2019. — Vol. 7, no. 5. — P. 9–16.
3. Evtushenko Yuri Gavrilovich. A numerical method of search for the global extremum of functions (scan on a nonuniform net) // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1971. — Vol. 11, no. 6. — P. 1390–1403.
4. Evtushenko Yuri, Posypkin Mikhail. A deterministic approach to global box-constrained optimization // Optimization Letters. — 2013. — Vol. 7, no. 4. — P. 819–829.
5. Ershov A.R., Khamisov Oleg Valerievich. Automatic global optimization // Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii. — 2004. — Vol. 11, no. 2. — P. 45–68.
6. Khamisov Oleg. Explicit univariate global optimization with piecewise linear support functions. — Proc. DOOR 2016, CEUR-WS.org, Vol. 1623. P. 218-255, online <http://ceur-ws.org/Vol-1623/papermp19.pdf>.
7. Ratz Dietmar. An optimized interval slope arithmetic and its application. — Inst. für Angewandte Mathematik, 1996.
8. Bompadre A., Mitsos A. Convergence rate of McCormick re-

- laxations // Journal of Global Optimization. — 2012. — Vol. 52, no. 1. — P. 1–28.
9. Floudas C.A., Gounaris C.E. A review of recent advances in global optimization // Journal of Global Optimization. — 2009. — Vol. 45, no. 1. — P. 3–38.
  10. Khajavirad Anita, Sahinidis Nikolaos. Convex envelopes of products of convex and component-wise concave functions // Journal of Global Optimization. — 2012. — Vol. 52, no. 3. — P. 3911–409.
  11. Khamisov Oleg. Optimization with quadratic support functions in nonconvex smooth optimization. — AIP Conference Proceedings 1776, 050010 (2016); doi: 10.1063/1.4965331.
  12. Kudryavtsev L.D. Course of mathematical analysis. volume 1: textbook for bachelors-6th ed., reprint. and additional. — 2017.
  13. Shary S.P. Finite-dimensional interval analysis. institute of computational technologies, ras. — 2016.
  14. Hansen Eldon, Walster G William. Global optimization using interval analysis: revised and expanded. — CRC Press, 2003.
  15. Ratz Dietmar. A nonsmooth global optimization technique using slopes: the one-dimensional case // Journal of Global Optimization. — 1999. — Vol. 14, no. 4. — P. 365–393.
  16. Pardalos panos M, Rosen JB. Reduction of nonlinear integer separable programming problems // International journal of computer mathematics. — 1988. — Vol. 24, no. 1. — P. 55–64.
  17. Rosen J Ben, Pardalos Panos M. Global minimization of large-scale constrained concave quadratic problems by separable programming // Mathematical Programming. — 1986. — Vol. 34, no. 2. — P. 163–174.

# Construction of continuous piecewise-linear bounds for the composition of functions from one variable.

Alexander L. Usov

**Abstract**—This article addresses the problem of constructing lower and upper bounding functions for univariate functions. This problem is of a crucial importance in global deterministic optimization, where such bounds are used both to estimate a target function and to reduce the search area of the global extremum. In practice, existing approaches to global optimization do not always show high accuracy of bounding functions. The article develops the previously proposed approach of using piecewise-linear bounds as an estimate of functions of one variable. The main focus is on the construction of piecewise-linear bounds for the composition of functions, as well as on the continuity of these bounds. The necessary theoretical statements with proofs that allow the synthesis of continuous piecewise-linear estimates from the expression of a function presented in algebraic form are considered. Using the composition of trigonometric functions as an example, an algorithm for constructing the lower piecewise-linear boundary using the properties of convexity and concavity is considered in detail. The computational experiment presented in the article shows the method of constructing the lower piecewise-linear boundary and compares the proposed approach with the technique of using interval analysis and slope arithmetic. The proposed approach demonstrates high accuracy and continuity of the obtained bounds.

**Keywords**—univariate global optimization, continuous functions, piecewise-linear functions, estimators, deterministic methods.

## References

1. Khamisov Oleg Posypkin Mikhail Usov Alexander. Piecewise linear bounding functions for univariate global optimization. — IX INTERNATIONAL CONFERENCE OPTIMIZATION AND APPLICATIONS (2018);.
2. Usov Alexander. Piecewise linear bounding functions in univariate global optimization // International Journal of Open Information Technologies. — 2019. — Vol. 7, no. 5. — P. 9–16.
3. Evtushenko Yuri Gavrilovich. A numerical method of search for the global extremum of functions (scan on a nonuniform net) // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1971. — Vol. 11, no. 6. — P. 1390–1403.
4. Evtushenko Yuri, Posypkin Mikhail. A deterministic approach to global box-constrained optimization // Optimization Letters. — 2013. — Vol. 7, no. 4. — P. 819–829.
5. Ershov A.R, Khamisov Oleg Valerievich. Automatic global optimization // Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii. — 2004. — Vol. 11, no. 2. — P. 45–68.
6. Khamisov Oleg. Explicit univariate global optimization with piecewise linear support functions. — Proc. DOOR 2016, CEUR-WS.org, Vol. 1623. P. 218-255, online <http://ceur-ws.org/Vol-1623/papermp19.pdf>.
7. Ratz Dietmar. An optimized interval slope arithmetic and its application. — Inst. für Angewandte Mathematik, 1996.
8. Bompadre A., Mitsos A. Convergence rate of McCormick relaxations // Journal of Global Optimization. — 2012. — Vol. 52, no. 1. — P. 1–28.
9. Floudas C.A., Gounaris C.E. A review of recent advances in global optimization // Journal of Global Optimization. — 2009. — Vol. 45, no. 1. — P. 3–38.
10. Khajavirad Anita, Sahinidis Nikolaos. Convex envelopes of products of convex and component-wise concave functions // Journal of Global Optimization. — 2012. — Vol. 52, no. 3. — P. 3911–409.
11. Khamisov Oleg. Optimization with quadratic support functions in nonconvex smooth optimization. — AIP Conference Proceedings 1776, 050010 (2016); doi: 10.1063/1.4965331.
12. Kudryavtsev L.D. Course of mathematical analysis. volume 1: textbook for bachelors-6th ed., reprint. and additional. — 2017.
13. Shary S.P. Finite-dimensional interval analysis. institute of computational technologies, ras. — 2016.
14. Hansen Eldon, Walster G William. Global optimization using interval analysis: revised and expanded. — CRC Press, 2003.
15. Ratz Dietmar. A nonsmooth global optimization technique using slopes: the one-dimensional case // Journal of Global Optimization. — 1999. — Vol. 14, no. 4. — P. 365–393.
16. Pardalos panos M, Rosen JB. Reduction of nonlinear integer separable programming problems // International journal of computer mathematics. — 1988. — Vol. 24, no. 1. — P. 55–64.
17. Rosen J Ben, Pardalos Panos M. Global minimization of large-scale constrained concave quadratic problems by separable programming // Mathematical Programming. — 1986. — Vol. 34, no. 2. — P. 163–174.